Manuel Coveñas Naquiche

4 MATEMATICA

4

30

MATEMÁTICA 4

EDICIÓN 1 998

Presentación

"Caminante no hay camino,
se hace camino al andar"

*Estas coplas, en las que el vate Antonio Machado expresa poéticamente una gran verdad de la sabiduría popular, cobran plena vigencia en la actividad de profesional de **Manuel COVEÑAS NAQUICHE**, con justicia **"el Isaac Asimov de las matemáticas peruanas"** por su prolífica producción bibliográfica -en el área didáctica- en esta no fácil ciencia formal.*

*En efecto, Manolo, como le gusta que le digan sus amigos, se abrió camino como un extraordinario docente, por sus virtudes didácticas, ¡innatas en él!, y por su sencillez; ahora, sigue caminando, haciendo camino, en el difícil arte de crear libros... ¡no se duerme en sus laureles!, por eso, sigue mejorando sus textos escolares, gracias a su experiencia pedagógica y a los consejos de uno de los elementos fundamentales del proceso enseñanza-aprendizaje: **¡EL MAESTRO DE AULA!**, con quien está en permanente contacto.*

*Con ocasión de esta segunda edición -ampliada y corregida de sus textos de **MATEMÁTICAS**, para cada uno de los grados de Educación Secundaria, nos presenta una nueva estructura de los mismos:*

- ☞ ***Una exposición teórica sencilla**, accesible al alumno, de cada uno de los temas tratados, que se ve clarificada con...*
- ☞ ***Ejemplos resueltos** en orden de dificultad progresiva y con...*
- ☞ ***Talleres** para cada capítulo, a desarrollarse en clase, ¡mejor si es a nivel grupal!, motivando así la participación activa de los educandos.*

No contento con esto, añade:

- ☞ ***Ejercicios de reforzamiento** en dos niveles, según el grado de dificultad y,*
- ☞ ***Propuesta de Olimpíadas Matemáticas,** con su respectivo desarrollo, que globalizan los conocimientos impartidos en cada unidad temática.*

*Como pueden apreciar amigos/as lectores/as, estos textos se convierten en un material de invalorable valor pedagógico, porque, facilitan el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las **Matemáticas**, saber que permite optimizar la capacidad lógico-deductiva del ser humano.*

Prof. Lucio R. Blanco A.

INDICE

Manuel Coveñas Naquiche

4

MATEMATICA

4

MATEMÁTICA

IMPRESO EN EL PERU **PRINTED IN PERU**

DISTRIBUIDORA COVEÑAS E.I.R.L.
Jirón Las Verdolagas N°199 Urbanización
Micaela Bastidas Telf.s: 486-7957; 521-0949
Los Olivos, Lima.

IMPRESO EN EL PERÚ/*PRINTED IN PERU*

1.1 CONJUNTO

La palabra Conjunto se incluye en el lenguaje matemático, como un concepto primitivo, o sea como un término no definido. Sin embargo, debido a la gran importancia que tiene en la matemática, generalmente se acepta la siguiente notación intuitiva de conjunto.

Conjunto es cualquier agrupación bien definida de objetos o entes. Se usa como SINÓNIMO de conjunto: colección, clase y familia.

Ejemplo: **A.** El conjunto de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 9
B. El conjunto formado por Manuel, Miguel y Walter
C. El conjunto de las letras a, b, c, d, e
D. El conjunto de personas nacidas en Piura.

1.1.1 ELEMENTOS: Cada objeto o ente que forma parte de un conjunto se llama elemento del conjunto. Por ejemplo, Mayo es un elemento de los meses del año.

1.1.2 NOTACIÓN: En general, los conjuntos se denotan por letras mayúsculas: A, B, C,... X, Y; Z y los elementos se denotan por letras minúsculas; a, b, c, d, ...x, y, z. Se acostumbra a escribir los elementos entre llaves y separados con puntos y comas.

Ejemplo: A = { a; b; c; d; e } Este conjunto se lee:
"Conjunto A cuyos elementos son: a, b, c, d, e"

1.1.3 RELACIÓN DE PERTENENCIA: La Relación de Elemento a conjunto es de pertenencia.

La Notación "$x \in A$" se lee "x pertenece a A"

Indicando así, que x forma parte del conjunto A.

Ejemplo: A = {3; 5; 7}, diremos que: $3 \in A$; $5 \in A$ y $7 \in A$

La Negación de "$x \in A$ es "$x \notin A$ y se lee; "x no pertenece a A"

Ejemplo: A = {3, 5, 7}, diremos que: $4 \notin A$; $6 \notin A$

1.1.4 DETERMINACIÓN O DESIGNACIÓN DE CONJUNTOS: Un conjunto puede determinarse de dos formas: Por extensión y por comprensión.

A) Determinación Por Extensión:

Diremos que un conjunto se designa por extensión, cuando es posible indicar explícitamente los elementos del conjunto, escribiéndolos uno a continuación de otros y separados por punto y coma.

Ejemplo 1: A = {1; 2; 3; 4; 5} *Se lee: "A es el conjunto formado por los números enteros consecutivos: 1, 2, 3, 4, 5"*

Ejemplo 2: B = {a; e; i; o; u}

B) Determinación Por Comprensión:

Un conjunto se designa por comprensión, cuando los elementos del conjunto pueden expresarse mediante una propiedad característica única y común a ellos.

Ejemplo 1: B = {x/x es una letra vocal}

Se lee: "El conjunto B formado por todas las x tales que x es una letra vocal" ("/" se lee "tal que")

Ejemplo 2: $C = \{x \in Z / 0 < x < 5\}$

Se lee: "C es el conjunto de los "x" pertenecientes a los números enteros, tales que los "x" sean mayores que 0 y menores que 5"

Ejemplo 3: D = {x/x es un número natural par}

1.1.5 CONJUNTO VACÍO Y CONJUNTO UNITARIO

Conjunto Vacío o Nulo: Es aquel que no tiene elementos. Se denota por la letra griega "ϕ" (se lee: ϕ = fi), también se denota por: "{ }"

Ejemplos: A = { x/x es un virrey actual del Perú }

$A = \phi$ ó $A = \{\ \}$

B = { y/y es un número entero comprendido entre 12 y 13 }

B = ϕ ó B = { }

Conjunto Unitario: Es aquel que tiene uno y sólo un elemento.

Ejemplo: C = { 8 }

D = { x/3 < x < 5, "x" es número entero }

Significa que "x" es mayor que 3 pero menor que 5, siendo x = 4

1.1.6 CONJUNTO FINITO Y CONJUNTO INFINITO

A) CONJUNTO FINITO: Son aquellos que tienen una cantidad determinada de elementos.

Ejemplos: P = { 2; 3; 7; 8; 9; 12 }
Q = { x/x es una letra del abecedario }

B) CONJUNTO INFINITO: Son aquellos que tienen una cantidad indeterminada de elementos.

Ejemplos: R = { 1; 2; 3; 4; 5; ....}

Los puntos suspensivos significan que siguen los elementos y como la numeración es ilimitada, R es un conjunto infinito.

S = { x/x es una estrella del firmamento }

> *Nota: En la matemática moderna se utiliza una serie de nuevos símbolos tomados de la Lógica Formal o Lógica Matemática y que iremos aplicándolos gradualmente. Recordar siempre que los símbolos lógicos son abreviaturas de expresiones matemáticas bien definidas.*

Ejemplos:

Símbolo lógico	Lectura
$\Rightarrow$	Se lee "entonces"
$\Leftrightarrow$	Se lee " si y sólo si"
$\forall$	Se lee "para todo"

Ejemplo: A = { x/x es un número natural < 7 }

Luego, diríamos que: 1 es un número natural $\Rightarrow$ 1 $\in$ A

(El símbolo $\Rightarrow$ se lee "entonces")

2 es un número natural $\Rightarrow 2 \in A$

> significa mayor que
< significa menor que

1.2 OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS:

1.2.1 UNIÓN DE CONJUNTOS:

1.2.1 UNIÓN DE CONJUNTOS: La operación de unión de conjuntos es muy frecuente entre nosotros ya que constantemente la realizamos cuando, **por ejemplo:**

a) Unimos un conjunto de alumnos con un conjunto de alumnas en el aula

b) Unimos varias palabras para formar una frase.

En general; dados los conjuntos: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{3; 4; 6; 7; 8\}$

Podemos formar un nuevo conjunto integrado por elementos de **A** o de **B** (o de ambos). Es decir, un conjunto formado por los elementos comunes y no comunes de **A** y **B**.

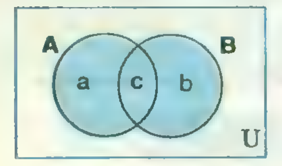
$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

Definición: *Dados los conjuntos A y B se llama* ***Reunión o Unión de los Conjuntos A y B*** *al conjunto cuyos elementos pertenecen a A o B (o ambos). Para indicar ésta operación se utiliza el símbolo de unión* $\cup$

Simbolicamente se expresaría: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Es decir: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

- Gráficamente. la unión de conjuntos se representa, en un diagrama de **VENN EULER,** sombreado la zona donde se encuentran los diversos elementos que pertenecen a los conjuntos que pertenecen a la unión.

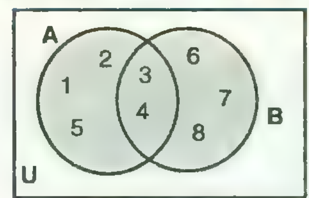


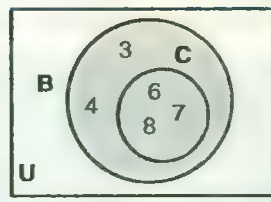
El rectángulo representa al conjunto universal U, en tanto que $A \cup B$ es la parte sombreada.

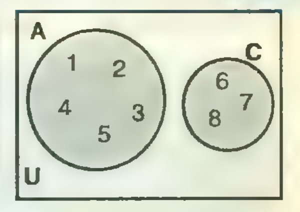
Nota : En la definición de la unión de conjuntos se ha empleado la proposición lógica disyuncion (v).

Ejemplo 1: Sean los conjuntos : $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{3; 4; 6; 7; 8\}$ y $C = \{6; 7; 8\}$ Hallar: $A \cup B$; $B \cup C$ y $A \cup C$. Trazar el diagrama de Venn de cada resultado.

Resolución:





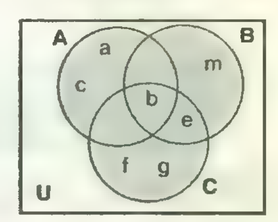


A U B = { 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 }   B U C = { 3; 4; 6; 7; 8 }   A U C = { 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 }

Ejemplo 2 : En forma gráfica, representa la unión de los siguientes conjuntos:

A = { a; b; c } ;   B = { b; e; m }   y   C = { b; e; f; g }

Resolución:



Luego:

$A \cup B \cup C$ = { a; b; c; e; f; g; m }

Propiedades de la Unión de Conjuntos:

1) $A \cup B = B \cup A$ ......*(propiedad conmutativa).*

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ......*(propiedad asociativa).*

3) $A \cup \phi = A$ ......*(propiedad del elemento neutro).*

4) $A \cup U = U$

5) $A \cup A = A$ ......*(propiedad idempotente).*

1.2.2 INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS:

Sean los conjuntos: A = { 2; 3; 4; 5; 6 } y B = { 4; 5; 6; 7; 8 }

¿Podemos formar un tercer conjunto C en el cual estén los elementos comunes a A y B o, dicho de otro modo, los elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B?

Si, sí podemos; y para ello observamos que el elemento, 4 , el elemento 5 y el elemento 6 están en ambos conjuntos.

A este nuevo conjunto lo llamamos conjunto de intersección de A y B , y lo denotamos por el símbolo: $\cap$ que se lee: "intersección".

Entonces tendremos: $A \cap B$ = { 4; 5; 6 }

que se leería: "A intersección B es igual a 4, 5, 6".

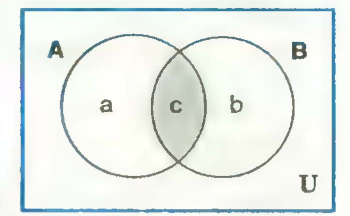
Definición: Dados los conjuntos A y B, se llaman interseccion de los conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B.

Para representar la intersección se emplea el símbolo $\cap$.

Simbólicamente: $A \cap B = \{ x/x \in A \wedge x \in B \}$

Es decir: $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

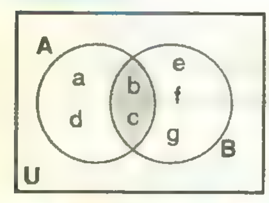
- Gráficamente, la respuesta es la zona sombreada que contiene a los elementos que pertenecen a ambos conjuntos.

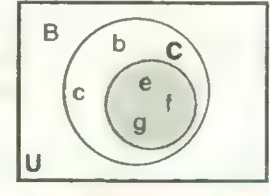


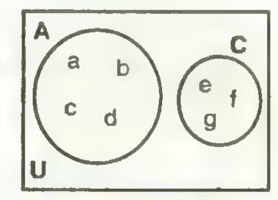
Nota: En la definición de la intersección de conjuntos se ha empleado la proposición lógica conjunción ($\wedge$).

Ejemplo: Sean los conjuntos : A = {a; b; c; d} ; B = {b; c; e; f; g} y C = {e; f; g} , Hallar: $A \cap B$; $B \cap C$ y $A \cap C$. Trazar los diagramas de Venn correspondientes.

Resolución:







$A \cap B = \{b ; c\}$ $\quad$ $B \cap C = \{e; f; g\}$ $\quad$ $A \cap C = \phi$

Propiedades de la Intersección de Conjuntos:

1) $A \cap B = B \cap A$ .... *(Propieada commutativa).*

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ....*(Propiedad asociativa).*

3) $A \cap U = A$ ....*(Propiedad del elemento neutro).*

4) $A \cap \phi = \phi$

5) $A \cap A = A$ ....*(Propiedad idempotente).*

Propiedades Distributivas de la Unión e Intersección:

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

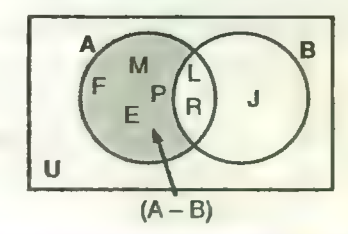
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.2.3 DIFERENCIA DE CONJUNTOS:

Sean los conjuntos: A = { Manuel, Percy; Luis; Ricardo; Eduardo; Franklin }
B = { Luis; Ricardo; Juan }

Entonces: A - B = { Manuel, Percy; Eduardo; Franklin }

Gráficamente la respuesta está representada por la zona sombreada en la que se encuentra los elementos que pertenecen al conjunto A y que no pertenecen al conjunto B.



Luego: A - B = { M; P; E; **F** }

Definición: *Dados los conjuntos A y B se llama **Diferencia de conjuntos A y B** a un nuevo conjunto formado por elementos de A y que no son elementos de B; es decir, en este nuevo conjunto están sólo elementos que pertenecen al conjunto A y ; que no pertenecen al conjunto B. Su símbolo es: –*

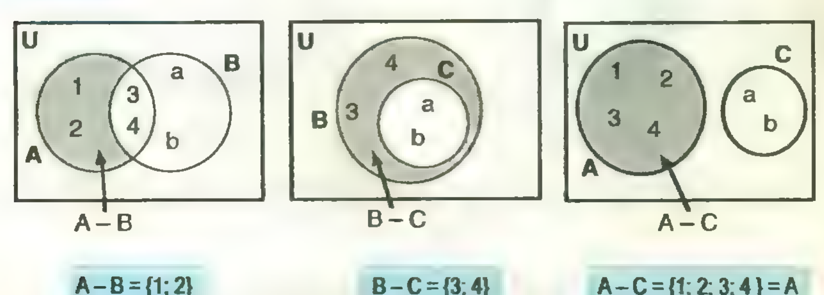
Simbólicamente: $A - B = \{ x/x \in A \wedge x \notin B \}$

Es decir: $x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

En esta operación entre conjuntos es muy importante que se mantenga el orden de los conjuntos dados; pues de no hacerlo así, el conjunto resultado va a ser diferente.

Ejemplo: Sean los conjuntos: A = { 1; 2; 3; 4 } ; B = { 3; a; b; 4 } y C = { a; b }. Hallar : A – B ; B – C y A – C, trazar los diagramas de Venn correspondiente.

Resolución:



A – B = {1; 2}

B – C = {3; 4}

A – C = {1; 2; 3; 4 } = A

Propiedades de la Diferencia de Conjuntos:

1) $A - A = \phi$
2) $A - \phi = A$
3) $\phi - A = \phi$
4) $(A - B) \subset A$
5) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$
6) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ } **Leyes de Morgan**
7) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ }
8) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
9) $(A - B) - C = (A - C) - B$
10) $B \cap (A - B) = \phi$

1.2.4 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO:

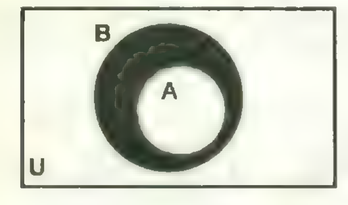
Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$, se define el complemento de A con respecto a B y se denota $\mathcal{C}_B A$, a la diferencia $B - A$. Esto es:

$$\mathcal{C}_B A = B - A = \{ x / x \in B \wedge x \notin A \}$$

Conjunto que queda caracterizado por la propiedad:

$$x \in \mathcal{C}_B A \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$$

Cuya representación en el diagrama de Venn es la parte sombreada de la figura (a).



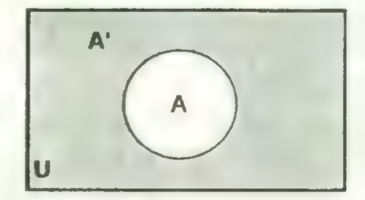


Figura (a) *Figura (b)*

En particular, si: B = U, el complemento de A con respecto a U, se denota por:

$$\mathcal{C}A = A' = A^c = \overline{A}$$

Y se define como el conjunto de elementos que no pertenenecen a A, esto es:

$$A' = U - A = \{ x / x \in U \wedge x \notin A \} = \{ x / x \notin A \}$$

Conjunto que queda caracterizado por la propiedad: $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$

Y cuya representación en el diagrama de Venn es la parte sombreada de la figura (b).

Ejemplo: Sean los conjuntos: A = { 3; 4; 5; 6 } y B = { 1; 2; 3; 5; 6 } ; Hallar:

a) $\mathcal{C}_B A$ **b)** $\mathcal{C}_A B$ **c)** $\mathcal{C}_A(A \cap B)$

Resolución:

a) $\mathcal{C}_B A = B - A = \{1; 2; 3; 5; 6\} - \{3; 4; 5; 6\}$

$B - A = \{1; 2\}$

Gráficamente:

b) $\mathcal{C}_B A = A - B = \{3; 4; 5; 6\} - \{1; 2; 3; 5; 6\}$

$A - B = \{4\}$

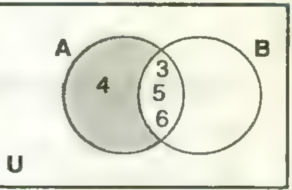
Gráficamente:

c) $\mathcal{C}_A (A \cap B) = A - (A \cap B)$

$= \{3; 4; 5; 6\} - \{3; 5; 6\}$

$= \{4\}$

Gráficamente:



Propiedades del Complemento:

Para conjuntos A y B en U se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\mathcal{C}(\mathcal{C}A) = A$

2) $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

3) $A - B = A \cap \mathcal{C}B$

4) $\mathcal{C}(A \cup B) \doteq \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$ } **Leyes de Morgan**

5) $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$ }

6) $A \cup (\mathcal{C}A) = U$

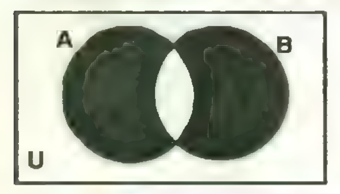
7) $A \cup \mathcal{C}_A = \Phi$ 8) $\mathcal{C}U = \Phi$ 9) $\mathcal{C}\Phi = U$

1.2.5 DIFERENCIA SIMÉTRICA:

Dado los conjuntos A y B se define la diferencia simétrica de A y B, que se denota por A Δ B, al conjunto:

$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$ o $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$

En el diagrama de Venn Euler, la diferencia simétrica de A y B es la parte sombreada de la siguiente figura.



Si "x" es un elemento que pertenece a A Δ B, entonces:

$A \,\Delta\, B = \{ x/(x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)\}$

Esto es; A Δ B es el conjunto caracterizado por la propiedad:

$x \in (A \,\Delta\, B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B\}$

Ejemplo: Sean los conjuntos: A = { 1; 2; 3; 4 } y B = { 2; 3; 5; 6 }, Hallar: A Δ B.

Resolución:

En primer lugar, hallamos: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ y $A \cap B = \{2; 3\}$

En segundo lugar, hallamos la diferencia simétrica de A y B.

$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cup B) = \{1; \underline{2}; \underline{3}; 4; 5; 6\} - \{\underline{2}; \underline{3}\} = \{1; 4; 5; 6\}$

$\therefore$ $A \,\Delta\, B = \{1; 4; 5; 6\}$

Propiedades de la Diferencia Simétrica:

1) $A \,\Delta\, \phi = A$ .....*(Propiedad del elemento neutro).*
2) $A \,\Delta\, A = \phi$
3) $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ ...... *(Propiedad conmutativa).*
4) $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$ ....*(Propiedad asociativa).*
5) $(A \,\Delta\, B) \cap C = (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)$ .....*(Propiedad distributiva).*

1.2.6 PARTICIÓN DE UN CONJUNTO:

*Se llama **partición de un conjunto** E a todo conjunto de partes o subconjuntos no vacíos disjuntos dos a dos y cuya reunión o unión es igual al conjunto E.*

Ejemplo 1 : Sea el conjunto: E = { 1; 2; 3; 4; 5; 6 } y los subconjuntos de E; A = { 1; 3 } ; B = { 2; 4; 5 } y C = { 6 }. ¿Es { A, B, C } una partición del conjunto E?

Resolución:

Debemos verificar si se cumplen las tres condiciones:

1) Se cumple que cada conjunto A, B y C son no vacíos, es decir:

$$A \neq \phi \; ; \; B \neq \phi \; ; \; C \neq \phi.$$

2) Son disjuntos dos a dos; puesto que: $A \cap B = \phi$; $A \cap C = \phi$; $B \cap C = \phi$.

3) La reunión o unión de los tres conjuntos es E, veamos:

$$A \cup B \cup C = \{ 1; 3 \} \cup \{ 2; 4; 5 \} \cup \{ 6 \} = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \} = E$$

∴ { A, B, C } Constituye una partición del conjunto E.

Recuerda que: *Dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen ningún elemento en común. Es decir, **todos** los elementos de un conjunto son diferentes a los elementos del otro conjunto.*

Ejemplo 2 : Sea el conjunto: H = { x/x son seres humanos} y los subconjuntos de H; N = { x/x es niño } ; J = { x/x es joven }; A = { x/x es adulto }. ¿Es { N, J, A } una partición del conjunto H?

Resolución:

Debemos verificar si se cumple las tres condiciones:

1) Los subconjuntos mencionados: N, J, A, (no son vacíos ya que por lo menos tienen un elemento).

2) Son disjuntos dos a dos, puesto que: $N \cap J = \phi$; $N \cap A = \phi$; $J \cap A = \phi$.

3) La reunión de los tres conjuntos es H.

$$N \cup J \cup A = \{ \text{niños} \} \cup \{ \text{jóvenes} \} \cup \{ \text{adultos} \} = H$$

∴ { N, J, A } Constituye una participación del conjunto H.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE CONJUNTOS

Ejercicio 1: Dados los conjuntos: A = { a; e; d } ; B = { e; f; g } y C = { l; e; j; k }. Hallar: $A \cup (B \cap C)$.

Resolución:

Hallamos primero: $B \cap C$ ➡ $B \cap C = \{ e \}$

Luego; calculemos: $A \cup (B \cap C)$.

$$A \cup (B \cap C) = \{ a; e; d \} \cup \{ e \} = \{ a; e; d \} = A$$

$$\therefore \quad A \cup (B \cap C) = A$$

Ejercicio 2 : Dados los conjuntos: A = { a; b; d; e } ; B = { b; c; d; r } y C = { a; b; e }. Hallar: (A - B)' con respecto a C.

Resolución:

En primer lugar, hallamos: (A – B)

$$(A - B) = \{ a; \underline{b}; \underline{d}; e \} - \{ \underline{b}; c; \underline{d}; r \} = \{ a; e \}$$

$$\therefore \quad (A - B) = \{ a; e \}$$

Luego, hallamos el complemento de (A - B); respecto al conjunto C.

$$(A - B)' = \quad \mathcal{C}_C \; (A - B) = C - (A - B) = \{ a; b; e \} - \{ a; e \}$$

$$\therefore \quad (A - B)' = \{ b \}$$

Ejercicio 3: Dados los conjuntos: A = { 5; 6; 7; 8 } ; B = { 6; 7; 1; 2 }, C = { 7; 5; 9; 4} y U = { 1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9 }

Calcular: **a)** $(A \cap B) \cup C$ **b)** $A \cap (B - C)$ **c)** $C - (A \cap B)'$

Resolución:

a) $(A \cap B) \cup C = \{ 6; 7 \} \cup \{ 7; 5; 9; 4 \} = \{ 4; 5; 6; 7; 9 \}$

$$\therefore \quad (A \cap B) \cup C = \{4; 5; 6; 7; 9 \}$$

Sabemos que:

B = { 6; 7; 1; 2 } y
C = { 7; 5; 9; 4 }
Luego: B - C = {1; 2; 6}

b) $A \cap (B - C) = \{5; 6; 7; 8\} \cap \{1; 2; 6\} = \{6\}$ $\therefore$ $A \cap (B - C) = \{6\}$

c) $C - (A \cap B)'$

Como sabemos que: $A \cap B = \{6; 7\}$ y $U = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Por definición de complemento, se tendrá:

$(A \cap B)' = \{1; 2; 4; 5; 8; 9\}$; Aplicando la definición de diferencia,

Tendremos: $C - (A \cap B)' = \{7; 5; 9; 4\} - \{1; 2; 4; 5; 8; 9\}$

$\therefore$ $C - (A \cap B)' = \{7\}$

Ejercicio 4: Dados los conjuntos:
A = { x/x es número natural divisor de 12 }
B = { x/x es número natural divisor de 18 }
C = { x/x es número natural divisor de 16 }

Calcular: **a)** $(A - B) \cap (B - C)$ **b)** $(A - B) \cup (B - C)$
c) Mostrar en un diagrama de Venn los conjuntos A, B y C.

Resolución:

En este problema el primer paso consiste en definir los conjuntos dados; por extensión:

Así, se tendrá: $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; $B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ y $C = \{1; 2; 4; 8; 16\}$

Luego, procederemos a calcular lo solicitado:

a) $A - B = \{4; 12\}$
$B - C = \{3; 6; 9; 18\}$

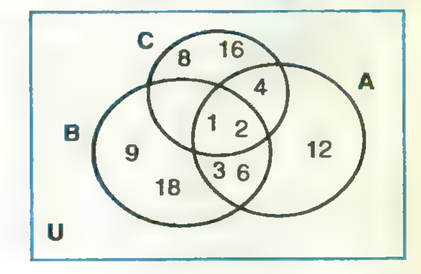
$\therefore$ $(A - B) \cap (B - C) = \phi$

b) $(A - B) \cup (B - C) =$

$\{4; 12\} \cup \{3; 6; 9; 18\} =$

$\{3; 4; 6; 9; 12; 18\}$

c) En un diagrama de Venn, se tendrá:



Ejercicio 5: Dados los conjuntos: $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{2; 3; 5; 7\}$
$C = \{1; 4; 6; 8\}$ y $U = \{x \in IN / x \leq 8\}$

Calcular: **a)** $A \cup B$; $A \cap B$; $(A \cup B) \cap C$ **b)** $(A - B)'$ respecto a U

c) $[C - (A \cup B)]'$ respecto a U.

Resolución:

a) $A \cup B = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 7 \}$; $A \cap B = \{ 2; 3 \}$; $(A \cup B) \cap C = \{ 1; 4 \}$

b) En primer lugar, hallamos: (A – B)

$A - B = \{ 1; 2; 3; 4 \} - \{ 2; 3; 5; 7 \} = \{ 1; 4 \}$ ➡ $A - B = \{ 1; 4 \}$

Luego, hallamos el complemento de (A - B), respecto al conjunto U.

$(A - B)' = \mathcal{C}_U (A - B) = U - (A - B) = \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \} - \{ 1; 4 \}$

$\therefore \quad (A - B)' = \{ 0; 2; 3; 5; 6; 7; 8 \}$

c) $[C - (A \cup B)]'$ respecto a U.

En primer lugar, hallamos : $[C - (A \cup B)]$

$[C - (A \cup B)] = \{ 1; 4; 6; 8 \} - \{ 1; 2; 3; 4; 5; 7 \} = \{ 6; 8 \}$

Luego, hallamos el complemento de $[C - (A \cup B)]$, respecto al conjunto U.

$[C - (A \cup B)]' = \mathcal{C}_U [C - (A \cup B)] = U - [C - (A \cup B)]$

$= \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \} - \{ 6; 8 \}$

$\therefore \quad [C - (A \cup B)]' = \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 7 \}$

Ejercicio 6 : En los diagramas de Venn que se adjuntan, sombrear:

a) $A' \cup B$

b) $A' - B'$

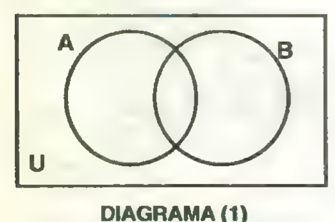


DIAGRAMA (1)

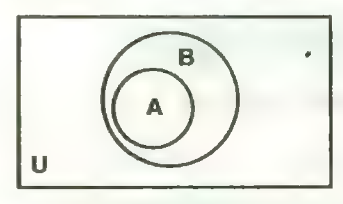
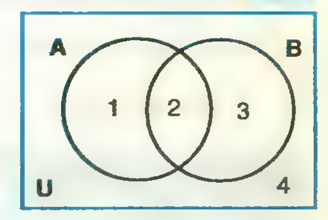


DIAGRAMA (2)

Recomendación:

Para sombrear regiones que corresponden a conjuntos, es conveniente númerar cada región establecida en el conjunto Universo (U). Luego guiándonos por esta numeración determinaremos la región que corresponde a un conjunto dado.

Resolución (a): En el diagrama (1):



1) Numeramos cada región en el diagrama dado, así:

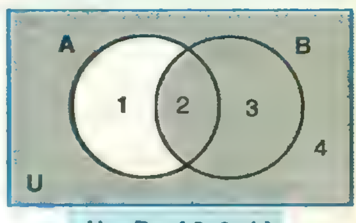
2) Del diagrama: A = { 1; 2 }, su complemento de A;

Será: A' = { 3; 4 }   Además: B = { 2; 3 }

3) Luego, calculamos:

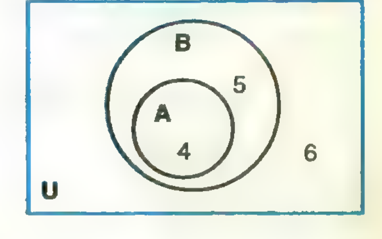
A' ∪ B = { 3; 4 } ∪ { 2; 3 } = { 2; 3; 4 }

El resultado, hallado nos indica las regiones que debemos sombrear veamos:



A' ∪ B = { 2; 3; 4 }

Resolución (a). En el diagrama (2).



1) Numeramos cada región en el diagrama dado, Así:

2) Del diagrama:

A = { 4 } , su complemento de A,

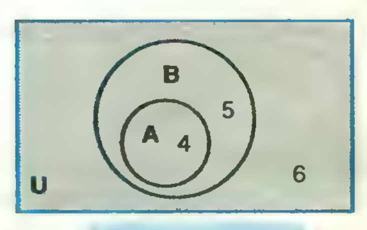
Será: A' = { 5; 6 }

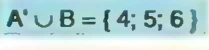
Además: B = { 4; 5 }

3) Luego, calculamos:

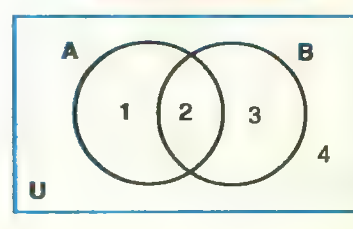
A' ∪ B = { 5; 6 } U { 4; 5 } = { 4; 5; 6 }

El resultado hallado nos indica las regiones que debemos sombrear, veamos:





Resolución (b): En el diagrama (1).



1) Numeramos cada región en el diagrama dado, así:

2) Del diagrama:

A = { 1; 2 } ; su complemento de A,

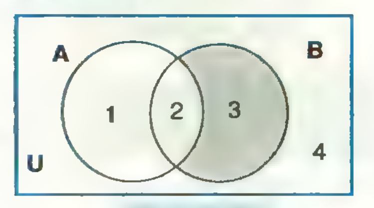
será : A' = { 3; 4 }

B = { 2; 3 } ; su complemento de B; será: B' = { 1; 4 }

3) Luego, calculamos:

A' - B' = { 3; 4 } - { 1; 4 } = { 3 }

El resultado hallado nos indica las regiones que debemos sombrear veamos:



A'- B' = { 3 }

Resolución ***(b): En el diagrama (2).***

1) Numeramos cada región en el diagrama dado, así:

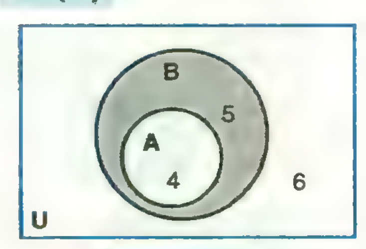
2) Del diagrama: A = { 4 } ; su complemento de A, será: A' = { 5; 6 }

B = { 4; 5 } ; Su complemento de B, será: B' = { 6 }

3) Luego, calculamos:

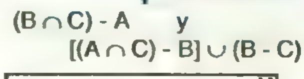
A' - B' = { 5; 6 } - { 6 } = { 5 }

El resultado, hallado nos indica las regiones que debemos sombrear. Veamos:



A' - B' = { 5 }

Ejercicio 7: En el diagrama (I), sombrear: (B ∩ C) - A y en el diagrama (II), sombrear: [(A ∩ C) - B] ∪ (B - C)



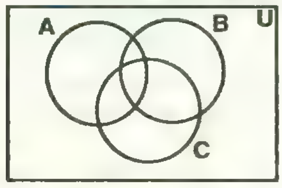


Diagrama I

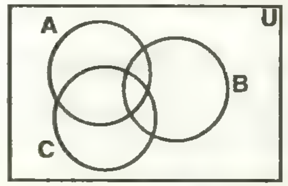
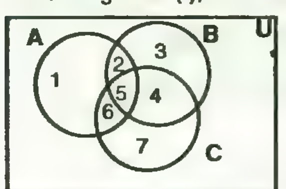


Diagrama II

Resolución:

- En el diagrama (I); numeramos cada una de las regiones.

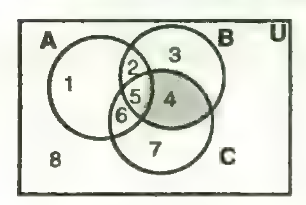


Del diagrama: $(B \cap C) = \{ 4; 5 \}$

$A = \{ 1; 2; 5; 6 \}$

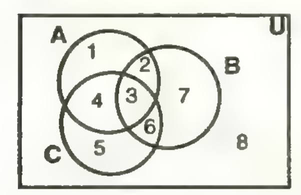
Donde: $(B \cap C) - A = \{ 4 \}$

Este resultado nos indica que debemos sombrear la región 4 ; veamos:



$(B \cap C) - A = \{ 4 \}$

En el diagrama (II), numeramos cada una de las regiones:



Del diagrama:

$[(A \cap C) - B] = \{ 3; 4 \} - \{ 2; 3; 6; 7 \} = \{ 4 \}$

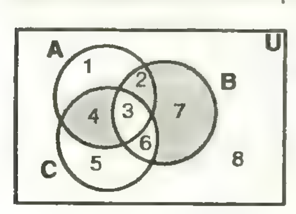
$(B - C) = \{ 2; 3; 6; 7 \} - \{ 3; 4; 5; 6 \} = \{ 2; 7 \}$

Donde:

$[(A \cap C) - B] \cup (B - C) = \{ 4 \} \cup \{ 2; 7 \}$

$[(A \cap C) - B] \cup (B - C) = \{ 2; 4; 7 \}$,

este resultado nos indica que debemos sombrear las regiones, 2; 4 y 7. Veamos:



$[(A \cap C) - B]$ U $(B - C) = \{ 2; 4; 7 \}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 1

Ejercicio 1 : Si: $A = \{x \in IN / x \leq 5 \vee x = 7\} \wedge B = \{(2x + 1) / x \in IN \wedge x \leq 3\}$

Hallar: **a)** $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$

Resolución:

Rpta. **a)** $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7\}$
b) $A \cap B = \{1; 3; 5; 7\}$
c) $A - B = \{0; 2; 4\}$

Ejercicio 2 : Si: $S = \{x \in IN / x^3 \leq 30\}$, $T = \{x^2 \in IN / x \leq 3\}$ y el universo $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 7; 9\}$; Hallar:

a) $(S \cap T)' - (S \cup T)'$
b) Hacer un diagrama de Venn-Euler

Resolución:

Rpta. **a)** $\{2; 3; 4; 9\}$

Ejercicio 3 : Si:
$P = \{x \in IN / x \text{ divisor de } 12\}$
$Q = \{x \in IN / x \text{ divisor de } 24\}$
$R = \{x \in IN / x \text{ divisor de } 36\}$
¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

I. $P \cap R = P \cap Q$ **II.** $P \cap Q = R$
III. $Q - R = P$ **IV.** $P \cup R = Q$
V. $P - Q = R$

Resolución:

Rpta. I

Ejercicio 4 : Sean los conjuntos:
$P = \{x / x \in IN; x \leq 8\}$; $Q = \{0; 2; 5\}$,
$R = \{1; 3; 4; 7\}$; $S = \{6\}$; $T = \{8\}$.
¿Es {Q, R, S, T} una partición de P?

Resolución:

Rpta. {Q, R, S, T} es una partición del conjunto P.

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE CONJUNTOS

NIVEL I

Ejercicio 1: Si:
$A = \{x^2 - 4 / x \in Z \wedge -4 < x < 6\}$. Hallar: n (A)

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Ejercicio 2: Se tienen 2 conjuntos A y B, tales que:
$A = \{ 2x - 1 / x \in IN \wedge x < 5 \}$
$B = \{ x^2 - 1 / x \in Z \wedge -2 \leq x < 3 \}$
Hallar: n (A - B)

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 3: Determinar por extensión el siguiente conjunto:

$$A = \{ 3x - 3 / x \in IN \wedge x < 4 \}$$

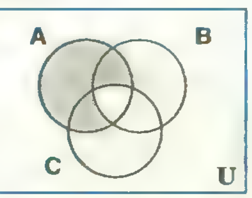
A) { 0; 1; 2; 3 } B) { 0; 3; 6 }
C) { - 3; 0; 3; 6 } D) { 1; 2; 3 }
E) No es posible

Ejercicio 4: Si: $A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$;
$B = \{4; 5; 6; 9; 10\} \wedge C = \{5; 6; 7; 8; 12; 13\}$
Hallar: $n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$

A) 5 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Ejercicio 5: Expresar mediante operaciones con conjuntos la parte sombreada de la siguiente figura:

A) $A \cup (B - C)'$
B) $A \cap (B \cup C)'$
C) $A \cap (B - C)'$
D) $A - (B \cap C)$
E) $A \cap C$



Ejercicio 6: Dados los Conjuntos:
U = { a; b; c; d; e; f }
A = { a; b; c; d; e; f }
B = { c; d; e; f } $\wedge$ C = { a; b }
Simplificar: $(A \cap B)' - (A \cup C)$

A) ϕ B) { c; d } C) { e, f }
D) { d; f } E) { e }

Ejercicio 7: Dados los conjuntos:
$A = \{ x \in IN / x$ es divisor de 12 $\}$
$B = \{ x \in IN / x$ es divisor de 18 $\}$
$C = \{ x \in IN / x$ es divisor de 16 $\}$
¿Cuántos elementos tienen los conjuntos $(A - B) \cap (B - C)$ y $(B - C) - (A - B)$?

A) 0 y 5 B) 5 y 0 C) 4 y 5
D) 0 y 4 E) 5 y 7

Ejercicio 8: Si: A = { 0; 3; 6; 9; ....; 72}
B = { 4; 8; 12;.......; 96 } $\wedge$
C = { 2; 4; 8;....; 256 }
Indicar el número de elementos de:

$$(A \cap B) \cup C$$

A) 8 B) 6 C) 12 D) 19 E) 14

Ejercicio 9: Si: A = { 2; 3; { 4; 5 } }
¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones?

I. $3 \in A$ II. $\{4; 5\} \in A$ III. $\{4; 5\} \subset A$

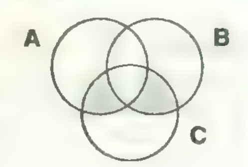
A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) I y III

Ejercicio 10: A y B son dos conjuntos, tales que: $n(A \cup B) = 30$; $n(A - B) = 12$; $n(B - A) = 10$.
Calcular: n(A) + n(B).

A) 15 B) 35 C) 28 D) 38 E) 18

Ejercicio 11 : La siguiente gráfica corresponde a la operación:

A) $(A \cap B) - C$
B) $A \Delta (B \cup C)$
C) $(A \cup B) \Delta C$
D) $(A \Delta B) \Delta C$
E) $(A \Delta B) \cap C$



Clave de Respuestas

1. C	2. C	3. C	4. B
5. D	6. A	7. D	8. E
9. D	10. D	11. E	

NIVEL II

Ejercicio 1 : Se tienen los conjuntos A y B del conjunto universal U.

Si: $n(U) = 40$; $n(A) = 25$; $n(B) = 20$ y $n(A \cup B)' = 10$. Hallar: $n(A \cap B)$

A) 15 B) 13 C) 11 D) 9 E) 7

Ejercicio 2 : Si: $U = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 18\}$

$A = \{ x^2 + 1/x \in \mathbb{N} \wedge x < 5 \}$
$B = \{ 3x + 1/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6 \}$

Hallar: $n[(A \cup B)']$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) más de 11

Ejercicio 3 : Si: $U = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 80\}$

$A = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 7 < x < 32 \}$
$B = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 14 < x < 54 \}$

Hallar: $n(A \Delta B)$

A) 7 B) 22 C) 29 D) 30 E) más de 30

Ejercicio 4 : Si:

$A = \{ x/x = a^2 + a - 1 ; a \in \mathbb{N} \wedge a < 5 \}$
$B = \{ x/x = a^3 - 2a; a \in \mathbb{N} \wedge a < 4 \}$
$C = \{ x/x = (a+1)^2, a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a < 6 \}$

Hallar la suma de elementos de:

$(B - C) \cup (A \cup B)$

A) 62 B) 63 C) 61 D) 60 E) 71

Ejercicio 5 : Si: $n(A) = 2n(B)$ y $n[Pot(A)] - n[Pot(B)] = 240$. Hallar: $n(A)$

A) 10 B) 8 C) 12 D) 6 E) 14

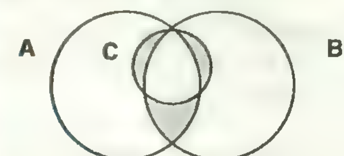
Ejercicio 6 : Sea:

$U = \{ x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \in [-5; 8] \}$
$A = \{ 3x - 2/x \in \mathbb{N} \wedge x < 4 \}$
$B = \{ 2x + 1/x \in \mathbb{Z} \wedge x \in \langle -4; 4 \rangle \}$

Calcular la suma de los elementos del complemento de la reunión de A y B.

A) 8 B) 10 C) 12 D) 20 E) 16

Ejercicio 7 : ¿Qué expresión corresponde a la región sombreada?

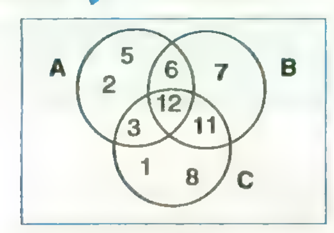


A) $[(A \cap B) - C] \cup [A \cap C]$
B) $[(A \cap B) - C] \cup [B \cap C]$
C) $(A \cap B) \Delta C$
D) $(C - B) \cup (C - A)$
E) $C - (A \cap B)$

Ejercicio 8 : Se tienen 3 conjuntos A; B y C; si se cumple que: $n(A) = 39$; $n(A \cap B) = 15$; $n[(A \cap C) - B] = 6 \wedge n[(B \Delta C) - A] = 17$. Indicar cuántos elementos pertenecen sólo a uno estos conjuntos.

A) 13 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 35 **E)** 41

Ejercicio 9 : Del gráfico:



I. $3 \in (A - B) \cap C$
II. $12 \in (A^c \cap B^c)^c \cap C$
III. $11 \in (A \cap B) - C$

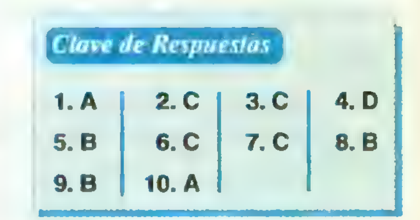
Son verdaderas

A) Sólo I y III **B)** Sólo I y II **C)** Sólo II
D) Sólo III **E)** I, II y III

Ejercicio 10 : Si: $U = \{x/x \in \mathbb{N} \; x < 15\}$
$A = \{2x - 1/x \in \mathbb{N} \wedge 0 < x < 7\}$
$B = \{x^2 + 1/x \in \mathbb{Z} \wedge -4 < x < 2\}$
$C = \{1; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$

Hallar: $n[(A - B) \cap C']$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** más de 5


Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. C	4. D
5. B	6. C	7. C	8. B
9. B	10. A		

1.3 PROPOSICIONES, PROPOSICIÓN Y CONJUNTO

1.3.1 ENUNCIADO Y PROPOSICIÓN:

- **Enunciado.-** Denominaremos así a toda frase u oración. **Ejemplos:**

  a) Piura es una ciudad del Perú.
  b) $2x - 3 = 9$
  c) ¿ Cuántos hermanos tienes ?
  d) Manuel es futbolista o pesista
  e) $4 + 7 = 11$
  f) ¡ Viva el Perú !

- ***Proposición:*** Es un enunciado cuya propiedad fundamental es la de ser verdadero **(V)** o falso **(F)**; pero no ambas simultáneamente.

  Una **proposición** se representa simbólicamente por letras minúsculas tales como: p, q, r, s, t , etc. (llamadas **variables proposicionales**). Cuando se trata de representar muchas proposiciones similares se usan subíndices para indicar cada una de ellas, esto es:

  $$p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots\ldots\ldots\ldots, p_n$$

  Si $p_{(x)}$, que se lee " p de x", es un polinomio en **x**, su valor numérico para $x = a$, se escribe $p_{(a)}$ y se lee "p de a". Por ejemplo, si el polinomio dado es $p_{(x)} = x^2 - 2x + 3$ y se toma $a = 3$, se obtiene : $p_{(a)} = a^2 - 2a + 3$; luego: $p_{(3)} = 3^2 - 2(3) + 3 = 6$; es decir: $p_{(a)} = 6$.

Ejemplos de proposiciones:

Proposición:	Valor de verdad
a) p : $3 + 5 > 2 + 3$	V
b) q : El número 450 es divisible por 4.	F
c) r : El ángulo recto mide 90°.	V
d) s : $15 - 8 = 9$	F

*Nota: A la veracidad o falsedad de una proposición se le denomina **valor veritativo** o **valor de verdad**.*

Observaciones:

1) *Aquellos enunciados que indican una pregunta, una orden o una exclamación, son expresiones **no proposicionales.***

Ejemplos: ***a)*** *¿ Qué es la geometría ?*
b) *Prohibido fumar*
c) *¡ Hola que tal !*

2) *Los enunciados que usan las palabras **"él"**, **"ella"** y los símbolos **x, y, z.** No tienen la propiedad de ser verdadero o falso, es decir, no son proposiciones. Sin embargo, si a una de estas palabras y símbolos se le asigna un determinado objeto o valor, llamado **constante**, el resultado es una proposición. A este tipo de enunciados se les denomina **enunciados abiertos.***

Ejemplos: ***a)*** *Él está estudiando ingeniería.*
b) $x + 4 > 9$

*Así en (a), si la variable se reemplaza por la constante Manuel tenemos "Manuel está estudiando ingeniería" ; que es una proposición cuyo valor de verdad **(V o F)**, depende de que si Manuel esté estudiando o no. De igual manera en **(b)**, si la variable **x** se reemplaza por un número mayor que 5 el enunciado se convierte en una proposición verdadera, o si el reemplazo se hace por un número menor que 5, la proposición resulta falsa.*

1.3.2 CONECTIVOS LÓGICOS U OPERADORES LÓGICOS:

Los términos **"y ", "O", "no"; "si .....entonces ....." y "Si y sólo si"**, se llaman **conectivos lógicos** porque sirven para **UNIR** dos o más proposiciones simples o compuestas.

- Los símbolos son: ∧ (y) ; ∨ (O) ; ~ (No) ; ⇒ (Si .....entonces .....) y ⇔ (Si y sólo si)

1.3.3 CLASES DE PROPOSICIONES:

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas.

I) **Proposición simple o atómica:** Una proposición es simple o atómica si en ella no existe conectivo lógico alguno.

Son proposiciones **simples** por ejemplo, las siguientes:

p : La puerta es de madera.................. **(V)**
q : - 6 Es un número natural .... **(F)**
r : $8 + 7 = 15$ .... **(V)**
s : El cuadrado tiene 5 lados .... **(F)**

II) **Proposición compuesta o molecular.-** Una proposición es compuesta o molecular si en su conformación existe al menos un conectivo lógico. Son proposiciones compuestas por ejemplo las siguientes:

a) "18 **y** 24 son múltiplos de 6"
b) Si: $3 \times 6 = 18$ **entonces** $6 \times 3 = 18$
c) La selección bien gana **o** pierde.
d) El pentágono es un polígono regular **si y sólo si** sus 5 lados tienen igual medida y sus ángulos también de igual medida.

Observación: *Si se tiene n proposiciones simples y llamamos A al número de filas que resultan de todos los arreglos posibles de las V y las F de estas proposiciones, entonces:* $A = 2^n$ *, Así se tiene:*

a) Una sóla proposición p:

p
V
F

- Aquí tenemos :

$2^1 = 2$ valores veritativos.

b) Para dos proposiciones p y q

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

- Aquí tenemos : $2^2 = 4$ valores veritativos para cada proposición.

c) Para tres proposiciones p; q y r

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

•Aquí tenemos:

$2^3 = 8$ valores veritativos para cada proposición.

1.3.4 OPERACIONES CON PROPOSICIONES:

Así como en aritmética y en álgebra se estudian operaciones entre números; en lógica se estudian operaciones entre proposiciones. La operación aritmética de suma de dos números 3 y 6, por ejemplo, hace corresponder a un nuevo número 9 que es su suma mediante la igualdad 3 + 6 = 9 ; es decir, escribir " 3 + 6 " significa lo mismo que escribir "9" . Vamos a proceder análogamente para definir las operaciones entre proposiciones.

- **La conjunción:** Dados dos proposiciones p, q se le simboliza "$p \wedge q$" y se lee: " p **y** q ". Ejemplo:

$$\underbrace{\text{Cuatro es menor que siete}}_{p}\ \underbrace{\text{y}}_{\wedge}\ \underbrace{\text{diez es mayor que seis.}}_{q}$$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- El valor de verdad para una conjunción formada por dos proposiciones simples establece que la conclusión será verdadera, sólo cuando las proposiciones componentes sean ambas verdaderas, en todos los demás casos será falsa **(F)**, siendo su tabla de verdad el que se muestra a la izquierda.

Los ejemplos siguientes muestran las cuatro posibilidades:

$6 + 3 > 5 \ \wedge\ 10 > 8$ .... **(V)**
$6 + 3 > 5 \ \wedge\ 8 > 10$ .... **(F)**
$6 > 7 \ \wedge\ 2 + 5 > 3$ .... **(F)**
$5 + 2 = 9 \ \wedge\ 8 - 3 = 11$ .... **(F)**

Nota: *Téngase en cuenta que las palabras castellanas "pero", "aunque", "sin embargo", "no obstante" también pueden servir para unir conjuntivamente dos proposiciones.*

Ejemplo 1: Determinar el valor de verdad de la proposición:

$p: 3+4=12$ y $q: 5+8>4+7$

Resolución:

La proposición; $p: 3+4=12$ es falsa (F)
y la proposición ; $q: 5+8>4+7$ es verdadera (V) ➡ ∴ $p \wedge q = F$

Ejemplo 2 : Determinar el valor de verdad de la proposición:
" 5 es un número par y no es menor que 8 ".

Resolución:

A simple vista, la conjunción es falsa; pues si:

p : 5 es un número par, es falso **(F)**
q : 5 no es menor que 8, es falso **(F)** ➡ ∴ $p \wedge q = F$

Ejemplo 3 : Determinar el valor de verdad de la proposición:

" 12 es múltiplo de 4 ; pero 5 no es mayor que 7 "

Resolución:

p : 12 es múltiplo de 4, es verdadero **(V)**
q : 5 no es mayor que 7, es verdadero **(V)** ➡ ∴ $p \wedge q = V$

- **La Disyunción Inclusiva:**

Consiste en, dados dos proposiciones p ; q, construir una tercera que se escribe " $p \vee q$" y se lee: " p **ó** q " que es verdadera si al menos una de ellas es verdadera. Si las dos proposiciones p ; q son falsas, la proposición " $p \vee q$ " también es falsa. La siguiente tabla corresponde a la **disyunción inclusiva:**

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Los siguientes ejemplos muestran las cuatro posibilidades.

$5+6=11 \vee 16-4=12$ .... (V)
$7+2=8 \vee 6+3=10$ .... (F)
$3>9 \vee 5>2$ .... (F)
$2+4<5 \vee 2<0$ .... (F)

Nota: En lo sucesivo la palabra "o" lo usaremos en su sentido inclusivo salvo indicación contraria.

- **La negación:** La negación de una proposición p se escribe " ~ p" y se lee "No p" ó "No es cierto que p" ó "es falso que p", y es otra proposición que niega que se cumple p.

Ejemplo: Si; p : Miguel es estudioso.

~ p : No es cierto que Miguel es estudioso.

La tabla de verdad de la negación es:

p	~ p
V	F
F	V

- Observamos que si "p" es verdadero, entonces ~p es falso, y viceversa. Es decir, el valor de la negación de un enunciado es siempre opuesto del valor de verdad del enunciado. Lo importante de la proposición negativa es que su valor depende de la verdad de la información.

- **La Implicación o Condicional:**

Dadas las proposiciones p, q, la implicación es una proposición compuesta que se escribe "$p \Rightarrow q$" y se lee "si p, entonces q", " p implica q", "p es suficiente para que q", "si p, tambien q", etc. y establece que la condición será falsa únicamente cuando el **antecedente** sea verdadero y el **consecuente** falso, en todos los demás será verdadero.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- En "**$p \Rightarrow q$**", a **p** se le llama **antecedente o hipótesis** y a **q** se le llama **consecuente o tesis.**

- **Proposiciones Equivalentes:**

Una equivalencia de las proposiciones **p** y **q** que se escribe "$p \leftrightarrow q$" y se lee: "p si, y sólo si q" es; por definición, la conjunción de una implicacion y su recíproca.

Luego: $p \leftrightarrow q : [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

- **Deducción de la Tabla de Verdad.-**

Utilizamos las tablas de verdad de la implicación y la conjunción

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Osea:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Luego, la proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera si p y q son verdaderos o si p y q son falsos.

- El siguiente cuadro es un resumen de las tablas de verdad de las proposiciones compuestas vistas hasta ahora:

p	q	p ∧ q	p ∨ q	~p	p → q	p ↔ q
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V

*Nota 1: Si se tienen "n" proposiciones y llamamos **A** al número de filas que resultan de todos los arreglos de las **V** y las **F** de estas proposiciones, entonces: $A = 2^n$. Así se tienen las proposiciones p, q, r, los arreglos son 2^3, osea 8. (ver tabla de la derecha).*

p	q	r	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Nota 2: Para efectuar la transferencia del lenguaje conjuntista al de las proposiciones, o viceversa es necesario recordar la siguiente tabla.

Conjuntos	U	∩	⊂	=	A'
Proposiciones	∨	∧	→	↔	~p

1.3.5 PRINCIPIOS LÓGICOS O TAUTOLOGÍAS - CONTRADICCIONES - CONTINGENCIAS

Los conectivos lógicos, así como se usan para unir proposiciones simples y formar proposiciones compuestas, también se usan para unir proposiciones compuestas y obtener esquemas lógicos más complejos en cuyo caso suele hacerse uso de los signos de colección (paréntesis, corchetes, llaves) con el fin de dar mayor o menor jerarquía a los conectivos.

En general el "~" es el conectivo de menor jerarquía, le siguen el "∧" y el " ∨ " que tienen la misma jerarquía, y luego el "→ " que es el de mayor jerarquía. Sin embargo, cada conectivo puede ser de mayor jerarquía, si así lo indica el signo de colección.

Dada una proposición compuesta, los valores de verdad de esta proposición son los que corresponden a los valores de verdad del conectivo de mayor jerarquía presente en la proposición. Si los valores de verdad de la proposición son:

- Todos **verdadero,** la proposición se llama **tautología**
- Todos **falso,** la proposición se llama **contradicción.**
- Unos **V** y otros **F**, la proposición se llama **contingencia.**

Ejemplo 1 : Halla la tabla de verdad de la proposición: $[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$

Resolución:

p	q	$[(p \vee q)$	$\wedge$	$\sim q]$	$\rightarrow$	p
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	V	V	F
		1	3	2	5	4

Explicación:

Para obtener la tabla de verdad de la proposición se ha seguido los siguientes pasos.

1. Se aplicó la tabla de disyunción en los arreglos de $p \vee q$.
2. Se aplicó la tabla de la negación a los valores de q.
3. Se aplicó la tabla de la conjunción a las columnas 1 y 2.
4. Se copió los valores de verdad de p.
5. Se aplicó la tabla de verdad de la implicación en las columnas 3 y 4. Siendo en esta proposición la implicación el conectivo de mayor jerarquia y habiendo resultado sus valores de verdad todos V, la proposición es una **tautología.**

Ejemplo 2 : Halle la tabla de verdad de la proposición: $\sim[(p \vee p) \leftrightarrow p]$

Resolución:

Como se observa en la proposición, el conectivo de mayor jerarquía es la negación.

p	$\sim$	$[(p$	$\vee$	$p)$	$\leftrightarrow$	$p]$
V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	F
	6	1	3	2	5	4

$\therefore$ La proposición en cuestión, es una **contradicción.**

Ejemplo 3 : Halle la tabla de verdad de la proposición: $\sim[(p \wedge q) \wedge \sim r]$

Resolución:

También en este caso el conectivo de mayor jerarquía es la negación (aquella que está fuera del corchete).

p	q	r	~	[(p ∧ q)	∧	~r]
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	F	V

∴ La proposición es una **contingencia.**

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE PROPOSICIONES

Ejercicio 1 : Analizar los siguientes enunciados:

a) $4 + 8 = 12$

b) ¿ Eres estudiante de química ?

c) $8 < 5$

d) ¡ Arriba Alianza !

e) $x + 3 = 11$

f) x es abogado

g) $8 - 3 \neq 5$

h) Manuel es ingeniero o Manuel es matemático.

i) $x + y \leq 6$

j) Ponga atención.

Determinar:
- I) Cuáles son proposiciones.
- II) Cuáles son enunciados abiertos.
- III) Cuáles no son ni proposiciones ni enunciados abiertos.
- IV) El valor de verdad de las proposiciones.

Resolución:

I) Son proposiciones los enunciados: (a); (c); (g) y (h).
II) Son enunciados abiertos: (e); (f) y (i).
III) No son ni proposiciones ni enunciados abiertos : (b); (d) y (j).
IV) El valor de verdad de las proposiciones es:

a) **V**
c) **F**
g) **F**
h) Como es una proposición compuesta, su valor de verdad depende del valor de verdad de sus proposiciones simples.

Ejercicio 2: Si: p = "José es médico", q = "José es dentista" y r = "Fidel es ingeniero".

I) Escribir cada una de las siguientes proposiciones en forma simbólica.

a) José es médico y Fidel es ingeniero.
b) Si José es médico o Fidel es ingeniero, entonces José es dentista.
c) José no es médico; pero Fidel no es ingeniero.
d) Si Fidel es ingeniero y José no es dentista, entonces José es médico.

II) Escribir en forma de oración el significado de las siguientes proposiciones.

a) $p \wedge \sim q$ b) $(\sim p \vee q) \rightarrow r$ c) $p \leftrightarrow \sim q$ d) $r \rightarrow (p \vee q)$

Resolución:

I) a) José es médico y Fidel es ingeniero.
$p \wedge r$

b) Si José es médico o Fidel es ingeniero, entonces José es dentista.
$(p \vee r) \rightarrow q$

c) José no es médico, pero Fidel no es ingeniero.
$\sim p \wedge \sim r$

d) Si Fidel es ingeniero y José no es dentista; entonces José es médico.
$(r \wedge \sim q) \rightarrow p$

II) a) $p \wedge \sim q$ = José es médico y no es dentista.

b) $(\sim p \vee q) \rightarrow r$ = Si José no es médico o es dentista, entonces Fidel es ingeniero.

c) $p \leftrightarrow \sim q$ = José es médico si, y sólo si no es dentista.

d) $r \rightarrow (p \vee q)$ = Si Fidel es ingeniero, entonces José es médico o es dentista.

Ejercicio 3: Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a)	3 + 5 = 8 y 7 - 3 = 4	e)	Si: 6 + 3 = 9 ; entonces: 7 + 3 = 10
b)	3 + 5 = 8 y 7 - 3 = 2	f)	Si: 5 + 6 = 11 ; entonces: 7 + 2 = 6
c)	3 + 5 = 8 ó 7 - 3 = 2	g)	Si: 4 + 3 = 1 ; entonces: 8 + 8 = 16
d)	3 + 5 = 6 ó 7 - 3 = 2	h)	Si: 7 + 3 = 6 ; entonces: 9 - 4 = 2

Resolución:

a) Es **V**; porque es una conjunción cuyas dos proposiciones simples son verdaderas.
b) Es **F**; puesto que es una conjunción con una proposición simple falsa.
c) Es **V**; porque es disyunción con una proposición simple verdadera.
d) Es **F**; porque es disyunción, con dos proposiciones simples falsas.
e) Es **V**; por ser implicación con las dos proposiciones simples verdaderas.
f) Es **F**; porque una verdad no puede implicar una falsedad de acuerdo a la implicación.
g) Es **V**; por ser F y V respectivamente las proposiciones simples y tratarse de implicación.
h) Es **V**; pues las proposiciones que intervienen en la implicación son falsa y falsa.

Ejercicio 4 : Demostrar, mediante tablas de verdad, cuáles de las siguientes proposiciones son tautológicas; cuales son contradicciones y cuales son contingencias.

a) $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
b) $\sim (p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim p)$
c) $(p \vee \sim p) \leftrightarrow p$
d) $[\sim p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee r) \wedge q]$
e) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Resolución:

a) Por ser el primer ejercicio de este tipo se ha señalado el orden de los pasos seguidos en la obtención de la tabla de verdad.

p	q	(p	∧	~q)	→	(~p	v	~q)
V	V	V	F	F	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V	V	V
		1	3	2	7	4	6	5

∴ La proposición es una **tautología.**

b)

p	q	~	(p	→	~q)	↔	(q	→	~p)
V	V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F	V	V

∴ La proposición es una **contradicción.**

c)

p	(p	v	~ p)	↔	p
V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F

∴ La proposición es una **contingencia.**

d)

p	q	r	[~ p	∧	(q v r)	↔	(p v r)	∧	q]
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	V	F	F	F
			①	③	②	⑦	④	⑥	⑤

∴ La proposición es una **contingencia.**

e)

p	q	r	[(p → q)	∧	(q → r)]	→	(p → r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

∴ La proposición es una **Tautología.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 2

Ejercicio 1 : De los enunciados siguientes sólo uno de ellos es proposición lógica. señale cuál es:

A) Lógre verlo ayer en su casa
B) Aquél profesor enseña biología
C) La caperucita roja habló con su abuelita
D) Ningún enunciado abierto emplea variables.

Rpta.

Ejercicio 3 : Sean p: "Él es alto" y q: "Él es galan". Escribir el siguiente enunciado en forma simbólica con p y q: "Él es alto, o él es bajo y galán".

A) $\sim(\sim p \vee q)$ **B)** $p \wedge \sim q$
C) $\sim(\sim p \vee \sim q)$ **D)** $p \vee (\sim p \wedge q)$

Rpta.

Ejercicio 2 : Sea p: "hace frío" y q: "Está lloviendo". Describir con un enunciado verbal la siguiente oración:

$$p \Leftrightarrow \sim q$$

A) Hace frío si y sólo si no está lloviendo
B) Si hace frío, entonces no está lloviendo
C) Está lloviendo si, y sólo si hace frío
D) Si hace frío y no está lloviendo, entonces hace frío

Rpta.

Ejercicio 4 : La operación que corresponde a la siguiente tabla de verdad.

p	q	?
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Es:

A) $p \Rightarrow q$
B) $p \vee q$
C) $\sim p \wedge q$
D) $p \Leftrightarrow q$

Rpta.

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE PROPOSICIONES

NIVEL I

Ejercicio 1 : Determine cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones:

a) $4 + 6 = 13 - 3$
b) Los hombres no pueden vivir sin oxígeno.
c) $x + 6 = 12$
d) $2 \times 5 = 10 + 2$ y $7 - 3 \neq 8 \times 2$
e) Nosotros estudiamos en el colegio.
f) ¿El silencio es fundamental para estudiar?

Ejercicio 2 : Determine cuáles de los siguientes enunciados son enunciados abiertos.

a) $16 < 12$
b) X es ingeniero y Juan es matemático.
c) $7x + 4 > 11$
d) $x + y + z \neq 3$
e) X es hermano de y.
f) Universitario sobresalió en fútbol en 1993.

Ejercicio 3 : En los enunciados de la pregunta 2. ¿Cuántas proposiciones hay?

A) 4 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

Ejercicio 4 : Si p: "Mario es bueno" y q: "Mario es alto"; la representación simbólica de la proposición compuesta "No es verdad que Mario no es bueno o que no es alto" es:

A) $\sim(p \vee q)$ B) $\sim p \vee \sim q$ C) $p \vee \sim q$
D) $\sim(\sim p \vee \sim q)$ E) Ninguna anterior.

Ejercicio 5 : Si p: "Yo tengo un auto" y q: "Yo tengo una casa", cuál es la interpretación literal del enunciado simbólico.

$$\sim[\sim p \vee \sim(\sim q)] \wedge \sim(\sim p)$$

A) Yo tengo un auto y una casa.
B) Yo tengo un auto o una casa.
C) No es verdad que no tengo un auto o tengo una casa y tengo un auto.
D) No tengo ni un auto ni una casa.
E) Tengo una casa, pero no un auto.

Ejercicio 6 : Demostrar cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías, cuáles son contradicciones y cuáles son contingencias:

A) $\sim(\sim p) \leftrightarrow \sim[\sim(\sim p)]$
B) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \rightarrow p)$
C) $(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow \sim(p \wedge r) \wedge \sim(q \wedge r)$
D) $[(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow s)]$

Ejercicio 7 : Halla el valor de verdad de cada proposición siguiente:

A) Si $4 < 6$, entonces $4^2 < 36$ .....( )

B) Si $3^3 + 5 = 32$, entonces la raíz cuadrada de 625 es 25 .....( )

C) $|16| = 16$; Si y sólo si $|-8| = -8$ ..( )

D) 125 es divisible por 25 si y sólo si 7 es divisor de 84 .....( )

E) 13 es divisor de 156 si y sólo si 91 es número primo. .....( )

1. Son proposiciones verdaderas: (a), (b)
   Son proposiciones falsas: (d) y (e).
2. Son enunciados abiertos: (b), (c), (d), (e).
3. Hay 2 proposiciones que son: (a) y (f).
4. d
5. c
6. **a)** Contradicción
   b) Contingencia
   c) Contradicción
   d) Tautología.
7. **a)** v **b)** v
   c) F **d)** v
   e) F

1.3.6 CIRCUITOS LÓGICOS:

Un circuito lógico es un conjunto de símbolos y operaciones que satisfacen las reglas de la lógica, simulando el comportamiento real de un circuito eléctrico.

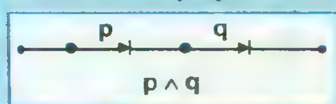
- **Circuitos en Serie:** Dos interruptores se encuentran conectados en serie, cuando lo están uno tras otro (En una misma línea).

  Sean los interruptores o llaves de luz p y q; su conexión en serie estará dado por:

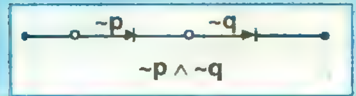
p q

En este circuito pasará corriente sólo en el caso en que p y q se encuentran cerrados, en cualquier otro caso no hay paso de corriente. De aquí tenemos el comportamiento de la **conjunción** de las proposiciones p y q. Por tanto:

i). $p \wedge q$: ***Representa un circuito cerrado en serie, que deja pasar corriente si los interruptores o llaves de luz están cerrados a la vez. Diremos que sólo en este estado $p \wedge q$ es verdadero.***



ii) $\sim p \wedge \sim q$: ***Representa un circuito abierto en serie que no deja pasar corriente. Diremos entonces que en este estado $\sim p \wedge \sim q$ es falsa.***



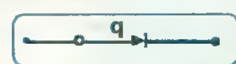
Representación de un interruptor

mediante una proposición p.

Interruptor cerrado:

- *El interruptor o llave de luz está cerrado (pasa corriente), si la proposición "p" es verdadera.*

Interruptor abierto:



- *El interruptor o llave de luz está abierto (no pasa corriente), si la proposición "p" es falsa.*

Conjunción:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p ∧ q
p ∧ ~q
~p ∧ q
~p ∧ ~q

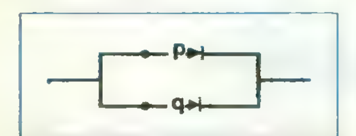
Circuito en serie:

— p — q —●	**Se enciende la lámpara.**
— p —/ q —o	**No se enciende la lámpara.**
—/ p — q —o	**No se enciende la lámpara.**
—/ p —/ q —o	**No se enciende la lámpara.**

Como se muestra en el cuadro, el circuito estará cerrado o pasará corriente sólo cuando los interruptores esten cerrados y el circuito está abierto si uno de los inerruptores está abierto.

- **Circuitos en Paralelo:**

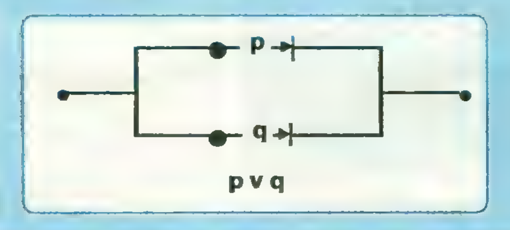
Dos interruptores p y q se encuentran conectados en paralelo, cuando tengan una disposición, como se muestra en la figura:



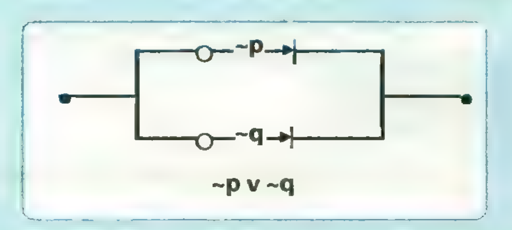
Se observa en el circuito que hay paso de corriente cuando uno de los interruptores o ambos están cerrados:

No hay paso de corriente cuando los dos interruptores están abiertos. Tenemos entonces, el comportamiento de la disyunción de las proposiciones p y q. La falsedad de p v q, es decir, el hecho de que no pase corriente, sólo se verifica en el caso de la falsedad simultánea de p v q. Por tanto.

i). **p v q :** Representa un circuito cerrado en paralelo que deja pasar corriente si por lo menos uno de los interruptores eléctricos está cerrado.
Diremos que sólo en este estado **p v q** es verdadero.



ii). **~p v ~q :** Representa un circuito abierto en paralelo que no deja pasar corriente, por lo que en este estado **~p v ~q** es falso.



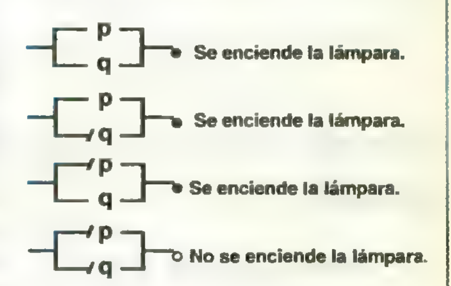
Estas representaciones nos permite diseñar o simbolizar redes de circuitos eléctricos conectados en serie y en paralelo, o también simplificar circuitos muy complicados haciendo uso de las ya conocidas equivalencias notables.

Disyunción:

p	q	p v q	
V	V	V	p v q
V	F	V	p v ~q
F	V	V	~p v q
F	F	F	~p v ~q

Como se muestra en el cuadro el circuito estará cerrado cuando uno o ambos interruptores estén cerrados y el circuito estará abierto cuando los dos interruptores estén abiertos.

Circuitos en Paralelo:



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE CIRCUITOS LÓGICOS

Ejercicio 1 : Diseñar el circuito lógico de la siguiente proposición: $(p \vee q) \wedge r$

Resolución:

Vemos que $(p \vee q) \wedge r$ es la conjunción de $p \vee q$ y r, que deben estar conectados en serie:

•——— p v q ——— r ———• .... (1)

Pero; $p \vee q$ se representa por: (p en paralelo con q) .... (2)

Luego, sustituyendo (2) en (1); tendremos la representación pedida, esto es:

(p en paralelo con q) — r ——• ➡ $(p \vee q) \wedge r$

Ejercicio 2 : Diseñar el circuito lógico de la siguiente proposición: $\sim p \vee (\sim q \wedge r)$

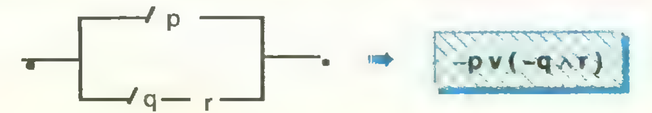
Resolución:

$\sim p \vee (\sim q \wedge r)$ ➡ (~p en paralelo con $\sim q \wedge r$) .... (1)

Recuerda que: $\sim x \vee y$ ➡ (~x en paralelo con y)

Pero; $\sim q \wedge r$ se representa por: ——/ q —— r ——o .... (2)

Luego, sustituyendo (2) en (1), tendremos la representación pedida, esto es:

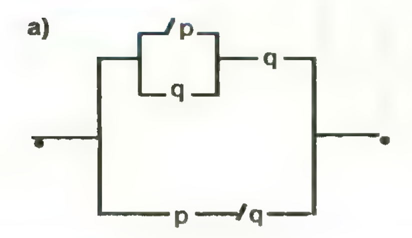


Ejercicio 3: Diseñar los circuitos lógicos de las siguientes proposiciones:

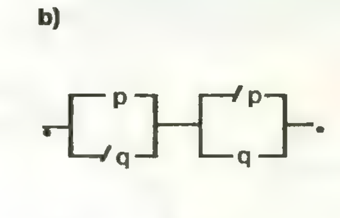
a) [(~p v q) ∧ q] v (p ∧ ~q) **b)** (p v ~q) ∧ (~p v q)

Resolución:

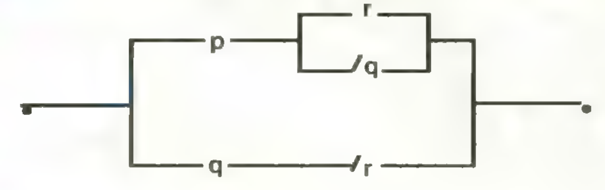
a)



b)



Ejercicio 4: Halla su expresión lógica correspondiente al circuito siguiente:



Resolución:

Los pasos para simbolizar el circuito son:

1) Están conectados en paralelo; se simboliza: **(r v ~q)**

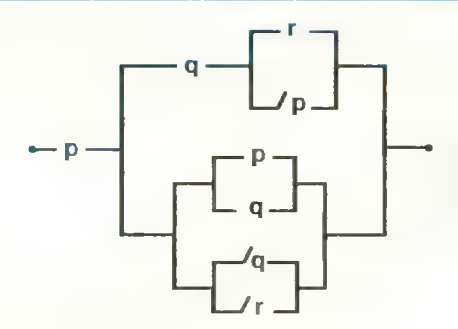
2) Están conectados en serie; se simboliza: **p ∧ (r v ~q)**

3) Están conectados en serie; se simboliza: **(q ∧ ~r)**

4) **p ∧ (r v ~q) y (q ∧~r)** Están conectados en paralelo; se simboliza:

[p ∧ (r v ~q)] v (q ∧~r) ***Rpta.***

Ejercicio 5: Halla la expresión lógica correspondiente al circuito siguiente:



Resolución:

p — q — (r v ~p) ; p — (p v q) ; (~q v ~r)

q ∧ (r v ~p)

p

(p v q) v (~q v ~r)

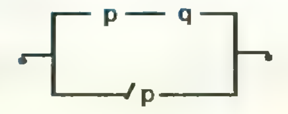
= •— p —[q ∧ (r v ~p)] v [(p v q) v (~q v ~r)] —•

- Como se observará este último circuito está conectado en serie, que se simboliza así:

p ∧ { [q ∧ (r v ~p)] v [(p v q) v (~q v ~r)] } *Rpta.*

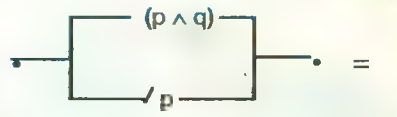
Ejercicio 6: En el siguiente circuito lógico:

I. Determine la expresión lógica.
II. Las posibilidades de funcionamiento del circuito, es decir cuando el circuito está cerrado y cuando el circuito está abierto.



Resolución:

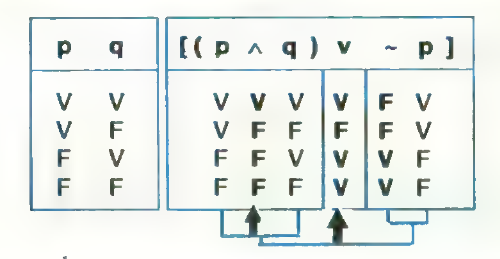
I. Su expresión lógica del circuito es:



Como se observará este último circuito está conectado en paralelo; que se simboliza así:

$$[(p \wedge q) \vee \sim p]$$

II. Construimos una tabla para saber el funcionamiento del circuito.



p	q	[(p	∧	q)	v	~	p]
V	V	V	V	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V	F

La corriente no pasará cuando p esté cerrado y q esté abierto; en los demás casos si pasará corriente.

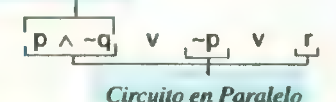
TALLER DE EJERCICIOS Nº 3

Ejercicio 1 : Diseñar el circuito lógico de la siguente proposición:

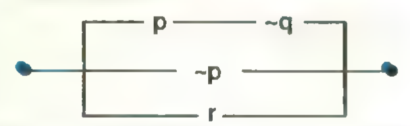
$$(p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee r$$

Resolución:

. **Analizamos la expresión:**



Diagramamos:

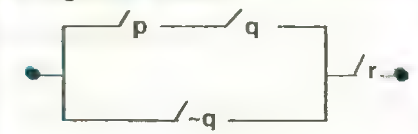


Ejercicio 2 : Diseñar el circuito lógico de la siguiente proposición:

$$p \wedge (q \vee \sim r) \wedge (r \vee \sim q)$$

Resolución:

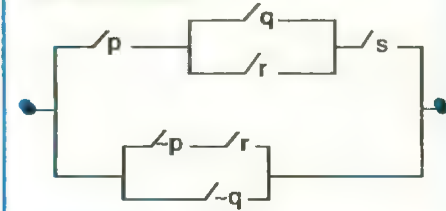
Ejercicio 3 : La expresión simbólica del siguiente circuito



Es:

A) $(p \wedge q \wedge r) \vee \sim p$ **B)** $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$
C) $(\sim p \wedge r) \vee p \vee q$ **D)** N.A.

Ejercicio 4 : Dado el siguiente circuito lógico, escribe la expresión simbólica correspondiente.



Resolución:

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE CIRCUITOS

NIVEL I

Ejercicio 1: Diseñar el circuito lógico de cada una de las siguientes proposiciones:

a) $p \wedge (q \vee \sim r)$

b) $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

c) $[(\sim p \vee q) \wedge q] \vee (p \wedge \sim q)$

d) $r \vee q \vee [(\sim p \wedge \sim r) \vee q]$

e) $(q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q)$

f) $[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge p$

g) $p \wedge [(q \wedge \sim r) \vee q]$

h) $\{p \wedge [(q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q)]\} \vee q$

i) $[(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)] \wedge r$

j) $\{[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge (q \wedge r)\} \vee p$

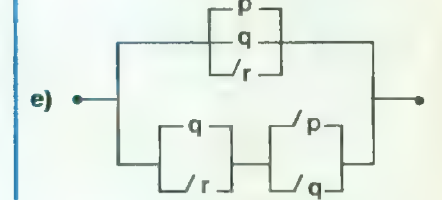
Ejercicio 2: Halla la expresión lógica correspondiente a cada uno de los siguientes circuitos lógicos.

a) p, q / q — p

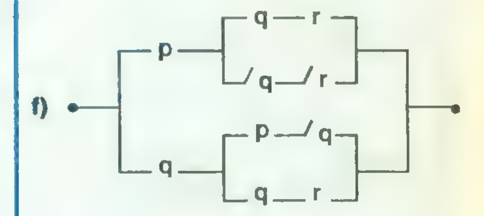
b) q — /r, /p — r

c) p — /q, /r, q

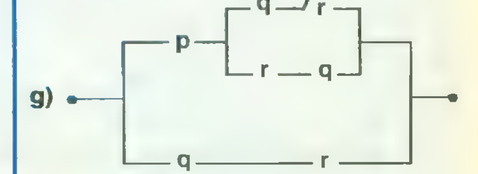
d)



e)



f)



g) p — q — /r, r — q; q — r

Ejercicio 3: En los siguientes circuitos lógicos:

I. Determine la expresión lógica.

II. Sus posibilidades de funcionamiento del circuito, es decir cuando el circuito está cerrado y cuando el circuito está abierto.

a)

b)

Clave de Respuestas

1.

a)

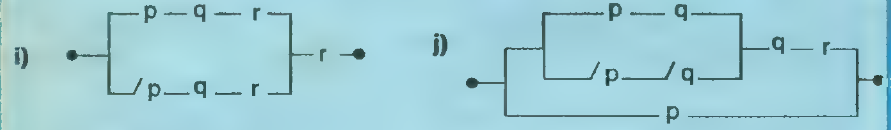
b)

c)

d)

e)

f)



i)

j)

2.

a) $(p \vee q) \wedge \sim q \wedge p$

b) $q \wedge (\sim r \vee \sim p) \wedge r$

c) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee q)$

d) $(q \vee r) \wedge [(p \vee q) \vee (\sim r \vee \sim s)] \wedge (q \vee s)$

e) $(p \vee q \vee \sim r) \vee [(q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$

f) $\{p \wedge [(q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)]\} \vee \{q \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)]\}$

g) $\{p \wedge [(q \wedge \sim r) \vee (r \wedge q)]\} \vee (q \wedge r)$

3.

a) La corriente pasará cuando **p** esté abierto y **q** esté cerrado; en los demás casos no pasará corriente.

b) La corriente pasará cuando **p** este cerrado y **q** esté abierto o **p** esté abierto y **q** esté cerrado, en los demás casos no pasará corriente.

1.3.7 DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICA

El método axiomático o de fundamentación de la ciencia matemática consiste en fijar conceptos primitivos (o no definidos) y proposiciones sobre estos conceptos llamados **Axiomas** (o postulados) cuya verdad se acepta convenientemente sin demostración y luego, efectuar derivaciones matemáticas.

Las derivaciones matemáticas abarcan la formulación de conceptos definidos y la inferencia o deducción de proposiciones matemáticas llamados teoremas, cuya verdad o falsedad tiene que demostrarse.

- **Axioma.-** Un axioma o postulado es una proposición que de hecho se admite como verdad y a partir de ella, siguiendo razonamientos lógicos, se deducen otras proposiciones.

  Ejemplo: "El todo es igual a la suma de sus partes"

- **Teorema.-** Un teorema es una proposición cuyo valor se acepta previa demostración.

  En todo teorema se distingue dos partes: **a) La hipótesis y**
  b) La tesis o conclusión.

  Ejemplo: "La suma de los ángulos internos de un Triángulo es 180°"

  Donde:

  Hipotesis: Sean: A, B y C las medidas de cada ángulo interno de un triángulo.

  Tesis: $A + B + C = 180°$

- **Corolario:** Un corolario es una proposición que surge como consecuencia de un teorema demostrado.

  Ejemplo: Un corolario del teorema anterior es: "La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90°.

- **Demostración:** Demostrar un teorema es determinar el valor de verdad de una proposición, mediante un proceso de razonamiento correcto. El proceso empieza utilizando la hipótesis y continúa aplicando propiedades conocidas, definiciones, axiomas, teoremas demostrados, etc. Hasta llegar a comprobar la tesis.

  La demostración puede ser directa, o puede ser indirecta.

- **Demostración directa:** De acuerdo a la tabla de verdad de la implicación, si **p** es falso, la proposición $p \to q$ es válida, y no habría nada que demostrar. Luego interesa el caso de antecedente verdadero.

  A partir de la verdad de **p**, deducir la verdad de **q**, es hacer una demostración directa de la condicional $p \to q$ y consiste en una lista p_1; p_2 ; p_3; ....; p_n de proposiciones tales que p_n coincide con q y para cada i = 1, 2, 3, ...n; p_1 es

evidentemente válida, o coincide con la hipótesis; o es consecuencia inmediata de una o varias de las proposiciones que le proceden en la lista.

En una demostración directa, cada paso debe ir acompañado de su respectiva razón.

Ejemplo de demostración directa:

Teorema: Si un número real **a** es mayor que un número real **b**, entonces : b - a es un número negativo.

Hipótesis: Sean los números reales **a** y **b** tales que: **a > b**

Tésis: $b - a < 0$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1) $a > b$	*1) Hipótesis*
2) $-a < -b$	*2) Al multiplicar - 1, ambos miembros cambia el sentido de la desigualdad.*
3) $-a + b < -b + b$	*3) Por propiedad de la desigualdad en la adición.*
4) $b - a < b - b$	*4) Por propiedad commutativa de la adición.*
5) $\therefore$ $b - a < 0$	*5) Por propiedad del inverso aditivo (En el 2º miembro)*

- **Demostración indirecta:** Toda demostración indirecta, llamada también por el absurdo, tiene dos formas: la primera establece que; una proposición que implica su propia falsedad, es falsa. Osea: $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

La segunda sostiene que una proposición cuya falsedad implica su verdad es verdadera. Osea: $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$

Ejemplo: Demostrar que: $6 \neq 2$

Demostración: Sea: **p** : $6 \neq 2$

Lo que se desea demostrar es que **p** es verdadera.

En efecto: **1)** Supongamos que **6 = 2**; o sea que ~ **p**.

2) 6 - 2 Es cero [por **1)**]..............**q**

3) Pero: 6 - 2 = 4; Osea no es cero .... ~q

4) Luego por 2) y 3) : $q \wedge \sim q$

5) $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$ [de **1)** y **4)**]

6) La ley del absurdo sostiene que: $[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p$

7) De **5)** y **6)** se tiene que p es verdadera. **L.q.q.d.**

1.4 SUCESIONES

Sean $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los números Enteros Positivos y f una función de $\mathbb{Z}^+$ en $\mathbb{R}$ (Números Reales), definida por f (n) = 2n - 1, tenemos:

$$\mathbb{Z}^+ = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; .... \}$$

Luego:
Para: $n = 1 \Rightarrow f_{(n)} = 2n - 1 \Rightarrow f_{(1)} = 2(1) - 1 = 1$
Para: $n = 2 \Rightarrow f_{(n)} = 2n - 1 \Rightarrow f_{(2)} = 2(2) - 1 = 3$
Para: $n = 3 \Rightarrow f_{(n)} = 2n - 1 \Rightarrow f_{(3)} = 2(3) - 1 = 5$
Para: $n = 4 \Rightarrow f_{(n)} = 2n - 1 \Rightarrow f_{(4)} = 2(4) - 1 = 7$
Para: $n = 5 \Rightarrow f_{(n)} = 2n - 1 \Rightarrow f_{(5)} = 2(5) - 1 = 9$
Para: $n = 6 \Rightarrow f_{(n)} = 2n - 1 \Rightarrow f_{(6)} = 2(6) - 1 = 11$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

De donde: $\mathbb{Z}^+ = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; .... \}$
$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$
$\mathbb{R}_f = \{ 1; 3; 5; 7; 9; 11; .... \}$; $\mathbb{R}_f$ = Rango de la función f.

$\therefore$ $f = \{ (1;1) ; (2;3) ; (3;5) ; (4;7) ; (5;9) ; (6;11); .... \}$

A esta función "f" se llama Sucesión, donde los elementos del rango: 1; 3; 5; 7; 9; 11;......... , se llaman términos de la sucesión y son imágenes de: 1; 2; 3; 4; 5; 6;...... respectivamente.

AnÁlogamente, dados $\mathbb{Z}^+$ y $f_{(n)} = \dfrac{1}{n+2}$, tenemos:

$$\mathbb{Z}^+ = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; .... \}$$

Luego:
Para: $n = 1 \Rightarrow f_{(n)} = \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow f_{(1)} = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$
Para: $n = 2 \Rightarrow f_{(n)} = \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow f_{(2)} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$
Para: $n = 3 \Rightarrow f_{(n)} = \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow f_{(3)} = \dfrac{1}{3+2} = \dfrac{1}{5}$
Para: $n = 4 \Rightarrow f_{(n)} = \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow f_{(4)} = \dfrac{1}{4+2} = \dfrac{1}{6}$

Para: $n = 5 \quad \Rightarrow \quad f_{(n)} = \dfrac{1}{n+2} \quad \Rightarrow \quad f_{(5)} = \dfrac{1}{5+2} = \dfrac{1}{7}$

Para: $n = 6 \quad \Rightarrow \quad f_{(n)} = \dfrac{1}{n+2} \quad \Rightarrow \quad f_{(6)} = \dfrac{1}{6+2} = \dfrac{1}{8}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

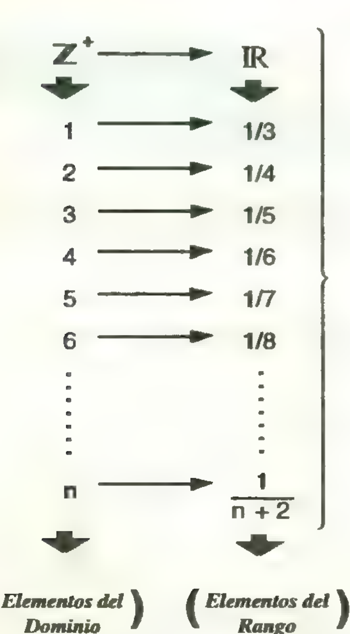
De donde: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$\downarrow$

$\mathbb{R}_f = \left\{\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{7}; \dfrac{1}{8}; \ldots\right\}$

$$\therefore \quad f = \left\{\left(1; \frac{1}{3}\right), \left(2; \frac{1}{4}\right), \left(3; \frac{1}{5}\right), \left(4; \frac{1}{6}\right), \left(5; \frac{1}{7}\right), \left(6; \frac{1}{8}\right), \ldots\right\}$$

A la sucesión f hace corresponder a cada número natural un número real, así:



- Los elementos de $\mathbb{R}$ imágenes de la aplicación, se llaman **términos de la sucesión.**

- Y los elementos de $\mathbb{Z}^+$, o elementos originales de la aplicación, indican los lugares que ocupan los términos. Así, en el ejemplo mencionado, el término 1/5 de la sucesión ocupa el tercer lugar.

- Los términos de la sucesión f se representan por $f_{(n)}$, siendo el subíndice **n** el indicador de orden del término.

DEFINICIÓN DE SUCESIÓN

Una Sucesión es una Función cuyo dominio es un conjunto de números naturales, y cuyo rango es un subconjunto de números reales.

* A una sucesión se acostumbra a denotarla escribiendo entre llaves a su término n - ésimo. Así, la sucesión: $S_{(n)} = \{ (n, y) \in \mathbb{Z}^{+} \times \mathbb{R} / y = 5n - 2 \}$ pues, en su forma simple se denota asi: $S_n = \{ 5n - 2 \}$; donde los términos de esta sucesión, es decir los elementos del rango, son:

Para: $n = 1 \Rightarrow S_n = \{ 5n - 2 \} \Rightarrow S_1 = 5(1) - 2 \Rightarrow S_1 = 3$
Para: $n = 2 \Rightarrow S_n = \{ 5n - 2 \} \Rightarrow S_2 = 5(2) - 2 \Rightarrow S_2 = 8$
Para: $n = 3 \Rightarrow S_n = \{ 5n - 2 \} \Rightarrow S_3 = 5(3) - 2 \Rightarrow S_3 = 13$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

* Una Sucesión es **Finita**, cuando tiene un término que es el último **ejemplo:** 3; 7; 11; 15; 19; 23; 27

  Como se observará esta sucesión tiene un último término que es 27 por lo tanto la sucesión es finita.

* Una sucesión es **Infinita**, cuando no tiene último término, es decir, dado cualquier término de la sucesión, existen términos siguientes a él. ejemplo: los términos de la sucesión: $S_n = \left\{ \dfrac{n}{n+2} \right\}$

Son: $S_1 = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$; $S_2 = \dfrac{2}{2+2} = \dfrac{2}{4}$; $S_3 = \dfrac{3}{3+2} = \dfrac{3}{5}$; ....

* **Sucesión Convergente:**

Dada la sucesión: $S_n = \dfrac{3n+1}{n}$

Para: n = 1; El término de la sucesión es: $S_1 = \dfrac{3(1)+1}{1} \Rightarrow S_1 = 4$

Para: n = 2; El término de la sucesión es: $S_2 = \dfrac{3(2)+1}{2} \Rightarrow S_2 = 3{,}50$

Para: n = 3; El término de la sucesión es: $S_3 = \dfrac{3(3)+1}{3} \Rightarrow S_3 = 3{,}33$

Para: n = 4; El término de la sucesión es: $S_4 = \dfrac{3(4)+1}{4}$ ⇒ $S_4 = 3{,}25$

Para: n = 5; El término de la sucesión es: $S_5 = \dfrac{3(5)+1}{5}$ ⇒ $S_5 = 3{,}20$

⋮

Para: n = 10 000; El término de la sucesión es: $S_{10\,000} = \dfrac{3(10\,000)+1}{10\,000}$ ⇒ $S_5 = 3{,}000\,1$

$n \to \infty$ $= 3$

* Observamos que al asignar a **n** valores enteros positivos; cada vez más grandes"; el término de la sucesión se "Aproxima" cada vez más al número 3, este hecho, en matemática se simboliza de la manera siguiente: ➡ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n+1}{n} = 3$

Se lee "El límite de la sucesión $\left\{\dfrac{3n+1}{n}\right\}$ cuando **n** **tiende a más infinito**, es el número 3".

Se dice en este caso que la sucesión **Converge** hacia 3.

Luego: *Se dice que una sucesión: $S_n = \{\, a_n \,\}$ Es convergente si existe un número real b, tal que:* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$

Si no existiera el número b, entonces la sucesión es **divergente**.

Ejemplo 1: ¿La sucesión: $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ es convergente o es divergente?

Resolución:

- En primer lugar hallamos el límite de: $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$; cuando **n** tiende a más infinito, para eso, damos valores enteros a "**n**" de la manera siguiente:

Para: n = 1, el término de la sucesión es: $\dfrac{1}{2(1)} = \dfrac{1}{2} = 0{,}50$

Para: n = 2, el término de la sucesión es: $\dfrac{1}{2(2)} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

Para: n = 3, el término de la sucesión es: $\dfrac{1}{2(3)} = \dfrac{1}{6} = 0{,}16$

Para: n = 4, el término de la sucesión es: $\dfrac{1}{2(4)} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

⋮

Para: n = 1 000 000, el término de la sucesion es: $\dfrac{1}{2(1\,000\,000)} = 0{,}000\,000\,5$

* Como se observará a medida que damos valores más grandes a "**n**" el término de la sucesión se aproxima cada vez más al número Cero. entonces diremos que la sucesión Converge hacia Cero. Es decir: ➡ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} = 0$

Ejemplo 2 : Determinar si la sucesión { 5n } Es convergente o es divergente.

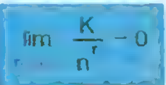
Resolución:

Si damos valores enteros a **n** cada vez "más grandes" observamos que los términos de la sucesión también tomarán cada vez valores "más grandes", veamos:

Para: n = 1;	el término de la sucesión es:	5(1) = 5
Para: n = 2;	el término de la sucesión es:	5(2) = 10
Para: n = 3;	el término de la sucesión es:	5(3) = 15
Para: n = 4;	el término de la sucesión es:	5(4) = 20
⋮		⋮ ⋮

* Como se observará los términos de la sucesión no se dirigen a un sólo número fijo. por esta razón decimos que la sucesión { 5n } es **divergente.**

Generalizando:



$$\lim_{n \to \infty} \frac{K}{n^r} = 0$$

; cuando: "k" es un número real cualquiera, y "r" es un número natural.

De donde: a) $\lim_{n \to \infty} \frac{6}{n} = 0$ b) $\lim_{n \to \infty} \frac{-4}{n} = 0$ c) $\lim_{n \to \infty} \frac{7}{n^2} = 0$

∴ a,b y c son sucesiones **Convergentes.**

$$\lim_{n \to \infty} Kn = +\infty$$

; cuándo "k" es un número entero positivo ó un número fraccionario positivo.

$$\lim_{n \to \infty} Kn = -\infty$$

; cuando "k" es un número entero negativo ó un número fraccionario negativo.

De donde: a) $\lim_{n \to \infty} 8n = +\infty$ b) $\lim_{n \to \infty} -11n = -\infty$ c) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3}n = +\infty$

∴ a, b y c son sucesiones **Divergentes.**

Ejemplo 3: A la sucesión: { k } , se le denomina sucesión constante porque cada uno de sus términos es el número k. Así:

Los términos de la sucesión: { 4 } son: 4; 4; 4; 4; 4; ......pues, esta sucesión converge hacia el número 4.

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} 4 = 4$$

Generalizando:

Propiedad (I): $\lim_{n \to \infty} K = K$ ***; cuando: "K" es un número real.***

De donde: a) $\lim_{n \to \infty} 10 = 10$ b) $\lim_{n \to \infty} -8 = -8$ c) $\lim_{n \to \infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

∴ a, b y c, son sucesiones **Convergentes.**

Ejemplo 4: Determinar si la sucesión: $\left\{2 + \frac{3}{n}\right\}$ es convergente o es divergente.

Resolución:

- En primer lugar hallamos el límite de: $\left\{2 + \frac{3}{n}\right\}$; cuando **n** tiende a más infinito, para eso damos valores enteros a n de la manera siguiente:

Para: n = 1; el término de la sucesión es: $2 + \frac{3}{1} = \boxed{5}$

Para: n = 2; el término de la sucesión es: $2 + \frac{3}{2} = \boxed{3,5}$

Para: n = 3; el término de la sucesión es: $2 + \frac{3}{3} = \boxed{3}$

Para: n = 4; el término de la sucesión es: $2 + \frac{3}{4} = \boxed{2,75}$

Para: n = 5; el término de la sucesión es: $2 + \frac{3}{5} = \boxed{2,60}$

⋮ ⋮

Para: n = 10 000, el término de la sucesión es: $2 + \frac{3}{10\,000} = \boxed{2,000\,3}$

* Como se observará a medida que damos valores más grandes a "**n**", el término de la sucesión se aproxima cada vez más al número 2. Entonces diremos que la sucesión converge hacia 2. Es decir:

$$\lim_{n \to \infty} \left\{2 + \frac{3}{n}\right\} = 2$$

Este límite, se puede resolver de la siguiente manera:

$$\lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 2 + \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n}$$

$$= 2 + 0 = 2$$

Generalizando:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n$$ ***Propiedad(II)***

De donde:

$$\lim_{n \to +\infty} (5 + 8n) = \lim_{n \to +\infty} 5 + \lim_{n \to \infty} 8n = 5 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(4n - \frac{7}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 4n - \lim_{n \to \infty} \frac{7}{n} = \infty - 0 = +\infty$$

Propiedad de los límites:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}$$ ***Propiedad (III)***

Ejemplo 5 : Determinar si la sucesión: $\left\{\dfrac{3 + \frac{1}{n}}{\frac{4}{n} - 2}\right\}$ es convergente o es divergente.

Resolución:

Aplicando la **propiedad (III)**, se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{n}}{\frac{4}{n} - 2}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{4}{n} - 2\right)} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 3 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4}{n} - \lim\limits_{n \to \infty} 2} = \frac{3 + 0}{0 - 2} = \frac{3}{-2}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{n}}{\frac{4}{n} - 2}\right) = -\frac{3}{2}$$; la sucesión **Converge** hacía -3/2

Ejemplo 6: Determinar si la sucesión: $\left\{\dfrac{2n+1}{3n^2-1}\right\}$, es convergente o es divergente.

Resolución:

Aplicando la **propiedad (III)**, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^2-1}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n^2\quad 1\right)}$$

; Ahora aplicamos la **propiedad (II)** tanto en el numerador como en el denominador.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^2-1}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2n+\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}3n^2-\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{\infty+1}{\infty-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

El resultado hallado $\frac{\infty}{\infty}$; no representa número alguno. En matemática se dice, que $\frac{\infty}{\infty}$ es una indeterminada.

Luego, para levantar esta indeterminada, divido al numerador y denominador de la expresión: $\left\{\dfrac{2n+1}{3n^2-1}\right\}$, entre "**La variable elevada a su mayor exponente**" en este caso dividiremos entre $\mathbf{n^2}$, tanto al numerador como denominador. veamos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3n^2}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{1}{\infty^2}}{3-\dfrac{1}{\infty^2}}$$

Recordar que: $\dfrac{\text{Número}}{\text{Infinito}}=\text{Cero}$; Entonces: $\dfrac{2}{\infty}=0$; $\dfrac{1}{\infty^2}=0$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^2-1}\right)=\frac{\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{1}{\infty^2}}{3-\dfrac{1}{\infty^2}}=\frac{0+0}{3-0}=\frac{0}{3}=0$$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n^2-1}\right)=0$; la sucesión **Converge** hacia Cero.

Ejemplo 7: Determinar si la sucesión: $\left\{\dfrac{4n^3-1}{3+n^2}\right\}$, es convergente o divergente.

Resolución:

Al reemplazar "n" que tiende a infinito, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^3-1}{3+n^2}\right)=\frac{4(\infty)^3-1}{3+(\infty)^2}=\frac{4(\infty)-1}{3+\infty}=\frac{\infty-1}{3+\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

De donde: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^3-1}{3+n^2}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$ **(Indeterminada)**

Para levantar la indeterminación divido al numerador y al denominador entre n^3 (variable con mayor exponente).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^3-1}{3+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4n^3}{n^3}-\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n}}\right)$$

Luego, reemplazamos el valor de **n** que tiende a infinito, obteniendo.

$$=\frac{4-\frac{1}{\infty^3}}{\frac{3}{\infty^3}+\frac{1}{\infty}}=\frac{4-\frac{1}{\infty}}{\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{4-0}{0+0}=\frac{4}{0}=\infty$$

Recordar que: $\dfrac{\text{Número}}{\text{Cero}}=\text{Infinito}$; Entonces: $\dfrac{4}{0}=\infty$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^3-1}{3+n^2}\right)=\infty$; la sucesión es Divergente

1.4.2 DETERMINACIÓN DE UNA SUCESIÓN

Una sucesión puede estar determinada por el término general o por una ley de recurrencia.

Por el término General

Ejemplo: Escribir la sucesión cuyo término general es: $f_{(n)} = \dfrac{3^n - 1}{2n + 5}$

Resolución:

Basta hacer n = 1, 2, 3, 4, ... y se tendrá:

Para: $n = 1$; el término de la sucesión es: $f_1 = \dfrac{3^1 - 1}{2(1) + 5} = \dfrac{2}{7}$

Para: $n = 2$; el término de la sucesión es: $f_2 = \dfrac{3^2 - 1}{2(2) + 5} = \dfrac{8}{9}$

Para: $n = 3$; el término de la sucesión es: $f_3 = \dfrac{3^3 - 1}{2(3) + 5} = \dfrac{26}{11}$

Para: $n = 4$; el término de la sucesión es: $f_4 = \dfrac{3^4 - 1}{2(4) + 5} = \dfrac{80}{13}$

⋮ ⋮

Luego, los términos de la sucesión son: $\dfrac{2}{7}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{26}{11}, \dfrac{80}{13}$, ...

Por una Ley de Recurrencia:

Que permite obtener un término a partir de otros anteriores.

Ejemplo: Escribir la sucesión cuyo primer término es 2, sabiendo que cada término siguiente es el cuadrado del anterior.

Resolución:

$f_1 = 2$, $f_2 = 2^2 = 4$, $f_3 = 4^2 = 16$, $f_4 = 16^2 = 256$, ...

Luego, los términos de la sucesión son:

2, 4, 16, 256, ...

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE SUCESIÓN

Ejercicio 1 : Escribir el término general de la sucesión: $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \ldots$

Resolución:

La sucesión puede escribir asi: $\frac{1^2}{1^2+1}, \frac{2^2}{2^2+1}, \frac{3^2}{3^2+1}, \frac{4^2}{4^2+1}, \ldots$

Como se observará todos los términos de la sucesión son fracciones cuyos numeradores son siempre cuadrados perfectos y cuyos denominadores son una unidad más que el númerador correspondiente. Se ve, además, que la, base de cada cuadrado coincide con el lugar que ocupa cada término de la sucesión.

Luego: $\frac{1^2}{1^2+1}, \frac{2^2}{2^2+1}, \frac{3^2}{3^2+1}, \frac{4^2}{4^2+1}, \ldots, \frac{n^2}{n^2+1}$

$\therefore$ El término general o n - ésimo será: $\frac{n^2}{n^2+1}$

Ejercicio 2: Escribe el término general de la sucesión: $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \ldots$

Resolución:

La sucesión puede escribirse asi: $\frac{1}{1+3}, \frac{2}{2+3}, \frac{3}{3+3}, \frac{4}{4+3}, \ldots$

Como se observará todos los términos de la sucesión son fracciones cuyos denominadores se diferencian de los numeradores en 3 unidades.

Luego: $\frac{1}{1+3}, \frac{2}{2+3}, \frac{3}{3+3}, \frac{4}{4+3}, \ldots, \frac{n}{n+3}$

$\therefore$ El término general o n - ésimo será: $\frac{n}{n+3}$

Ejercicio 3: El término general de una sucesión es: $2n^2 - 18$

a) Escribe el término de lugar 13 y el de lugar 21.

b) ¿Es nulo algún término de esta sucesión?

Resolución:

a) Para hallar el término de lugar 13, reemplazamos el valor de n = 13, en la expresión: $2n^2 - 18$, obteniendo:

$$S_{13} = 2(13)^2 - 18 = 2(169) - 18 = 338 - 18 = 320$$

∴ El término de lugar 13 es: 320

- De igual manera, para hallar el término de lugar 21, reemplazamos el valor de n = 21, en la expresión: $2n^2 - 18$, obteniendo.

$$S_{21} = 2(21)^2 - 18 = 2(441) - 18 = 882 - 18 = 864$$

∴ El termino de lugar 21 es: 864

b) Para determinar si existe algún término Nulo se establece la ecuación:

$$2n^2 - 18 = 0 \quad \rightarrow \quad 2n^2 = 18$$

$$n^2 = 9 \quad \text{De donde:} \quad n = \pm\sqrt{9} \quad \rightarrow \quad n = \pm 3$$

Observación: *Sólo se tomará el valor positivo, puesto que estamos trabajando con números enteros positivos o naturales.*

Por lo tanto, el término que se anula es el tercero ya que n = 3, veamos:

Para: n = 1; el término de la sucesión es: $2(1)^2 - 18 = -16$

Para: n = 2; el término de la sucesión es: $2(2)^2 - 18 = -10$

Para: n = 3; el término de la sucesión es: $2(3)^2 - 18 = 0$ **(Se anula)**

∴ El término nulo de la sucesión: $2n^2 - 18$ es el tercero

Ejercicio 4: Hallar el término general de la sucesión: $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}, \frac{16}{19}, \ldots\ldots$, y calcular el término de lugar 20.

Resolución:

La sucesión puede escribirse así: $\dfrac{1^2}{1^2+3}, \dfrac{2^2}{2^2+3}, \dfrac{3^2}{3^2+3}, \dfrac{4^2}{4^2+3}, \ldots\ldots$

Como se observará todos los términos de la sucesión son fracciones, cuyos numeradores son cuadrados perfectos y cuyos denominadores son 3 unidades más que sus numeradores respectivos.

Luego: $\dfrac{1^2}{1^2+3}, \dfrac{2^2}{2^2+3}, \dfrac{3^2}{3^2+3}, \dfrac{4^2}{4^2+3}, \ldots\ldots\ldots, \dfrac{n^2}{n^2+3}$

Donde, el término general o n - ésimo es: $\dfrac{n^2}{n^2+3}$

Ahora, calculamos el término de lugar 20, veamos:

Para: $n = 20 \rightarrow \dfrac{n^2}{n^2+3} = \dfrac{20^2}{20^2+3} = \dfrac{400}{403}$

∴ El término de lugar 20 en la sucesión: $\dfrac{n^2}{n^2+3}$ es: $\dfrac{400}{403}$

Ejercicio 5 : Halla el límite y determina la convergencia o divergencia de la sucesión.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{n+5}\right)$$

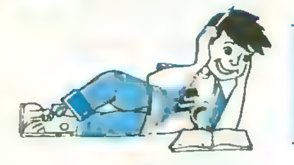
Resolución:

Divido cada término de la fracción: $\dfrac{3n^2-1}{n+5}$; entre la variable de mayor exponente, siendo este $\mathbf{n^2}$.

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{n+5}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{5}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}\right) = \frac{3-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{5}{\infty}} = \frac{3-0}{0+0} = \frac{3}{0} = \infty$$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-1}{n+5}\right) = \infty$; la sucesión es divergente.



TALLER DE EJERCICIOS Nº 4

Ejercicio 1: Las siguientes sucesiones están definidas por su término general o n - ésimo. Hallar en cada caso los 6 primeros términos.

a) $\{2n+3\} = \{5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15\}$
b) $\{5 - 3n\} =$
c) $\{4n+1\} =$
d) $\{1 - 5n\} =$
e) $\left\{\dfrac{n+1}{n+3}\right\} =$
f) $\left\{\dfrac{3-n}{6+n}\right\} =$
g) $\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\} =$
h) $\left\{\dfrac{n^2+2}{n^3}\right\} =$
i) $\{2^n\} =$
j) $\{3^n - 1\} =$

Ejercicio 2: Escribe el término n - ésimo de cada uno de las siguiente sucesiones.

a) 2; 5; 8; 11; .... = {3n - 1}
b) 7; 12; 17; 22;......... =
c) -6; -1; 4; 9; 14;........ =
d) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}$, ...=
e) $\frac{7}{2}, \frac{9}{3}, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}$, ...=
f) $\frac{1}{4} ; \frac{3}{8} ; \frac{5}{12} ; \frac{7}{16}$; .... =
g) 3 ; 5 ; 9 ; 17 ; .... =
h) 0 ; 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; ...... =

Ejercicio 3:

a) Hallar el término general de la sucesión: 2/5 ; 4/7 ; 6/9 ; 8/11; ......, y calcular el término de lugar 100.

Resolución:

b) Hallar el término general de la sucesión: 1 x 4, 3 x 6; 5 x 8; 7 x 10; 9 x 12; ......y calcular el término de lugar 20.

Resolución:

Ejercicio 4:

a) Hallar el término de lugar 30 de la sucesión: 1/3 ; 4/4 ; 9/5 ; 16/6;......

Resolución:

b) Hallar el término de lugar 18 de la sucesión: -2/7 ; -5/8 ; -8/9 ; -11/10;......

Resolución:

Ejercicio 5 :

a) El término general de una sucesión es: $3n^2 - 12$

I) Escribe el término de lugar 15 y el de lugar 20.

II) ¿Es nulo algún término de esta sucesión?

Resolución:

b) El término general de una sucesión es: $2n^3 - 250$.

I) Escribe el término de lugar 12 y el término de lugar 21.

II) ¿Es nulo algún término de esta sucesión?

Resolución:

Ejercicio 6 : Halla cada límite y determina la convergencia o divergencia de la sucesión correspondiente:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{5n+1}{n+4}\right)$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{6+n}{3n+5}\right)$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n^2+1}{n+2}\right)$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n+3}{2n^2+1}\right)$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n^3+5}{3+n}\right)$

Ejercicio 7 : Aplica límites y determina si cada sucesión es convergente o es divergente, en caso que fuese convergente, halla el número de convergencia.

a) $\left\{\dfrac{n+2}{1-3n}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{4n-1}{3n+5}\right\}$

c) $\{8+5n\}$

d) $\left\{\dfrac{n^2+4}{3n^2+1}\right\}$

e) $\left\{\dfrac{4n^3}{n^3+1}\right\}$

f) $\left\{\dfrac{5+n}{2n^2+3}\right\}$

g) $\left\{\dfrac{2n^2-1}{5n^3+6}\right\}$

h) $\left\{\dfrac{7n^2}{3n^2+4}\right\}$

Clave de Respuestas

2. b) $5n+2$ **c)** $5n-11$ **d)** $\dfrac{n^2}{n+1}$ **e)** $\dfrac{2n+5}{n+1}$ **f)** $\dfrac{2n-1}{4n}$ **g)** 2^n+1 **h)** $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$

3. a) $\dfrac{2n}{2n+3}$ y $\dfrac{200}{203}$ **b)** (2n-1) (2n+2) y 39x42

4. a) 900/32 **b.** -53/24

5. a) I. 663 y 1 188
II. si en el 2do.
b) I. 3 206 y 18 272
II. Si en el 5to.

6. a) 5; convergente
b) 1/3; convergente
c) ∞; divergente
d) 0; convergente
e) ∞; divergente

7. a) converge hacia 1/3 **b)** converge hacia 4/3
c) divergente **d)** converge hacia 1/3
e) converge hacia 1/4 **f)** converge hacia 0
g) converge hacia 0 **h)** converge hacia 7/3

1.5 PROGRESIONES

1.5.1 PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

Es una sucesión de números que se caracteriza por ser cualquier término de ella excepto el primero, igual al anterior aumentada en una cantidad constante llamada Razón de la progresión. También se le denomina progresión por diferencia.

Ejemplo 1 : La sucesión: 3, 7, 11, 15, ...es una progresión aritmética cuya razón es 4.

* La razón se halla restando el 2º menos el 1º ; 3º menos el 2º ; 4º menos 3º y así sucesivamente veamos:

Sucesión: 3 , 7 ,11, 15 , ...

Razón = 7 - 3 = 11 - 7 = 15 - 11 = 4 **(Diferencia Común)**

Ejemplo 2 : La sucesión: 8, 4, 0, -4, ... es una progresión aritmética cuya razón es -4. Veamos:

Sucesión: 8, 4, 0, -4, ...

Razón = 4 - 8 = 0 - 4 = -4 - 0 = -4 **(Diferencia Común)**

> ***Observación:*** *Si la Diferencia es positiva la progresión es Creciente, como en el ejemplo 1, por el contrario, si la diferencia es negativa, la progresión es Decreciente como en el ejemplo 2.*

La Progresión Aritmética se suele representar de la forma siguiente:

$\div a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots, a_n$ ó támbien:

$\div a_1, (a_1 + r), (a_1 + 2r), (a_1 + 3r), \ldots\ldots, (a_1 + (n - 1)r)$

Donde:
- $\div$ → Inicio de la Progresión Aritmética (P.A)
- a_1 → Primer término
- a_n → término enésimo
- r → razón

1.5.2 CLASES DE PROGRESIONES: Hay 2 clases de progresiones:

* Progresión Aritmética Creciente, si: $r > 0$

** Progresión Aritmética Decreciente, si: $r < 0$

Forma Abstracta de Obtener la Fórmula del Término n-ésimo:

- De acuerdo a la definición de Progresión Aritmética se obtienen las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{l} \not{a}_2 = a_1 + r \\ \not{a}_3 = \not{a}_2 + r \\ \not{a}_4 = \not{a}_3 + r \\ \not{a}_5 = \not{a}_4 + r \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \not{a}_{n-1} = \not{a}_{n-2} + r \\ a_n = \not{a}_{n-1} + r \end{array}\right\}$$

; pues hay (n - 1) igualdades porque se empieza por a_2 y termina en a_n.

Σ **M.A.M:** $a_n = a_1 + (n-1)r$ ....(1)

Por tanto: Un término cualquiera de una progresión aritmética se obtiene sumando a su primer término el producto de la razón por el número de términos que le preceden.

Ejemplo 1: Hallar el término 15 de la progresión: ÷ 7, 11, 15, ...

Resolución:

La razón de la progresión es 4. Aplicando la fórmula (1).

$a_n = a_1 + (n-1)\, r;$ donde: $a_1 = 7$; $n = 15$; $r = 4$

Luego: $a_{15} = 7 + (15-1) \times 4 \rightarrow a_{15} = 7 + 14 \times 4 \rightarrow \therefore$ $a_{15} = 63$

Respuesta: El término de lugar 15 en la progresión es 63.

Ejemplo 2: Se sabe que en una progresión aritmética el término que ocupa el lugar 12 es 24 y que la razón es 2. Hallar el primer término de la progresión.

Resolución:

Los datos son: $a_{12} = 24$; $r = 2$; incógnita: $a_1 = ?$

Aplicando la fórmula (1): $a_n = a_1 + (n-1)\, r$; se obtiene:

$a_{12} = a_1 + (12-1) \times r \rightarrow 24 = a_1 + 11 \times 2 \rightarrow \therefore$ $a_1 = 2$

Respuesta: El primer término de la progresión es 2.

Ejemplo 3: Se sabe que en una progresión aritmética el término que ocupa el lugar 18 es 16 y el término que ocupa el lugar 30 es 48. Hallar la razón de la progresión.

Resolución:

Los datos son: $a_{18} = 16$; $a_{30} = 48$; incógnita: $r = ?$

Aplicando la fórmula 1: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,r}$; se obtiene:

Para el término 18: $a_{18} = a_1 + (18-1) \times r \rightarrow 16 = a_1 + 17r$ **...(I)**

Para el término 30: $a_{30} = a_1 + (30-1) \times r \rightarrow 48 = a_1 + 29r$ **...(II)**

De las ecuaciones:

$$48 = a_1 + 29r \quad \text{.........(II)}$$

$$16 = a_1 + 17r \quad \text{.........(I)}$$

***Restamos* M.A.M:** $32 = 12r$

De donde: $r = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} \rightarrow \therefore \boxed{r = 8/3}$

Respuesta: La razón de la progresión es: 8/3

Ejemplo 4: Se desea saber el número de múltiplos de 5 que hay entre 9 y 308.

Resolución:

De acuerdo al enunciado, la progresión aritmética, tiene la siguiente forma:

(Progresión Aritmética)

1º Se halla el primer término de la progresión, siendo este múltiplo de 5 y mayor que 9, entonces el valor que tomaría $\mathbf{a_1}$ es **10** ya que es el más cercano al 9 y es múltiplo de 5.

Entonces: $\boxed{a_1 = 10}$

2º Sabemos que los múltiplos de 5 aumentan de 5 en 5, siendo la razón de la progresión 5; $\boxed{r = 5}$

3º Hallamos el **n-ésimo** término, es decir el múltiplo de 5 menor que 308, siendo el más cercano el número 305, pues 305 si es múltiplo de 5, entonces: $\boxed{a_n = 305}$

4º Ahora hallamos el lugar que ocupa el número 305 en la progresión, veamos:

De la fórmula (1): $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$

$305 = 10 + (n - 1) \times 5$; sacamos quinta a cada término

$61 = 2 + (n - 1)$

$59 = n - 1 \rightarrow \therefore n = 60$

Respuesta: El número de múltiplos de 5 que hay entre 9 y 308 es 60.

Ejemplo (5): Se sabe que en una progresión aritmética el término que ocupa el lugar 3 es -7 y que la razón es 7. Se desea saber cuál es el noveno término de la progresión.

Resolución:

Los datos son: $a_3 = -7$; $r = 7$; Incognita: $a_9 = ?$

De la fórmula (1): $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$

$a_3 = a_1 + (3 - 1) \times 7 \rightarrow -7 = a_1 + 14 \quad \therefore a_1 = -21$

Luego, calculamos el término noveno, aplicando la misma fórmula 1:

$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$

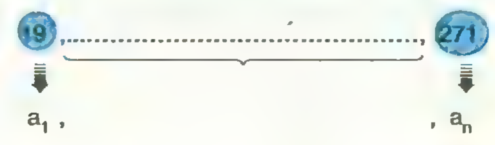
$a_9 = -21 + (9 - 1) \times 7 \rightarrow a_9 = -21 + 56 \quad \therefore a_9 = 35$

Respuesta: El noveno término de la progresión es: 35

Ejemplo (6): ¿ Cuántos números impares hay desde 19 hasta 271 ?

Resolución:

De acuerdo al enunciado, la progresión aritmética tiene la siguiente forma:



Observación: Para este tipo de problema cuando nos mencionan las palabras Desde-Hasta, es porque se van a tomar los números extremos.

Ahora decimos que la razón es 2, ya que el problema nos habla de números impares y sabemos que los números impares consecutivos se diferencian en 2 unidades (r = 2).

De la fórmula (1): $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$

De donde:

$271 = 19 + (n - 1) \times 2 \rightarrow 271 - 19 = (n - 1) \times 2$

$252 = (n - 1) \times 2 \rightarrow 126 = n - 1 \rightarrow \therefore$ $n = 127$

Respuesta: Los números impares que hay desde 19 hasta 271 son: 127 números.

Ejemplo (7): En la siguiente progresión aritmética:

$\div$ (a - 4), (a - 1), (a + 2),.........................., hay 41 términos.

Hallar el último término:

A) a + 41 **B)** a + 611 **C)** a + 116 **D)** a + 120 **E)** a + 210

Resolución:

En primer lugar, calculamos la razón de dicha progresión, restando el 2º término menos el 1º término: r = (a - 1) - (a - 4) $\rightarrow$ $r = 3$

Además sabemos que: $\begin{cases} a_1 = (a - 4) \\ n = 41 \text{ términos} \end{cases}$

De la fórmula (1): $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$

De donde: $a_n = (a - 4) + (41 - 1) \times 3$

$a_n = (a - 4) + 120 \rightarrow \therefore$ $a_n = a + 116$

Respuesta: El último término de la progresión es: (a + 116) siendo la respuesta correcta de las 5 alternativas la letra (c)

Ejemplo (8): La suma de los dos primeros términos de una progresión aritmética es la solución de la ecuación: $x^2 + 6x - 55 = 0$, siendo el quinto término 13; hallar la razón:

A) 4 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Resolución:

- En primer lugar, hallamos la solución positiva de la ecuación: $x^2 + 6x - 55 = 0$, resolviendo dicha ecuación, obtenemos:

$$x^2 + 6x - 55 = 0$$

$$\begin{matrix} x & & +11 \\ x & & -5 \end{matrix}$$

Donde: $(x+11)(x-5)=0$; igualamos cada factor a cero.

i) $x + 11 = 0 \rightarrow$ $\boxed{x = -11}$

ii) $x - 5 = 0 \rightarrow$ $\boxed{x = 5}$

De las dos soluciones (Valores que toma "x"), sólo tomamos el positivo o sea: $\boxed{x = 5}$

- En segundo lugar, representamos la progresión aritmética así:

$$a, (a + r), (a + 2r), (a + 3r), (a + 4r), \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Del enunciado: *) $a + (a + r) = 5 \rightarrow 2a + r = 5$ .... (α)

**) $a + 4r = 13 \rightarrow a = 13 - 4r$ .... (β)

Reemplazamos (β) en (α):

$$2(13 - 4r) + r = 5$$

$26 - 8r + r = 5 \rightarrow 21 = 7r \rightarrow \therefore$ $r = 3$ ***Rpta:*** **B**

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS O MEDIOS DIFERENCIALES

En la fórmula del término n-ésimo que reproducimos aquí:

$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)\,r}$ **.......(1)** , intervienen cuatro números:

a_n = último término;
a_1 = primer término;
n = número de términos y
r = razón o diferencia común

Y es claro que, conocidos tres de ellos, se puede hallar el cuarto; por ejemplo:

$\boxed{a_1 = a_n - (n - 1)\,r}$ **.......(2)**

$(n-1) = \frac{a_n - a_1}{r}$, de donde: $n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r}$ .... (3)

y finalmente, $r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ ....(4)

Las fórmulas (1), (2), (3) y (4) permiten resolver los problemas en los que se dan los valores de las letras que figuran en sus segundos miembros y nos piden hallar la letra del primer miembro; en seguida daremos ejemplos y ejercicios: pero la más importante entre estas fórmulas es la (4), que nos permite resolver el problema de la **"Interpolación de Medios Diferenciales"**. Expliquemos en qué consiste esto.

Dados dos números, nos pueden pedir que intercalemos entre ellos otros varios, **de manera que todos formen una progresión aritmética**; a esta operación se le llama **"Interpolación de Medios Diferenciales"**.

El problema de la Interpolación de Medios Diferenciales (o medios aritméticos como también se les llama) se resuelve simplemente aplicando la fórmula (4); pues una vez conocida la diferencia, "r", basta ir sumándola sucesivamente para ir obteniendo los términos que forman la progresión.

Ejemplo (1): Interpolar 4 medios diferenciales (o aritméticos) entre los números 3 y 28.

Resolución:

En este caso, $a_1 = 3$ **(Primer término de la progresión)**

$n = 6$ Términos (*pues hay que contar los dos términos dados, que se llaman extremos, y los 4 que piden intercalar.*)

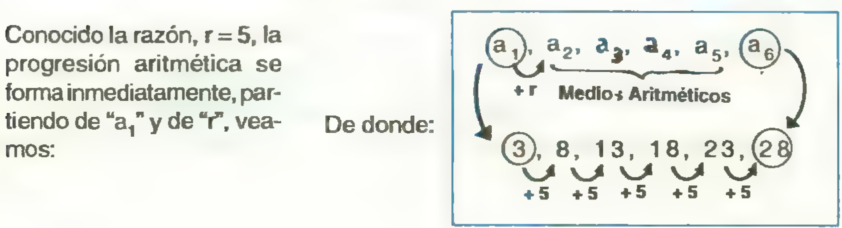
Además: $a_6 = 28$ **(último término de la progresión)**

Aplicando la fórmula (4): $r = \frac{a_n - a_1}{(n-1)}$, se tiene:

$$r = \frac{a_6 - a_1}{6-1} = \frac{28-3}{5} = \frac{25}{5} = 5 \rightarrow \therefore \boxed{r = 5}$$

Conocido la razón, r = 5, la progresión aritmética se forma inmediatamente, partiendo de "a_1" y de "r", veamos:

De donde:



Luego, los cuatro medios aritméticos pedidos son los que se ven entre los extremos dados 3 y 28.

∴ Los 4 medios diferenciales (o aritméticos entre los números 3 y 28 son: 8, 13, 18 y 23).

Ejemplo (2): Interpolar 3 medios aritméticos entre 4 y 44.

Resolución:

En este caso: $a_1 = 4$ *(Primer término de la progresión)*

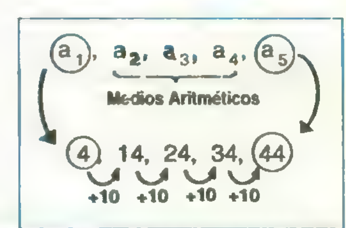
$n = 5$ Términos *(pues se han contado los términos extremos más los 3 términos que nos piden intercalar.)*

$a_5 = 44$ **(último término de la progresión)**

De la fórmula (4): $r = \dfrac{a_n - a_1}{n-1} = \dfrac{a_5 - a_1}{5-1} = \dfrac{44-4}{4} = 10 \rightarrow \therefore$ $r = 10$

Conocida la razón, $r = 10$, la progresión aritmética se forma inmediatamente, partiendo de "a_1" y de "r", veamos:

De donde:



Respuesta: Los 3 medios aritméticos entre 4 y 44 son: 14, 24 y 34.

Ejemplo (3): Interpolar 3 medios aritméticos entre los números -10 y 10.

Resolución:

En este caso: $a_1 = -10$ *(Primer término de la progresión)*

$n = 5$ Términos *(Los 3 términos que son Medios Aritméticos más los extremos.)*

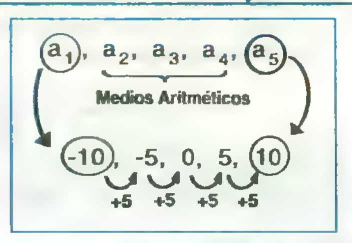
$a_5 = 10$ *(último término de la progresión)*

Aplicando la fórmula (4): $r = \dfrac{a_n - a_1}{(n-1)}$, se tiene:

$$r = \frac{a_5 - a_1}{5-1} = \frac{10-(-10)}{4} = 5 \rightarrow \therefore \quad r = 5$$

Conocida la razón $r = 5$, la progresión aritmética se forma inmediatamente, partiendo de "a_1" y de "r", veamos:

De donde:



Respuesta: Los 3 medios aritméticos entre -10 y 10 son: -5, 0 y 5.

Ejemplo (4): Interpolar 8 medios diferenciales (o aritméticos) entre a y (a + 9b)

Resolución:

En este caso: $a_1 = a$; $n = 10$; $a_{10} = (a + 9b)$

Aplicando la fórmula (4): $r = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$; se tiene:

$$r = \frac{a_{10} - a_1}{10 - 1} = \frac{(a + 9b) - a}{9} = \frac{9b}{9} \rightarrow \therefore \boxed{r = b}$$

La progresión aritmética es la siguiente:

$$a_1, \underbrace{(a_1 + r), (a_1 + 2r), (a_1 + 3r), (a_1 + 4r), \ldots\ldots\ldots\ldots, (a_1 + 8r)}_{\textit{Medios Aritméticos}}, (a_1 + 9r)$$

Luego: a, (a + b), (a + 2b), (a + 3b), (a + 4b), (a + 5b), (a + 6b), (a + 7b), (a + 8b), (a + 9b)

Respuesta: Los 8 medios aritméticos son:
(a + b), (a + 2b), (a + 3b), (a + 4b), (a + 5b), (a + 6b), (a + 7b), (a + 8b)

Ejemplo (5): Cuando sólo se pide interpolar un medio aritmético entre dos números recibe el nombre de Media Aritmética de los dos números:

Resolución:

Sean: a y b los números entre lo que queremos interpolar la media aritmética;

En este caso: $a_1 = a$; $n = 3$ **(términos)** ; $a_3 = b$

Aplicando la fórmula (4): $r = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$; se tiene:

$$r = \frac{a_3 - a_1}{3 - 1} = \frac{b - a}{2} \rightarrow \therefore \boxed{r = \frac{b - a}{2}}$$

La progresión seria: $a_1, (a_1 + r), (a_1 + 2r)$

Luego: $$a\ ,\ \left(a + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{}\right),\ \left[a + \underbrace{2\frac{(b-a)}{2}}_{}\right]$$

$$a\ ,\quad \left(\frac{a+b}{2}\right)\quad ,\qquad b$$

Se ve que la media aritmética de los dos números a y b es igual a su semisuma: $\frac{a+b}{2}$

SUMA DE LOS *n* TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA:

Se cuenta que, siendo niño **GAUSS** con 6 años de edad su maestro propuso, el siguiente problema en la clase: "**Sumar los primeros 100 números naturales**" osea, obtener la suma: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + 100$; y cuál no sería la sorpresa del profesor cuando **GAUSS** se levantó a los pocos segundos con la suma correctamente calculada.

Desconcertado el maestro le preguntó: "¿ Como lo has hecho tan rápido ?", a lo que el niño contestó: "Muy fácil, me di cuenta de que el primero y el último suman igual que el segundo y el penúltimo, e igual que el tercero y el antepenúltimo, etc. Entonces sumé el primero y el último, $1 + 100 = 101$ y multiplique por 50 que son los pares de 2 términos) que suman igual que los extremos"; así obtuvo $50 \times 101 = 5\,050$.

Este niño genial había descubierto el artificio que permite sumar una progresión aritmética cualquiera, pues en efecto, en cualquier progresión aritmética se cumple que:

"La suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos"

Sea: La progresión aritmética:

3, 9, 15, 21, 27, 33, 39

(Equidistantes)

(Equidistantes)

(Extremos)

* Como se observará la suma de los términos extremos es igual a la **SUMA** de los términos equidistantes:

$3 + 39 = 9 + 33 = 15 + 27 = 42$

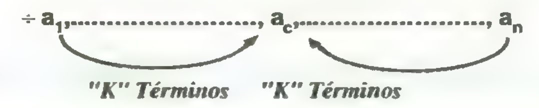
Ejemplo 1 : En la progresión: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, la suma de los extremos es $(2 + 20 = 22)$; la suma del segundo y del penúltimo término es $(5 + 17 = 22)$, etc. medita cómo se cumple la explicación general que se ha dado.

Ejemplo 2 : En la progresión: -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19; la suma de los extremos es (-13 + 19 = 6); la suma del segundo y del penúltimo término es (-9 + 15 = 6); la suma del tercero y el antepenúltimo es (-5 + 11 = 6), etc.

Ejemplo 3 : Demostrar que en una progresión aritmética de un número impar de términos, el término central es la semisuma de los extremos.

Resolución:

Si: a_1 y a_n son los términos extremos y a_c, el término central, se tiene el siguiente esquema:



La progresión aritmética anterior se puede considerar integrado por dos progresiones también aritméticas.

- En la primera progresión, cuyos extremos son: a_1 y a_c se verifica aplicando la fórmula (1): $a_n = a_1 + (n - 1)\,r$

  De donde: $a_c = a_1 + (k - 1)\,r$ ...(I)

- En la segunda progresión, cuyos extremos son: a_c y a_n, se verifica aplicando la fórmula (1): $a_n = a_1 + (n - 1)\,r$

  De donde: $a_n = a_c + (k - 1)\,r$ ...(II)

  De las igualdades: $\begin{cases} a_c = a_1 + (k-1)\,r & \text{...(I)} \\ a_n = a_c + (k-1)\,r & \text{...(II)} \end{cases}$

  ***Restamos:* M.A.M:** $a_c - a_n = a_1 - a_c$

$$2a_c = a_1 + a_n \rightarrow \quad \therefore \; a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$ (*Fórmula para hallar el término central*)

Ejemplo 4 : Dada la progresión aritmética: ÷ -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24; hallar el término central.

Resolución:

Aplicando la fórmula: $a_c = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; donde: $\begin{cases} a_1 = -8 \text{ (Primer término)} \\ a_n = 24 \text{ (último término)} \end{cases}$

Luego: $a_c = \frac{-8+24}{2} = \frac{16}{2} = 8 \rightarrow \therefore \boxed{a_c = 8}$

Respuesta: El término central de la progresión es 8.

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Sea la progresión aritmética $\div a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$

La suma de sus "n" términos es: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n$ ... (I)

Que se puede escribir en orden inverso, así:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1 \quad \ldots(2)$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, obtenemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots\ldots + (a_n + a_1)$$

Los términos entre paréntesis son equidistantes, por tanto:

$$(a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \ldots\ldots\ldots = (a_n + a_1) = (a_1 + a_n)$$

Luego: $$\underbrace{2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots\ldots + (a_1 + a_n)}_{\textit{Hay "n" términos}}$$

De donde: $2S_n = n(a_1 + a_n)$

$$\therefore \quad S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).n \qquad \textit{(Fórmula 5)}$$

O sea: *La suma de los n términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los términos extremos por el numero de términos.*

- Estimado Alumno para su mejor compresión, explicaré con un ejemplo aplicando la fórmula (5). Veamos:

  Sea la progresión aritmética: $\div 3, 5, 7, 9, 11, 13$

  Donde: $S_1 = \underbrace{3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13}_{\textit{(Hay 6 términos)}}$ .... (I)

Escribiendo en orden inverso, se tiene:

$$S_1 = \underbrace{13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3}_{\textit{(Hay 6 términos)}} \text{ .... (II)}$$

Sumamos miembro a miembro las igualdades (I) y (II):

$$2S_1 = \underbrace{(3 + 13) + (5 + 11) + (7 + 9) + (9 + 7) + (11 + 5) + (13 + 3)}_{\textit{(Hay 6 términos)}}$$

Por términos equidistantes:

$$(5 + 11) = (7 + 9) = (9 + 7) + (11 + 5) + (13 + 3) = \boxed{(3 + 13)}$$

Luego: $2S_1 = (3 + 13) + (3 + 13) + (3 + 13) + (3 + 13) + (3 + 13) + (3 + 13)$

$$2S_1 = 6(3 + 13) \rightarrow S_n = \left(\frac{3 + 13}{2}\right).6 \rightarrow \therefore \boxed{S_1 = 48}$$

Ejemplo (1) : Hallar la suma de los veinte primeros términos de la progresión:
6, 9, 12, 15, ...

Resolución:

Aplicando la fórmula (1): $\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)\, r}$

Donde: $a_1 = 6$; $n = 20$; $r = 9 - 6 = 12 - 9 = 15 - 12 = 3$

Reemplazando valores en la fórmula (1), obtenemos:

$$a_{20} = 6 + (20 - 1) \times 3 \rightarrow \boxed{a_{20} = 63}$$

Y mediante la fórmula (5): $\boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n}$

Donde: $a_1 = 6$; $n = 20$: $a_n = a_{20} = 63$

Reemplazando valores en la fórmula (5); obtenemos:

$$S_{20} = \left(\frac{6 + 63}{2}\right) \times 20 \rightarrow S_{20} = \frac{69 \times 20}{2} = 69 \times 10 \Rightarrow \therefore \boxed{S_{20} = 690}$$

Respuesta: La suma de los 20 primeros términos de la progresión es de 690.

Ejemplo 2: ¿Cuántos términos hay que tomar en la progresión aritmética: 1, 5, 9,.. para que la suma sea 780?

Resolución:

De la progresión: + 1, 5, 9,......................

Razón: $r = 5 - 1 = 9 - 5 = 4 \rightarrow \boxed{r = 4}$

Si a_n es el último término de la progresión y **n** el número de términos, aplicando las fórmulas (1) y (5) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_n = 1 + (n-1) \times 4 \quad \text{......... (I)}$$

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n \quad \rightarrow \quad 780 = \left(\frac{1 + a_n}{2}\right) \times n \quad \text{......... (II)}$$

Sustituyendo el valor de "a_n" de la ecuación (I) en la ecuación (II), obtenemos:

$$780 = \left(\frac{1 + (1 + (n-1) \times 4)}{2}\right) \times n$$

$$780 = \left(\frac{4n - 2}{2}\right) \times n \quad \rightarrow \quad 780 = \frac{2(2n - 1) \times n}{2}$$

$780 = 2n^2 - n$; esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$2n^2 - n - 780 = 0$; factorizamos por el método del aspa

$$\begin{matrix} 2n & & +39 \\ n & & -20 \end{matrix}$$

De donde: $(2n + 39)(n - 20) = 0$ Igualamos cada factor a cero:

i) $2n + 39 = 0 \rightarrow \boxed{n = -\frac{39}{2}}$

ii) $n - 20 = 0 \rightarrow \boxed{n = 20}$

De los dos valores que toma "**n**" sólo se tomará el valor positivo puesto que el número de términos no puede ser negativo, entonces: $n = 20$.

Respuesta: El número de términos que hay que tomar en la progresión es 20.

Ejemplo 3: Hallar la suma de una progresión de 12 términos que: $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.

Resolución:

Sea: la progresión aritmética de 12 términos:

$a, (a+r), (a+2r), \ldots\ldots\ldots, (a+9r), \ldots\ldots\ldots, (a+11r)$

Del Enunciado:
i) $a_3 = 24 \rightarrow (a+2r) = 24$ .... (1)
ii) $a_{10} = 66 \rightarrow (a+9r) = 66$ .... (2)

De las ecuaciones: (2) y (1):

$$\begin{array}{r} a + 9r = 66 \\ a + 2r = 24 \\ \hline \end{array}$$

***Restamos* M.A.M:** $7r = 42 \rightarrow r = \dfrac{42}{7} \rightarrow \therefore \boxed{r = 6}$

Reemplazamos el valor de r = 6; en la ecuación (1):

$$a + 2r = 24 \rightarrow a + 2(6) = 24 \rightarrow \boxed{a = 12} \rightarrow \therefore \boxed{a_1 = 12}$$

Ahora, calculamos el término doce, o sea: $a_{12} = ?$; siendo este:

$a_{12} = a + 11r$; reemplazando valores obtenemos:

$$a_{12} = 12 + 11(6) \rightarrow a_{12} = 78 \rightarrow \therefore \boxed{a_n = 78}$$

Luego, calculamos la suma de los términos de la progresión:

$$\boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n}$$; reemplazando valores se tiene:

$$S_{12} = \left(\frac{12 + 78}{2}\right) \times 12 = \left(\frac{90}{2}\right) \times 12 \rightarrow \therefore \boxed{S_{12} = 540}$$

Observación:

Otra forma de escribir la fórmula: $\boxed{S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n}$

Es reemplazando el valor de: $a_n = a_1 + (n-1)r$ ***; en dicha fórmula, veamos:***

$$S = \left(\frac{a_1 + [a_1 + (n-1)r]}{2}\right) \times n \quad \therefore \quad \boxed{S = \left(\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right) \times n}$$

(Fórmula)

- En el problema anterior puede aplicarse esta última fórmula así:

$$S_n = \left(\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right) \times n$$; siendo: $\begin{cases} a_1 = a = 12 \\ n = 12 \text{ términos} \\ r = 6 \end{cases}$

Luego: $S_{12} = \left(\frac{2 \times 12 + (12-1) \times 6}{2}\right) \times 12$

$$S_{12} = \left(\frac{24 + 66}{2}\right) \times 12 = 90 \times 6 = 540$$

Ejemplo 4 : Hallar la suma de los números impares comprendidos entre 21 y 157.

Resolución:

De acuerdo al enunciado, de progresión aritmética tiene la siguiente forma:

21, 23, ..., 155, 157

r = 2

Observación: *Para este tipo de problema cuando nos mencionan las palabras COMPRENDIDOS - ENTRE, es porque no se van a tomar los números extremos.*

De la progresión decimos que la razón es 2; ya que el problema nos habla de números impares y sabemos que los números impares consecutivos se diferencian en 2 unidades (r = 2).

Ahora, calculamos el número de términos osea el valor de "n", aplicando la fórmula (1):
$a_n = a_1 + (n-1)\,r$; siendo: $a_n = 155$; $a_1 = 23$; $r = 2$

Reemplazamos dichos valores en la fórmula (1):

$$155 = 23 + (n-1) \times 2$$
$$132 = (n-1) \times 2 \rightarrow \quad 66 = n - 1 \rightarrow \quad \therefore \quad n = 67$$

Calculamos la suma de los números términos de la progresión:

23, ..., 155

 # de términos: n = 67

De la fórmula (5): $S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n = \left(\frac{23 + 155}{2}\right) \times 67$

$$S = \left(\frac{178}{2}\right) \times 67 = 89 \times 67 = 5\,963 \rightarrow \quad \therefore \quad S = 5\,963$$

Respuesta: La suma de los números impares comprendidos entre 21 y 157 es 5 963.

Ejemplo 5 : Nataly empieza ahorrando 25 soles y cada mes aumenta 10 soles a sus ahorros. ¿Cuánto ahorrará al cabo de 1 año?

Resolución:

De acuerdo al enunciado, se forma la siguiente progresión aritmética:

$$\div 25,\ 35,\ 45,\ 55, \ldots\ldots \quad (r = 10)$$

Como cada término representa lo que ahorra cada mes, en total tendriamos **n = 12** términos en la progresión ya que el año tiene 12 meses.

De donde: $\div \underset{a_1}{25},\ 35,\ 45,\ 55, \ldots\ldots, \underset{a_{12}}{?}$ ($r = 10$)

De la fórmula (1): $a_n = a_1 + (n - 1)\,r$; obtenemos:

$$a_{12} = 25 + (12 - 1) \times 10 \rightarrow \therefore \boxed{a_{12} = 135}$$

Luego, hallamos la suma de los 12 términos que es lo que ahorra en 1 año.

De la fórmula (5): $\boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n}$; obtenemos:

$$S_{12} = \left(\frac{a_1 + a_{12}}{2}\right) \times 12 = \left(\frac{25 + 135}{2}\right) \times 12$$

$$\therefore \boxed{S_{12} = 80 \times 12 = 960}$$

Respuesta: Al cabo de un año Nataly ahorra 960 soles.

Ejemplo (6): Una progresión aritmética tiene 15 términos y su término central vale 5. ¿Cuánto vale la suma de los 15 términos?

Resolución:

La progresión aritmética de 15 términos, se representará de la siguiente manera:

$$\div a_1;\ (a_1 + r);\ (a_1 + 2r);\ \ldots;\ (a_1 + 7r);\ \ldots\ldots;\ (a_1 + 14r)$$

- a_1: *1º Término*
- $(a_1 + 7r)$: *Término Central (8º término)*
- $(a_1 + 14r)$: *15º término*

Observación: *Para saber que término ocupa el término central se suma el primero más el último y este resultado se divide entre 2.*

Para nuestro problema seria: **Término Central** $= \dfrac{1^{o} + 15^{o}}{2} = 8^{o}$ **término**

Del enunciado: Término Central: $(a_1 + 7r) = 5$ .... (1)

De la fórmula (5): $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n \rightarrow S_{15} = \left[\frac{a_1 + (a_1 + 14r)}{2}\right] \times 15$

$$S_{15} = \left(\frac{2a_1 + 14r}{2}\right) \times 15 = \frac{\cancel{2}(a_1 + 7r) \times 15}{\cancel{2}}$$

$$S_{15} = 15(a_1 + 7r) \quad \text{............ (2)}$$

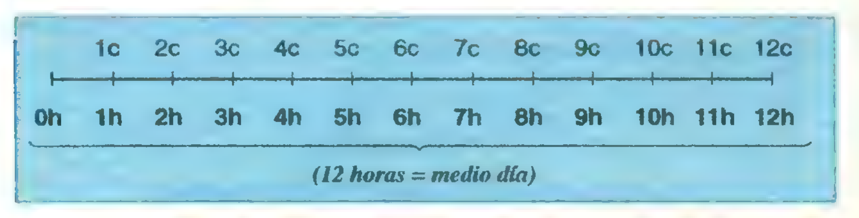
Reemplazamos (1) en (2): $S_{15} = 15(5) = 75$

Respuesta: La suma de los 15 términos de la progresión es 75.

Ejemplo (7): ¿ Cuál es el número de campanadas que da un reloj en una semana, si sólo marca las horas ?

Resolución:

Para su mejor entendimiento, representamos el medio día (12 horas) mediante el siguiente gráfico:



Observación: *Hemos tomado medio día como base puesto que el otro medio día el reloj vuelve a repetir el mismo número de campanadas. Osea si fueran las 6 de la mañana el reloj tocara 6 campanadas de igual manera si fueran las 6 de la tarde el reloj tambien tocara 6 campanadas.*

Ahora, hallamos el número total de campanadas que da el reloj en medio día. Veamos:

De la fórmula (5): $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n \rightarrow S_{12} = \left(\frac{a_1 + a_{12}}{2}\right) \times 12$

$$S_{12} = \left(\frac{1 + 12}{\cancel{2}}\right) \times \cancel{12} = 13 \times 6 = \boxed{78 \text{ Campanadas}}$$

Si en medio día el reloj da 78 campanadas en 1 día dará: $2 \times 78 = 156$ campanadas.

En 1 semana = 7 días ; el reloj dará: $7 \times 156 = 1\,092$ campanadas.

Respuesta: El número de campanadas que dará en 1 semana es 1 092.

Ejemplo (8) : Probar cuáles de las sucesiones son progresiones aritméticas:

a) 12, 7, 2, -3, -8, ...	c) $x, \frac{3x}{2}, 2x, \frac{5x}{2}, 3x$, ...
b) 1, -1, 1, -1, ...	d) $3, \frac{2n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{-3}{n}$, ...

Resolución:

a) La sucesión: 12, 7, 2, -3, -8,............sí es una progresión aritmética, ya que la diferencia entre términos consecutivos es constante, veamos:

12, 7, 2, -3, -8, ...

r = -5

*** Como se observará la razón "r" es constante.**

b) La sucesión: 1, -1, 1, -1,.................. no es una progresión aritmética, ya que la diferencia entre términos consecutivos no es común.

1, -1, 1, -1, ...

r = -2 r = -2 La razón es +2

*** Como se observará la razón "r" no es constante.**

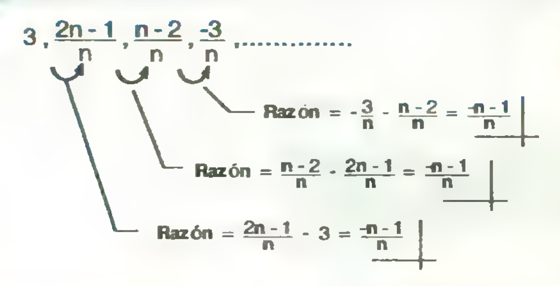
c) La sucesión: $x, \frac{3x}{2}, 2x, \frac{5x}{2}, 3x$,..............sí es una progresión aritmética, ya que la diferencia entre términos consecutivos es constante, veamos:

$x, \frac{3x}{2}, 2x, \frac{5x}{2}, 3x$,..............

$r = \frac{1}{2}x$

*** Como se observará la razón "r" es constante.**

d) La sucesión: $3, \frac{2n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{-3}{n}$,.............. sí es una progresión aritmética, ya que la diferencia entre términos consecutivos es común, veamos:



Serie Aritmética.- Sea la progresión aritmética: ÷ 4, 9, 14, 19, 24, 29

La suma indicada: 4 + 9 + 14 + 19 + 24 + 29, se llama **Serie Aritmética.**

Osea: *Una Serie Aritmética es la suma indicada de los términos de una progresión aritmética.*

Sumatorias: Si n es un número entero positivo y $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ son números reales, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$; se lee "Sumatoria de a_k, desde k = 1 hasta k = n"

Por Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n$$

- **Serie Finita.-** La serie es finita cuando tiene un número limitado de términos:

Ejemplo: La expresión: 4 + 7 + 10 + 13 + 16 es una serie finita que tiene cinco términos.

Notación: $\sum_{k=1}^{n} a_k$ para una serie finita de n términos.

Ejemplo 1 : Escribir la serie finita: $\sum_{k=1}^{6}(k + 3)$

Resolución:

Para obtener los términos de la serie, sustituimos la sucesión de valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en vez de k en el término general (k + 3), veamos:

$$\sum_{k=1}^{6}(k+3) = (1+3)+(2+3)+(3+3)+(4+3)+(5+3)+(6+3)$$

$$= 4+5+6+7+8+9$$

$$\therefore \boxed{\sum_{k=1}^{6}(k+3) = 4+5+6+7+8+9}$$

Ejemplo 2 : Escribir la serie finita: $\sum_{k=2}^{5} 2^k$

Resolución:

Para obtener los términos de la serie sustituimos la sucesión de valores 2, 3, 4 y 5 de k en el término general 2^k. Veamos:

$$\sum_{k=2}^{5} 2^k = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

$$= 4+8+16+32 \Rightarrow \quad \therefore \boxed{\sum_{k=2}^{5} 2^k = 4+8+16+32}$$

Ejemplo 3: Escribir la serie finita: $\sum_{k=1}^{6} k!$

Resolución:

Recuerda que el símbolo **n!** se lee: "**Factorial de n**"donde "n" es un número entero no negativo.

El factorial de "n" se le define como el producto de los "n" primeros números enteros positivos osea:

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times n} \quad ; \quad \text{para:} \quad n \geq 1$$

Por convención: **0! = 1**

Ejemplos sobre factorial de un número entero positivo:

$$\begin{cases} 2! = 1 \times 2 \quad ; \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 \quad ; \quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \\ 34! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 34 \end{cases}$$

Aplicando la definición de factorial en: $\sum_{k=1}^{6} k!$; obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{6} k! = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6!$$

$$= 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 \qquad \therefore \boxed{\sum_{k=1}^{6} k! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720}$$

Ejemplo (4): Verifica el cumplimiento de cada fórmula siguiente para cuando: $n = 5$

a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

Resolución:

a) $\sum_{k=1}^{n=5} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; pero: $n = 5$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \left(\frac{5(5+1)}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{1 + 8 + 27 + 64 + 125}_{} = \left(\frac{5(6)}{2}\right)^2$$

$$225 = (15)^2 \rightarrow \boxed{225 = 225}$$

b) $\sum_{k=1}^{n=5} (2k-1) = (2\times 1 - 1) + (2\times 2 - 1) + (2\times 3 - 1) + (2\times 4 - 1) + (2\times 5 - 1) = n^2$

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = n^2 \quad ; \quad \text{pero: } n = 5$$

$$= \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9}_{} = 5^2$$

$$\therefore \boxed{25 = 25}$$

- **Serie Finita.-** La serie es infinita cuando tiene un número ilimitado de términos.

Notación:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ➠ para una serie infinita.

Ejemplo 1: Escribe los cuatro primeros términos de la serie infinita.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)k$$

Resolución:

Para obtener los términos de la serie, sustituimos la sucesión de valores 1, 2, 3, 4, 5, 6,.............. en vez de k en el término general (2k - 1)k, veamos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)k = (2\times1-1)\times1+(2\times2-1)\times2+(2\times3-1)\times3+(2\times4-1)\times4+\ldots\ldots$$

$$= 1\times1+3\times2+5\times3+7\times4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1+6+15+28+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Respuesta: Los cuatro primeros términos de la serie infinita son: 1 + 6 + 15 + 28.

Ejemplo 2 : Escribe los seis primeros términos de la serie infinita. $\sum_{k=3}^{\infty}(k^2+1)$

Resolución:

Para obtener los términos de la serie, sustituimos la sucesión de valores 3, 4, 5, 6, 7, 8,............... en vez de k en el término general (k^2 + 1), veamos:

$$\sum_{k=3}^{\infty}(k^2+1) = (3^2+1)+(4^2+1)+(5^2+1)+(6^2+1)+(7^2+1)+(8^2+1)+\ldots\ldots\ldots$$

$$= 10+17+26+37+50+65+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Respuesta: Los seis primeros términos de la serie infinita son: 10 + 17 + 26 + 37 + 50 + 65.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 5

Ejercicio 1: Probar cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas.

a) 8 ; 5 ; 2 ; -1 ; -4 ; ......
b) 6 ; 10 ; 14 ; 16 ; 20 ; ......
c) 4 ; 10/3 ; 11/2 ; 29/6 ; ......
d) $1 ; \frac{n+1}{n} ; \frac{2n+1}{n} ; \frac{3n+1}{n} ; ......$

Resolución:

Ejercicio 4: Hallar el término de lugar 50 de la progresión aritmética:

÷ 3/4 ; 5/4 ; 7/4 ; 9/4 ; ...

Resolución:

Rpta. 101/4

Ejercicio 2: Hallar el término de lugar 100 de la progresión aritmética:

÷ 2 ; 9 ; 16 ; 23 ; ......

Resolución:

Rpta. 695

Ejercicio 5: En una progresión aritmética el primer término es 3 y la razón es 4. Hallar el término que ocupa el lugar 22.

Resolución:

Rpta. 87

Ejercicio 3: Hallar el término de lugar 22 de la progresión aritmética:

÷ -31; -26 ; -21 ; -16 ; ...

Resolución:

Rpta. 74

Ejercicio 6: Interpolar cuatro medios aritméticos entre 1 y 36.

Resolución:

Rpta. 8 ; 15 ; 22 ; 29

Ejercicio 7 : Interpolar 6 medios diferenciales entre 8 y 50.

Resolución:

Rpta. 14; 20 ; 26 ; 32; 38; 44

Ejercicio 8 : Hallar el término a_{20} de una progresión aritmética en la que: $a_1 = 7$ y $r = -2$.

Resolución:

Rpta. -31

Ejercicio 9 : Desarrollar las siguientes sumatorias o series aritméticas finitas.

a) $\sum_{K=1}^{4}(3K+2) = [3(1)+2]+[3(2)+2]+[3(3)+2]+[3(4)+2]$
$= 5+8+11+14$

b) $\sum_{K=2}^{5}(3K^2-1) =$

c) $\sum_{K=3}^{7}(5K-4) =$

d) $\sum_{K=1}^{5}(2^K-1) =$

Ejercicio 10 : Escribe los cinco primeros términos de las series infinitas:

a) $\sum_{K=1}^{\infty}(K+1) =$

b) $\sum_{K=1}^{\infty}(K^2+3) =$

c) $\sum_{K=1}^{\infty}K(K+2) =$

Ejercicio 11 : Probar que en toda progresión aritmética cada término es igual a la semisuma del que le precede y del que le sigue.

Resolución:

Ejercicio 12: Verifica el cumpllimiento de cada fórmula siguiente para cuando n = 4.

a) $\sum_{K=1}^{n}2n = n(n+1)$

b) $\sum_{K=1}^{n}n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{K=1}^{n}3^K = \frac{3}{2}(3^n-1)$

d) $\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{K(K+1)} = \frac{n}{n+1}$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

NIVEL I

Ejercicio 1 : Hallar el término de lugar 120 de la progresión Aritmética:

$\div$ -8: -3; 2; 7; 12; ....

A) 597 B) 592 C) 577 D) 582 E) 587

Ejercicio 2 : Hallar el término de lugar 26 de la progresión Aritmética:

$$\div \frac{2}{3}; \frac{7}{6}; \frac{5}{3}; ......$$

A) 79/3 B) 79/6 C) 80/6
D) 80/3 E) 76/6

Ejercicio 3 : Obtener el término a_{40} en una progresión Aritmética; sabiendo que:

$$a_{25} = 52 \quad y \quad r = -3$$

A) 1 B) 4 C) 7 D) 10 E) 13

Ejercicio 4 : Se sabe que en una progresión Aritmética el término que ocupa el lugar 12 es 42, la razón es 2. Hallar el primer término de dicha progresión.

A) 24 B) 16 C) 22 D) 18 E) 20

Ejercicio 5 : En una Progresión Aritmética el término de lugar 40 es 59, el término de lugar 27 es 33. Hallar el primer término y la diferencia común en dicha progresión.

A) -21 y 2 B) -19 y 2 C) -21 y 3
D) -19 y 3 E) -17 y 2

Ejercicio 6 : ¿Cuántos números pares hay entre: 31 y 128?

A) 45 B) 46 C) 47 D) 48 E) 49

Ejercicio 7 : Se desea saber el número de múltiplos de 4 que hay entre 10 y 116.

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

Ejercicio 8 : ¿Cuánto vale la suma de los 25 términos de una progresión Aritmética cuyo primer término es 4 y cuya razón es 10?

A) 3 090 B) 3 100 C) 3 110
D) 3 120 E) 3 130

Ejercicio 9: Una Progresión Aritmética de 30 términos tiene por primer término 200 y por suma 5 130. ¿Cuánto valen la razón y su último término?

A) -3 y 144 B) -2 y 140 C) -2 y 142
D) -3 y 142 E) -2 y 144

Ejercicio 10 : Hallar la suma de los 25 primeros términos de la progresión Aritmética:

$$\div \frac{2}{5}; \frac{11}{15}; \frac{16}{15}; ....$$

A) 109 B) 110 C) 111
D) 112 E) 113

Ejercicio 11 : Hallar la suma de los números impares desde 29 hasta 137.

A) 4 565 B) 4 594 C) 4 536
D) 4 702 E) 4 428

Ejercicio 12 : Hallar el número de términos y la suma de ellos, en una

progresión Aritmética cuya razón es 3, su primer término es 6 y su último término 123.

A) 39 y 2 577 B) 40 y 2 580
C) 39 y 2 580 D) 41 y 2 583
E) 40 y 2 577

Ejercicio 13: En una progresión Aritmética de 60 términos la diferencia común es igual a 5 y la suma de sus términos es 9150. ¿Cuánto vale a_1 y a_{60}?

A) 10 y 295 B) 5 y 305 C) 0 y 305
D) 5 y 300 E) 0 y 295

Ejercicio 14: Sumar los 30 múltiplos de 5 siguientes a 50.

A) 3 825 B) 3 830 C) 3 835
D) 3 840 E) 3 820

Ejercicio 15: Una progresión Aritmética tiene 33 términos y su término central vale 8. ¿Cuánto vale la suma de los 33 términos?

A) 263 B) 264 C) 265 D) 266 E) 267

Clave de Respuestas

1. E	2. B	3. C	4. E	5. B
6. D	7. A	8. B	9. C	10. B
11. A	12. B	13. D	14. A	15. B

NIVEL II

Ejercicio 1: En la siguiente progresión Aritmética:

(x - 6); (x - 1); (x + 4); (x + 9); ......,

hay 37 términos. Hallar el último término.

A) (x + 184) B) (x + 169) C) (x + 164)
D) (x + 179) E) (x + 174)

Ejercicio 2: El mayor de tres números que forman una progresión Aritmética es el triple del menor. ¿Cuál es el mayor de estos tres números, si su producto es 1296?

A) 15 B) 6 C) 18 D) 12 E) 21

Ejercicio 3: Los términos extremos de una progresión Aritmética son 3 y 79, y la suma de todos ellos es 820. ¿Cuál es la razón de la Progresión y cuántos términos tiene?

A) 4 y 20 B) 5 y 20 C) 3 y 20
D) 4 y 21 E) 5 y 24

Ejercicio 4: El menor ángulo de un exágono irregular (ángulos desiguales) es de 100º y los seis ángulos estan en Progresión Aritmética. ¿Cuánto vale el mayor de los ángulos?

A) 100º B) 110º C) 120º
D) 130º E) 140º

Ejercicio 5: La suma de los tres primeros términos de una progresión Aritmética es la raíz positiva de la ecuación: $x^2 - 17x - 84 = 0$, siendo el sexto término 15. Hallar la razón.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Ejercicio 6: Determinar el mayor de los 5 primeros términos en una progresión Aritmética sabiendo que la suma de los tres últimos es igual al duplo de la de los tres primeros, y que la suma de estos 5 términos es 90.

A) 18 B) 24 C) 30 D) 6 E) 12

Ejercicio 7 : ¿Cuánto vale la suma de todos los números de 3 cifras?

A) 494 551 B) 493 551 C) 494 550
D) 494 579 E) 495 549

Ejercicio 8: Hallar la suma de todos los números de dos cifras que son múltiplos de 3.

A) 1662 B) 1665 C) 1668
D) 1671 E) 1674

Ejercicio 9 : ¿Cuántos términos hay que tomar en la progresión Aritmética:

-2; 2; 6; 10; 14;....; para que la suma sea 8 190.

A) 63 B) 64 C) 65 D) 66 E) 67

Ejercicio 10: (x+ y); (4x - 3y) ; (5y + 3x); son tres términos consecutivos de una progresión Aritmética. La relación entre «x» e «y» es:

A) x/y = 1/3 B) x/y = 2 C) x/y = 3
D) x/y = 5 E) x/y = 1/4

Ejercicio 11 : Si se sabe que: a; a^2 y 3a son los tres términos de una P.A., entonces la suma de los 10 primeros términos es:

A) 11 + 10a B) 10a + 11 C) 111a
D) 55a E) 110a

Ejercicio 12 : Hallar el valor de c^2 en:

÷ a; b; c; d; e; si se sabe que: a + e = 20

A) 400 B) 100 C) 20 D) 10 E) 160

Ejercicio 13 : Las dimensiones de un paralelepípedo rectangular están en progresión Aritmética cuya suma de dichas dimensiones es 30m; el volumen del paralelepípedo es de 640m³. ¿Cuánto miden las aristas?

A) 6; 10; 14 B) 8; 10; 12 C) 2; 10; 11
D) 4; 10; 16 E) 2; 8; 14

Ejercicio 14: ¿Cuántos términos de la progresión Aritmética: $6\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2};....$

Se deben tomar para que la suma sea -396?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Ejercicio 15 : En una progresión Aritmética de un número impar de términos (n). ¿Cuántos términos hay de lugar impar y cuántos de lugar par?

A) n; n - 1 B) n - 1; n + 1

C) $\frac{n+2}{2}$; $\frac{n-1}{2}$ D) $\frac{n+1}{2}$; $\frac{n-1}{2}$

E) $\frac{n+2}{2}$; n + 1

Ejercicio 16: El primer término de una progresión Aritmética vale - 7, y la diferencia común es 4. Hallar el término a_{34} y la suma de los 34 primeros términos (S_{34})

A) 125 y 2006 B) 125 y 2002
C) 126 y 2006 D) 126 y 2002
E) 124 y 2006

Ejercicio 17: Averiguar las edades que tienen cuatro individuos sabiendo que forman una progresión Aritmética creciente; que suma la edad del primero con la del cuarto 71 años y que multiplicando ambas edades resulta 1078 (Dar como respuesta la edad del mayor).

A) 96 años B) 77 años C) 49 años
D) 94 años E) 36 años

Ejercicio 18 : En una Progresión Aritmética se cumple que:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6 \quad \text{... (I)}$$

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 132 \quad \text{... (II)}$$

Hallar la suma de los valores de «a_1» que cumple con las ecuaciones (I) y (II).

A) 2 B) 3 C) 4 D) 7 E) 9

Ejercicio 19 : Si las medidas de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión Aritmética de razón (13/3) u la suma de los catetos es:

A) 82/3u B) 64/3u C) 91/3u
D) 30u E) 34/3u

Ejercicio 20 : Dada la siguiente progresión Aritmética:

$\div a_1; a_2; a_3; .....$ Se pide calcular:

$$\frac{a_3^2 - a_1^2}{a_4^2 - a_2^2}$$

Sabiendo que la suma de los dos primeros términos es el doble de la suma de el primero y el tercero.

A) 1 B) 2 C) 0 D) - 1 E) 3

Clave de Respuestas

1. E	2. C	3. A	4. E	5. E
6. C	7. C	8. B	9. C	10. C
11. D	12. B	13. D	14. C	15. D
16. A	17. C	18. C	19. C	20. D

1.6.2 PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

Es una sucesión de cantidades en la cual el primer término y la razón son diferentes de cero y además un término cualquiera excepto el primero es igual a su anterior multiplicado por una cantidad constante llamada razón. También se le denomina progresión por cociente.

Ejemplo 1 : La sucesión: 3, 12, 48, 192,................., es una progresión geométrica cuya razón es 4.

* La razón se halla dividiendo el 2º entre el 1º; 3º entre el 2º; 4º entre 3º y así sucesivamente veamos:

Sucesión: 3, 12, 48, 192,..........................

$$\textbf{Razón} = \frac{12}{3} = \frac{48}{12} = \frac{192}{48} = 4 \qquad \textbf{(Cociente común)}$$

Ejemplo 2 : La sucesión: 56, 28, 14, 7,....................., es una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{2}$; veamos:

Sucesión: 56, 28, 14, 7,..............................

$$\text{Razón} = \frac{28}{56} = \frac{14}{28} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Observación: Las progresiones geométricas pueden ser ***CRECIENTES O DECRECIENTES*** *dependiendo del signo del primer término a_1 y del valor de la razón "r".*

Así se puede establecer:

$r > 1$	$a_1 > 0$, **Progresión Creciente** $a_1 < 0$, **Progresión Decreciente**
$0 < r < 1$	$a_1 > 0$, **Progresión Creciente** $a_1 < 0$, **Progresión Decreciente**
$r < 0$	**Progresión Oscilante, tendrá los términos consecutivos de signo opuestos.**

La progresión geométrica se suele representar de la forma siguiente:

$$\div\div\ a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots\ldots\ldots : a_n$$

$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$$

$$\div\div\ a_1 : a_1 r : a_1 r^2 : \ldots\ldots\ldots\ldots : a_1 r^{n-1}$$

Donde:

- $\div\div$ → **Inicio de la progresión geométrica (PG)**
- a_1 → **Primer término**
- a_n → **Término enésimo**
- r → **Razón**

Forma Abstracta de obtener la fórmula del término n- ésimo

Sea la progresión geométrica: $\div\div\ a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots\ldots\ldots : a_n$

Aplicando la definición de progresión geométrica a los sucesivos términos, puede escribirse así:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r \\ a_4 &= a_3 \cdot r \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot r \\ a_n &= a_{n-1} \cdot r \end{aligned}\right\}$$

; pues hay (n - 1) igualdades porque se empieza por a_2 y termina en a_n.

Multiplicamos miembro a miembro las igualdades y simplificando nos queda:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \text{............ (Fórmula I)}$$

Por tanto: El término n-ésimo de una progresión geométrica es igual al primero multiplicado por la razón elevada al número de términos que le anteceden.

Ejemplo (1): Calcular el término 24 de la progresión geométrica:

$\div\div$ 4 : 12 : 36 : ....

Resolución:

La razón de la progresión es: $r = 3$ y aplicando la fórmula (I)

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$; se obtiene:

$a_{24} = 4 \cdot 3^{24-1}$ → ∴ $a_{24} = 4 \times 3^{23}$

Respuesta: El término 24 de la progresión es: 4×3^{23}.

Ejemplo (2): En una progresión geométrica, el término que ocupa el quinto lugar es 48 y la razón es 2. Hallar el primer término de la progresión.

Resolución:

Los datos son: $a_5 = 48$; $r = 2$; incógnita: $a_1 = ?$

Aplicando la fórmula (I): $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$; se obtiene: $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}$ → $48 = a_1 r^4$

De donde: $48 = a_1 \cdot 16$ → ∴ $a_1 = 3$

Respuesta: El primer término de la progresión es: 3.

Ejemplo (3): En una progresión geométrica el término de sexto lugar es 486 y el primer término es 2. Hallar la razón de la progresión.

Resolución:

Los datos son: $a_6 = 486$; $a_1 = 2$; incógnita: $r = ?$

Aplicando la fórmula (I): $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$; se obtiene: $a_6 = a_1 \cdot r^{6-1}$ → $486 = 2 \cdot r^5$

Donde: $\frac{486}{2} = r^5 \rightarrow 243 = r^5 \rightarrow \sqrt[5]{243} = r$

$\sqrt[5]{3^{5}} = r \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{r = 3}$

Respuesta: La razón de la progresión es: 3.

Ejemplo (4): Hallar el término de lugar 20 de la progresión geométrica:

$$\div\div \frac{1}{1\,000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Resolución:

- En primer lugar, calculamos la razón: $r = \frac{1/100}{1/1000} = \frac{1/10}{1/100} = 10 \quad \rightarrow \quad \boxed{r = 10}$

- El primer término es $\frac{1}{1\,000} \quad \rightarrow \quad a_1 = 10^{-3}$

Aplicando la fórmula (I): $\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$; obtenemos

$a_{20} = a_1 \cdot r^{20-1} \quad \rightarrow \quad a_{20} = 10^{-3} \cdot (10)^{19}$

Donde: $a_{20} = 10^{-3} \cdot 10^{19} = 10^{-3+19} = 10^{16}$

$\therefore \quad \boxed{a_{20} = 10^{16}}$

Respuesta: El término de lugar 20 es: 10^{22}

Ejemplo (5): Probar cuáles de las sucesiones son progresiones geométricas y cuáles no:

a) $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots\ldots\ldots\ldots$	c) 27, 45, 75, 125,...........................
b) 12, 20, 50,........................	d) $\frac{x}{x+1}, 1, \frac{x+1}{x}, \frac{x+2}{x}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

Resolución:

a) La sucesión: $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ sí es una progresión geométrica; ya que el cociente entre términos consecutivos es constante, veamos:

$$2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots\ldots$$

Razón $= \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}$

Razón $= \frac{8/9}{4/3} = \frac{2}{3}$

Razón $= \frac{16/27}{8/9} = \frac{2}{3}$

* Como se observará la razón es constante.

b) La sucesión: 12, 20, 50,............., no es una progresión geométrica, ya que el cociente entre términos consecutivos no es constante, veamos:

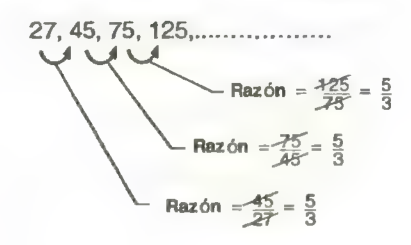
12, 20, 50,..................................

Razón $= \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

Razón $= \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$

*** Como se observará la razón "r" no es constante.**

c) La sucesión: 27, 45, 75, 125,.........; si es una progresión geométrica, ya que el cociente entre términos consecutivos es constante, veamos:

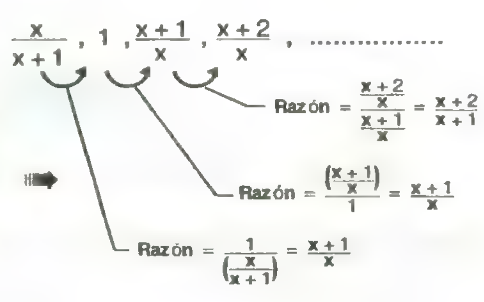


*** Como se observará la razón "r" es constante.**

d) La sucesión:

$$\frac{x}{x+1}, 1, \frac{x+1}{x}, \frac{x+2}{x}, \ldots\ldots\ldots,$$

no es una progresión geométrica, ya que el cociente entre términos consecutivos no es constante, veamos:



*** Como se observará la razón "r" no es constante.**

Ejemplo 6: Construye tres progresiones geométricas con las condiciones siguientes:

a) Que sea creciente, y el primer término valga 3.
b) Que sea decreciente y el $a_3 = -12$
c) Que sea oscilante, y el $a_5 = -16$.

Resolución:

a) Para que la **P.G.** sea creciente, cuyo primer término vale 3, la razón tiene que ser mayor que cero **($r > 0$)** y el primer término mayor que cero **($a_1 > 0$)**, veamos:

$\div\div\; a_1 : a_1r : a_1r^2 : a_1r^3 : a_1r^4$; donde $r = ?$ (Estimado alumno tú podrías darle otro valor a "r")

$\div\div\; 3 : 3.2 : 3.2^2 : 3.2^3 : 3.2^4$

$\therefore$ $\div\div\; 3 : 6 : 12 : 24 : 48$ **(P.G. Creciente)**

b) Para que la **P.G.** sea decreciente, cuyo tercer término vale -12 ($a_3 = -12$) la razón tiene que ser mayor que uno **($r > 1$)**, y el primer término menor que cero **($a_1 < 0$)**, veamos:

$\div\div\; a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ ó también:

$\div\div\; a_1 : a_1r : a_1r^2 : a_1r^3 : a_1r^4$; **Por Dato:** $a_3 = a_1r^2 = -12 = -3 \times 2^2$

Donde: $a_1 = -3$ y $r = 2$

Luego:

$\div\div\; -3 : -3 \times 2 : -3 \times 2^2 : -3 \times 2^3 : -3 \times 2^4$

$\therefore$ $\div\div\; -3 : -6 : -12 : -24 : -48$ **(P.G. Decreciente)**

c) Para que la **P.G.** sea oscilante, cuyo quinto término vale 64 ($a_5 = 64$) la razón tiene que ser menor que cero **($r < 0$)**, veamos:

$\div\div\; a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5$ ó también:

$\div\div\; a_1 : a_1r : a_1r^2 : a_1r^3 : a_1r^4$; hacemos: $a_1 = 4$ y $r = -2$

Luego: $\div\div\; 4 : 4(-2) : 4(-2)^2 : 4(-2)^3 : 4(-2)^4$

$\therefore$ $\div\div\; 4 : -8 : 16 : -32 : 64$ **(P.G. Oscilante)**

Fórmulas Derivadas de la del término n-ésimo

- **Interpolación de Medios Geométricos:**

En la fórmula del término n-ésimo, que reproducimos aquí:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ .... (I) , **intervienen cuatro números:** a_n, a_1, r y n; conocidos 3 de ellos se puede determinar el cuarto:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} \quad \text{......(II)}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \text{..............(III)}$$

El cálculo de "**n**" requiere de una operación nueva, que será estudiada en el capítulo de: Logaritmos.

La fórmula (III), permite resolver el problema de "**La interpolación de medios geométricos**", es decir el problema consiste en intercalar entre dos números otros varios que formen progresión geométrica con ellos.

> ***Observación:*** *Hay que tener presente, como en las progresiones aritméticas, que el numero de términos se compone de los dos términos dados, llamados extremos, más lo que se intercalan.*

Ejemplo 1: Interpolar 2 medios geométricos entre 3 y 81.

Resolución:

En este caso el número de términos es 4, o sea $\boxed{n=4}$ (Los dos extremos dados y los dos medios geométricos que hay que intercalar)

Aplicando la fórmula (III): $\boxed{r = \sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a_1}}}$; donde: $a_1 = 3$; $a_n = 81$

Obtenemos: $r = \sqrt[4-1]{\dfrac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{r=3}$

La progresión geométrica es: $\div\div\, a_1 : a_2 : \ldots\ldots\ldots\ldots : a_n$; ó también:

$$\div\div\, a_1 : a_1r : a_1r^2 : a_1r^3$$

$$\div\div\, 3 : 3 \times 3 : 3 \times 3^2 : 3 \times 3^3$$

$$\div\div\, \textcircled{3} : \underbrace{9 : 27}_{\text{(Medios Geométricos)}} : \textcircled{87}$$

Respuesta: Los dos medios geométricos que hay entre 3 y 87 son: 9 y 27.

Ejemplo 2: Interpolar 3 medios geométricos entre 1 y 16.

Resolución:

La progresión geométrica es de la forma: $a_1 : a_2 : \ldots\ldots\ldots : a_n$, o también:

$$\div\div\, a_1 : a_1r : a_1r^2 : a_1r^3 : a_1r^4$$

De donde:

$$\div\div\, \textcircled{1} : \underbrace{a_1r : a_1r^2 : a_1r^3}_{\text{(Medios Geométricos)}} : \textcircled{16} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

En este caso el número de términos es 5; osea $\boxed{n = 5}$ (Los dos extremos dados y los tres medios geométricos que hay que intercalar).

Aplicando la fórmula (III): $\boxed{r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}}$; donde $a_1 = 1$; $a_n = 16$

Obtenemos:

$$r = \sqrt[5-1]{\frac{16}{1}} = \sqrt[4]{16} = \pm 2 \begin{cases} \boxed{r = 2} \\ \boxed{r = -2} \end{cases}$$

Hay 2 soluciones; siendo "r" números reales, que son las siguientes:

*Cuando: $\boxed{r = 2}$; reemplazamos dicho valor en (α):

$$\because\!\because\; ① : \underbrace{1 \times 2 : 1 \times 2^2 : 1 \times 2^3}_{} : ⑯$$

$$\therefore \quad \boxed{\because\!\because\; 1 : \underbrace{2 : 4 : 8}_{} : 16} \quad \textbf{(Progresión Geométrica Creciente)}$$

Respuesta: Los 3 medios geométricos que hay entre 1 y 16 son: 2, 4, y 8.

*Cuando: $\boxed{r = -2}$; reemplazamos dicho valor en (α):

$$\because\!\because\; ① : 1(-2) : 1(-2)^2 : 1(-2)^3 : ⑯$$

$$\therefore \quad \boxed{\because\!\because\; 1 : \underbrace{-2 : 4 : -8}_{} : 16} \quad \textbf{(Progresión Geométrica Oscilante)}$$

Respuesta: Los 3 medios geométricos que hay entre 1 y 16 son: -2, 4 y -8.

> ***Observación:*** *Cuando solo se pide interpolar un medio geométrico entre dos números, recibe el nombre de Media Geométrica de los dos números.*

Sean: **a** y **b** los números entre los que queremos interpolar la media geométrica; en este caso: $a_1 = a$; $n = 3$ términos ; $a_3 = b$,

y aplicando la fórmula (III): $\boxed{r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}}$; obtenemos:

$$r = \sqrt[3-1]{\frac{b}{a}} \rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{b}{a}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Luego la **P.G.** seria: $\div\div a : ar : ar^2$ .... (β)

Reemplazamos el (α) en (β):

$$\div\div a : a\times\sqrt{\frac{b}{a}} : a\times\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

$$a\times\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}\times a^2} = \sqrt{b.a} = \sqrt{a.b}$$

La media geométrica de a y b es por tanto $\sqrt{a.b}$, concluyendo que: **La media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto.**

Ejemplo: Hallar la media geométrica de: 4 y 9.

Resolución:

Media geométrica = $\sqrt{a.b} = \sqrt{4.9} = \sqrt{36} = \boxed{6}$

Respuesta: La media geométrica de 4 y 9 es 6.

Ejemplo 3 : En una progresión geométrica de 5 términos y razón igual a 2 el término quinto vale 48. ¿ Cuánto vale el primer término ?

Resolución:

Los datos son: $n = 5$; $r = 2$; $a_5 = 48$; incógnita: $a_1 = ?$

Aplicando la fórmula (II): $\boxed{a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}}$

Obtenemos: $a_1 = \frac{a_5}{2^{5-1}} \rightarrow a_1 = \frac{48}{2^4} = \frac{48}{16} = 3$ $\therefore$ $\boxed{a_1 = 3}$

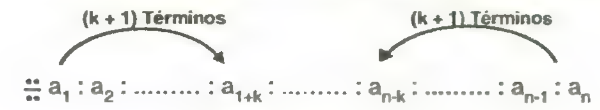
Respuesta: El primer término de la progresión vale 3.

* **PRODUCTO DE LOS n-TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA:**

El producto de los n términos de una progresión geométrica se obtiene aplicando una propiedad análoga a la que se aplicó para obtener la suma de los términos de la progresión aritmética; esta propiedad se enuncia así:

En toda progresión geométrica el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos.

Ejemplo: Sea la P.G. $\because 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486$



De donde: $18 \times 54 = 6 \times 162 = 2 \times 486 = \boxed{972}$

La demostración se basa en el concepto mismo de progresión geométrica; veamos:

(k + 1) Términos (k + 1) Términos

$$\because a_1 : a_2 : \dots\dots : a_{1+k} : \dots\dots : a_{n-k} : \dots\dots : a_{n-1} : a_n$$

En esta progresión se pueden considerar las progresiones parciales de extremos $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_{1+k}}$ y la progresión de extremos $\mathbf{a_{n-k}}$ y $\mathbf{a_n}$, siendo $\mathbf{a_{1+k}}$ y $\mathbf{a_{n-k}}$ términos equidistantes de los extremos en la progresión inicial.

Aplicando la fórmula (I) a cada progresión parcial se obtiene:

$$a_{1+k} = a_1 . r^k \dots\dots\dots (\alpha)$$
$$a_n = a_{n-k} . r^k \quad \dots\dots\dots (\beta)$$

Dividiendo: M.A.M: $\dfrac{a_{1+k}}{a_n} = \dfrac{a_1}{a_{n-k}}$

De donde: $\boxed{a_{1+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n}$ **(Fórmula IV)**

* PRODUCTO DE TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Sea la progresión geométrica: $\because a_1 : a_2 : a_3 : \dots\dots\dots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n$

Llamando P_n al producto de los n términos puede escribirse:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots\dots\dots\dots\dots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad \dots\dots\dots (\theta)$$

Invirtiendo los términos de la expresión (θ), obtenemos:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \dots\dots\dots\dots\dots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \quad \dots\dots\dots (\phi)$$

De las expresiones (θ) y (ϕ):

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots\cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots\cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicamos: M.A.M: $P_n{}^2 = (a_1 \cdot a_n).(a_2.a_{n-1}).(a_3.a_{n-2})\cdots\cdots(a_{n-2}.a_3).(a_{n-1}.a_2).(a_n.a_1)$

Se observa que los términos de cada paréntesis son equidistantes de los extremos y, por lo tanto, puede utilizarse la fórmula (IV):

$$P_n{}^2 = \underbrace{(a_1.a_n).(a_1.a_n).(a_1.a_n)\cdots\cdots(a_1.a_n).(a_1.a_n).(a_1.a_n)}_{\text{(Hay "n" términos)}}$$

$$P_n{}^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

De donde: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$ **(Fórmula V)**

*Es decir: El producto de los **n** términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado al número de términos.*

Ejemplo (1): Calcular el producto de los seis primeros términos de la progresión geométrica: $\div\div$ 2 : 6 : 18 : ....

Resolución:

La razón de la progresión es: $r = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = 3 \rightarrow$ $\boxed{r = 3}$

Aplicando la fórmula (I): $\boxed{a_n = a_1.r^{n-1}}$; **Donde:** $\begin{cases} a_n = a_6 = ? \\ n = 6 \text{ y } a_1 = 2 \end{cases}$

Obtenemos: $a_6 = 2.3^{6-1} \rightarrow a_6 = 2.3^5 = 2.243 \rightarrow \therefore$ $\boxed{a_6 = 486}$

Por la fórmula (V): $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$; **Donde:** $\begin{cases} a_1 = 2 , a_n = a_6 = 486 \\ \text{y } n = 6 \end{cases}$

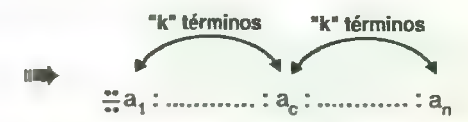
Obtenemos: $P_6 = \sqrt{(2 \times 486)^6} = (972)^3 \Rightarrow \therefore P_6 = (972)^3$

Respuesta: El producto de los seis primeros términos de la progresión es: $(972)^3$.

Ejemplo 2 : Demostrar que en una progresión geométrica de un número impar de términos, el término central es la raíz cuadrada de los extremos.

Resolución:

Si: a_1 y a_n, son términos extremos y a_c es el término central, se tiene el siguiente esquema:



La progresión geométrica anterior se puede considerar integrada por dos progresiones también geométricas.

- En la primera progresión, cuyos términos extremos son a_1 y a_c, se verifica aplicando la fórmula (I): $a_n = a_1.r^{n-1}$

  Donde: $a_c = a_1.r^{k-1}$ .... (a)

- En la segunda progresión, de extremos a_c y a_n, se tendrá:

  $a_n = a_c.r^{k-1}$ .... (b)

  De las expresiones (a) y (b):

$$a_c = a_1.r^{k-1}$$
$$a_n = a_c.r^{k-1}$$

Dividiendo: M.A.M: $\dfrac{a_c}{a_n} = \dfrac{a_1}{a_c} \rightarrow a_c^2 = a_1.a_n$

$$\therefore \; a_c = \sqrt{a_1.a_n} \quad \textbf{(Fórmula VI)}$$

Ejemplo 3 : Hallar el producto de los cinco términos de una progresión geométrica, si sabemos que el término central vale 4.

Resolución:

Sea la progresión geométrica: $a_1 : a_1r : a_1r^2 : a_1r^3 : a_1r^4$ — a_n

Término Central (a_1r^2)

Por dato: $a_1r^2 = 4$ .... (1)

De la fórmula (V): $P_n = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$ Donde: $\{a_n = a_1r^4$ y $n = 5$

Luego: $P_5 = \sqrt{(a_1 \times a_1r^4)^5} = \sqrt{(a_1^2.r^4)^5} = \sqrt{((a_1.r^2)^2)^5}$

$P_5 = (a_1 . r^2)^5$ .... (2)

Reemplazamos (1) en (2): $P_5 = (4)^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$ → ∴ $P_5 = 2^{10}$

Respuesta: El producto de los cinco términos de la progresión es: 2^{10}

* **SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA:**

Sea la progresión geométrica: $\div\div\; a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots : a_{n-1} : a_n$

Llamando "S_n" a la suma de los "n" términos puede escribirse:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

multiplicamos los dos miembros de la igualdad (α), por la razón "r", se obtiene:

$$S_n.r = a_1.r + a_2.r + a_3.r + \ldots\ldots + a_{n-2}.r + a_{n-1}.r + a_n.r$$

Por la definición de progresión geométrica la última igualdad puede también escribirse así:

$$a_2 = a_1.r\,;\; a_3 = a_2.r\,;\; \ldots\ldots;\; a_{n-1} = a_{n-2}.r\,;\; a_n = a_{n-1}.r$$

Luego: $S_n.r = a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n + a_n r \quad \ldots\ldots (\beta)$

Restamos miembro a miembro las igualdades (α) y (β):

$$\begin{cases} S_n.r = \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots\ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n r \\ S_n = a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots\ldots + \cancel{a_{n-2}} + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} \end{cases}$$

- M.A.M: $S_n.r - S_n = a_n.r - a_1$; factorizamos "S_n" en el primer miembro:

$$S_n(r-1) = a_n.r - a_1 \rightarrow \therefore \quad S_n = \frac{a_n . r - a_1}{r - 1}$$ **(Fórmula VII)**

Osea:

*La suma de los **n** términos de una progresión geométrica es una fracción cuyo numerador es la diferencia entre el producto del último término por la razón y el término primero; y cuyo denominador es la razón disminuida en uno.*

En la expresión anterior se puede sustituir el término n-ésimo en función del primero y la razón y así llegar a una fórmula que depende exclusivamete de a_1 y r. Es decir:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, y sustituyendo en la fórmula (VII): $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$; tendremos:

$$S_n = \frac{(a_1 \cdot r^{n-1}) \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^{n-1+1} - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^{n} - a_1}{r - 1}$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \qquad \textbf{(Fórmula VIII)}$$

Ejemplo (1) : En la progresión geométrica de razón 2 y cuyo primer término vale 6, calcular la suma de los siete primeros términos.

Resolución:

- En primer lugar, calculamos el término siete ($a_7 = ?$)

  De la fórmula (I): $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$; Donde: $n = 7$; $r = 2$ y $a_1 = 6$

  Obtenemos: $a_7 = 6 \cdot 2^{7-1} \rightarrow a_7 = 6 \cdot 2^6 = 6 \times 64 \rightarrow a_7 = 384$

- En segundo lugar, calculamos, la suma de los siete primeros términos de la P.G.

  de la fórmula (VII): $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$; Donde: $n = 7$; $r = 2$ y $a_1 = 6$

  Obtenemos: $S_7 = \dfrac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{384 \times 2 - 6}{2 - 1} = \dfrac{768 - 6}{1} \quad \therefore \quad S_7 = 762$

Respuesta: La suma de los siete primeros términos de la progresión es: 762.

Ejemplo (2) : Una progresión geométrica tiene como primer término igual a 2 y razón igual a 3. Hallar la suma de sus 12 términos.

Resolución:

- En primer lugar calculamos el término doce ($a_{12} = ?$)

  De la fórmula (I): $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$; **Donde:** $n = 12$; $a_1 = 2$ y $r = 3$

  Obtenemos: $a_{12} = 2 \cdot 3^{12-1} \rightarrow a_{12} = 2 \times 3^{11}$

- En segundo lugar, calculamos la suma de sus 12 términos.

De la fórmula (VII): $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$; **Donde:** $\begin{cases} a_n = a_{12} = 2.3^{11} \\ a_1 = 2 \ ; \ r = 3 \end{cases}$

Obtenemos: $S_{12} = \dfrac{a_{12} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{2 \cdot 3^{11} \cdot 3 - 2}{3 - 1} = \dfrac{2 \cdot 3^{12} - 2}{2}$

$$\therefore \ S_{12} = \frac{\cancel{2}(3^{12} - 1)}{\cancel{2}} = \boxed{3^{12} - 1}$$

Respuesta: La suma de sus 12 términos de la progresión es: $3^{12} - 1$.

Ejemplo (3): La suma de los 7 primeros términos de una progresión geométrica de razón igual a 2 es 127. Construir esta progresión.

Resolución:

Los datos son: $S_7 = 127$; $n = 7$ y $r = 2$

De la fórmula (VIII): $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$; obtenemos:

$$S_7 = \frac{a_1(r^7 - 1)}{r - 1} \ \rightarrow \ 127 = \frac{a_1(2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$127 = a_1(128 - 1) \ \rightarrow \ 127 = a_1(127) \ \rightarrow \ \therefore \ \boxed{1 = a_1}$$

* Como ya conocemos el primer término ($a_1 = 1$) y la razón ($r = 2$), la progresión geométrica que se forma es:

$$\because\because \ a_1 : a_1.r : a_1.r^2 : a_1.r^3 : a_1r^4 : a_1r^5 : a_1r^6$$

Luego $\because\because \ 1 : 1 \times 2 : 1 \times 2^2 : 1 \times 2^3 : 1 \times 2^4 : 1 \times 2^5 : 1 \times 2^6$

$\therefore$ $\boxed{\because\because \ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64}$ **(Progresión Geométrica)**

* **PROGRESIÓN GEOMÉTRICA INDEFINIDA Y DECRECIENTE:**

Sea la progresión geométrica indefinida:

$$\because\because \ a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots : a_n : \ldots\ldots\ldots$$

Siendo: **$0 < r < 1$** se verifica **$|r| < 1$**; o sea es decreciente, entonces podemos establecer el cambio:

$$\boxed{r = \frac{1}{q}} \quad ; \quad \text{siendo:} \quad |q| > 1$$

Elevamos a la "n" ambos miembros de la igualdad anterior: $\boxed{r^n = \left(\frac{1}{q}\right)^n} \rightarrow r^n = \frac{1}{q^n}$

La potencia q^n crece infinitamente al crecer el exponente n y, por tanto, la fracción $1 / q^n$ puede ser tan pequeña como se quiera eligiendo "n" suficientemente grande. Es decir:

$r^n = \frac{1}{q^n}$ se aproxima a cero al crecer **n**.

Siendo la progresión geométrica indefinida el número "n" de términos es infinito y por tanto **r^n** es prácticamente cero. Si en la fórmula (VIII) se hace: **$r^n = 0$**; queda:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - r}} \quad \textbf{(Fórmula IX)}$$

Es decir: *La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica indefinida decreciente es una fracción cuyo numerador es el primer término y cuyo denominador es la unidad disminuida en la razón.*

Ejemplo 1: Hallar el valor hacia el cual tiende la suma de infinitos términos de la siguiente progresión geométrica:

$$\div\div\; 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Resolución:

Aplicando la fórmula (IX): $\boxed{S = \frac{a_1}{1 - r}}$; **Donde:** $a_1 = 9$ **(Primer Término)**; $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ **(Razón)**

Obtenemos: $S = \dfrac{9}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{9}{\frac{2}{3}} = \dfrac{9 \times 3}{2} = 13{,}5 \Rightarrow \therefore \boxed{S = 13{,}5}$

Ejemplo 2 : Hallar el valor hacia el cual tiende la suma de infinitos términos de la siguiente progresión geométrica:

$$\div\div\; 20 : 4 : \frac{4}{5} : \frac{4}{25} : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Resolución:

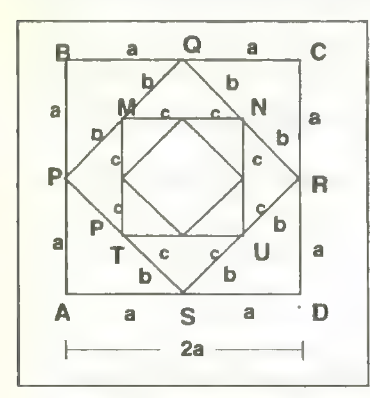
Aplicando la fórmula (IX): $S = \dfrac{a_1}{1-r}$; **Donde:** $\begin{cases} a_1 = 20 \text{ (Primer Término)} \\ r = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5} \text{ (Razón)} \end{cases}$

Obtenemos: $S = \dfrac{20}{1-\dfrac{1}{5}} = \dfrac{20}{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{20\times 5}{4} = 25 \Rightarrow \therefore \boxed{S = 25}$

Ejemplo 3 : Se tiene una cuadrado de lado igual a 1cm.; uniendo los puntos medios de sus lados se forma otro cuadrado; uniendo los puntos medios de sus lados de este segundo cuadrado se forma un tercer cuadrado, y así se prosigue indefinidamente. ¿ Cuánto vale la suma de las áreas de todos estos cuadrados cuando el número de ellos tiende a infinito ?

Resolución:

Para su mejor entendimiento, hacemos el siguiente dibujo:



- Llamamos al lado del cuadrado ABCD = 2a

Donde: $\underbrace{\text{Área}\,\square ABCD}_{1} = (2a)^2$

$1 = 4a^2 \rightarrow a^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{1}{4}}$

Luego:

$\therefore \boxed{a = \dfrac{1}{2}}$ (Sólo tomamos el valor positivo ya que el valor de "a" no puede ser negativo)

- En el ◺ RCQ : Calculamos el valor de la "b^2" por el Teorema de Pitagoras:

$\overline{QR}^2 = \overline{QC}^2 + \overline{CR}^2$; pero: $\begin{cases} \overline{QC} = a \\ \overline{CR} = a \end{cases}$

$(2b)^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 4b^2 = 2a^2 = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2\left(\dfrac{1}{4}\right)$

$4b^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow \boxed{b^2 = \dfrac{1}{8}}$

Luego, el área del cuadrado PQRS $=(2b)^2 = 4b^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$

$\therefore$ área □PQRS $= \frac{1}{2}$ **(Segundo Cuadrado)**

-En el △ MQN: Calculamos el valor de "c^2" por el Teorema de Pitagoras:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QN}^2 \rightarrow (2c)^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$$

$$4c^2 = 2\left(\frac{1}{8}\right) \rightarrow \therefore \boxed{c^2 = \frac{1}{16}}$$

Luego; área del cuadrado TMNU $= (2c)^2 = 4c^2 = 4\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}$

$\therefore$ área □TMNU $= \frac{1}{4}$ **(Tercer Cuadrado)**

La Progresión Geométrica que se forma es:

$\because$ área 1° cuadrado : área 2° cuadrado : área 3° cuadrado : ....

$\because$ $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} :$ ....

Ahora calculamos la suma de las áreas de todos estos cuadrados cuando el número de ellos tiende al infinito; veamos:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-r}}$$

Donde:
- $a_1 = 1$ **(Primer Término)**
- $r = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ **(Razón)**

Reemplazando valores en la fórmula, obtenemos: $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 6

Ejercicio 1 : Probar cuáles de las sucesiones son progresiones geométricas y cuáles no.

I. 12; 4; 4/3; ...... **II.** 16; 4; 1;......

III. 50; 20; 8; 2; ... **IV.** $\frac{x+3}{x};\frac{x}{x+3};\frac{x^2}{(x+3)^2};...$

Resolución:

Rpta.

Ejercicio 2 : Construye tres progresiones geométricas con las condiciones siguientes:

a) Que sea creciente, y el primer término valga 5.

b) Que sea decreciente y el $a_6 = -4$

c) Que sea Oscilante, y el $a_3 = -10$

Resolución:

Rpta.

Ejercicio 3 : Halla el octavo término de la Progresión Geométrica.

$$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : .....$$

Resolución:

Rpta. 128

Ejercicio 4 : En una Progresión Geométrica el primer término vale 3 y la razón vale 2 hallar el término de lugar 10.

Resolución:

Rpta. 1 536

Ejercicio 5 : Interpolar 5 medios Geométricos entre 8 y 1/8.

Resolución:

Rpta. 4; 2; 1; 1/2; 1/4; ó - 4; 2; - 1; 1/2; - 1/4

Ejercicio 6 : Interpolar 5 medios geométricos entre 7 y 5 103.

Resolución:

Rpta. 21; 63; 189; 567; 1701 ó - 21; 63; - 189; 567; - 1701

Ejercicio 7 : Obtener la suma de una Progresión Geométrica ilimitada de razón 2/3 y cuyo primer término vale 6.

Resolución:

Rpta. 18

Ejercicio 8 : Dados: $a_{12} = 72$ y r 1/2; en una progresión geométrica; obtener a_8

Rpta. 1 152

Ejercicio 9 : Probar que en toda progresión Geométrica, cada término es igual a la raiz cuadrada del producto del que le precede por el que le sigue (media geométrica).

Resolución:

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

NIVEL I

Ejercicio 1: El séptimo término de una progresión Geométrica vale 243 y la razón 3; hallar el primer término.

A) 3 **B)** 1/3 **C)** 1/6 **D)** 1/9 **E)** 1/2

Ejercicio 2: En una progresión Geométrica el primer término vale 6 y el término de lugar 15 vale 54. Hallar el octavo término.

A) 18 **B)** 36 **C)** 9 **D)** 27 **E)** 6

Ejercicio 3: En una Progresión Geométrica se sabe que: $a_{15} = 512$ y $a_{10} = 16$, hallar la razón y el primer término.

A) $r = 2$ y $a_1 = 1/16$ **B)** $r = 2$ y $a_1 = 1/32$
C) $r = 2$ y $a_1 = 1/8$ **D)** $r = 2$ y $a_1 = 1/64$
E) $r = 2$ y $a_1 = 1/4$

Ejercicio 4: Hallar el término de lugar 16 de la progresión Geométrica

$$\div\div \ \frac{1}{3} : \frac{2}{9} : \frac{4}{27} : \frac{8}{81} : \ldots\ldots\ldots$$

A) $2^{-15}.3^{-16}$ **B)** $2^{-15}.3^{16}$ **C)** $2^{16}.3^{-15}$
D) $3^{15}.2^{-16}$ **E)** $2^{15}.3^{-16}$

Ejercicio 5: Hallar el producto de los once primeros términos de una progresión Geométrica si sabemos que el término central vale 2.

A) 3 072 **B)** 1 024 **C)** 2 048
D) 4 096 **E)** 5 120

Ejercicio 6: Hallar la suma de los seis primeros términos de la Progresión Geométrica:

$$\frac{4}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \ldots\ldots$$

A) 21/4 **B)** 21/8 **C)** 23/6
D) -21/8 **E)** -16/3

Ejercicio 7: Sabiendo que: $a_1 = 7$ y $r = 2$, Hallar la suma de los nueve primeros términos de una progresión Geométrica.

A) 5 377 **B)** 3 577 **C)** 7 735
D) 5 735 **E)** 7 537

Ejercicio 8: En una progresión Geométrica el primer término vale - 5 y la razón vale - 1/5. Hallar el término de lugar 10.

A) 5^{-7} **B)** 5^{-8} **C)** 5^{-9} **D)** 5^{-10} **E)** 5^{-6}

Ejercicio 9: Nos dan el primer término y la razón de una progresión Geométrica, que valen respectivamente 27 y 1/3. Nos pieden hallar el producto de los ocho primeros términos (p_8)

A) $p_8 = 1/27$ **B)** $p_8 = 1/81$ **C)** $p_8 = 1/64$
D) $p_8 = 1/243$ **E)** $p_8 = 1/16$

Ejercicio 10: Hallar la suma de los seis primeros términos de la progresión Geométrica:

$$\frac{2}{3} ; 1 ; \frac{3}{2} ; \ldots\ldots\ldots$$

A) 665/8 **B)** 665/48 **C)** 647/64
D) 665/64 **E)** 656/32

Ejercicio 11: Suponiendo que el numerador y el denominador tienen infinitos términos, calcular el valor de la fracción:

$$\frac{1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + \ldots\ldots}{1/5 + 1/25 + 1/125 + 1/625 + \ldots\ldots}$$

A) 3/5 B) 5/2 C) 3 D) 2 E) 4

Ejercicio 12: La suma de los términos de una P.G decreciente y prolongada indefinidamente, es el doble de la suma de los cinco primeros términos. Hallar la razón.

A) 1/4 B) 1/2 C) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

D) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ E) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. B	4. E
5. C	6. B	7. B	8. B
9. B	10. B	11. D	12. D

NIVEL II

Ejercicio 1: Hallar el término de lugar 12 de la progresión Geométrica:

$$\div\div\ 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \ldots\ldots$$

A) 6×10^{-10} B) 3×2^{-11} C) 2×3^{-10}
D) 3×2^{-10} E) 6×10^{-12}

Ejercicio 2: El primer término de una progresión Geométrica vale 1 y la razón es 2. Hallar el término a_7 y el producto de los siete primeros términos (p_7)

A) a_7=32; $p_7=2^{10}$ B) a_7=64; $p_7=2^{21}$
C) a_7=16; $p_7=2^{18}$ D) a_7=64; $p_7=2^{20}$
E) a_7=32; $p_7=2^{21}$

Ejercicio 3: Calcular la suma de los 12 primeros términos de la progresión:

$$\div\div\ 1 : \sqrt{3} : 3 : \ldots\ldots\ldots$$

A) $728(\sqrt{3}+1)$ B) $364(\sqrt{3}-1)$

C) $364(\sqrt{3}+1)$ D) $182(\sqrt{3}+1)$

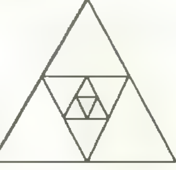
E) $346(\sqrt{3}+1)$

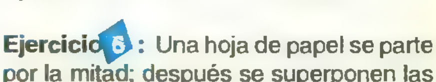
Ejercicio 4: La suma de los términos de una Progresión Geométrica decreciente ilimitada es 4; y su primer término es 3. ¿Cuál será la suma de los términos de la Progresión que tuviera como términos a los cuadrados de los del anterior.

A) 16 B) 9,6 C) 12 D) 15 E) 7,2

Ejercicio 5: Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero, cuya área es de 16cm² se obtiene un segundo triángulo equilátero; repitiendo la construcción con este segundo triángulo se obtiene un tercero y así se prosigue indefinidamente. Hallar la suma de todas las áreas de los triángulos obtenidos por el procedimiento descrito, cuando el número de ellos tiende a infinito.

A) 8 cm²
B) 16 cm²
C) 8/3 cm²
D) 16/3 cm²
E) 32/3 cm2



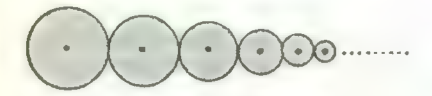


Ejercicio 6: Una hoja de papel se parte por la mitad; después se superponen las

dos mitades y se vuelven a partir por la mitad, y así sucesivamente. Después de ocho cortes.¿Cuántos trocitos de papel habrá?

A) 256 **B)** 260 **C)** 510 **D)** 501 **E)** 105

Ejercicio 7 : Un círculo tiene un diamentro de 2m; un segundo círculo tangente exterior del primero tiene un diametro de 1 m, un tercer círculo, tangente exterior al segundo (y con el centro alineado con el del primero) tiene un diámetro igual a 1/2m; si se continúa indefinidamente construyendo círculos en las mismas condiciones. ¿Cuánto suman las áreas de estos infinitos círculos?



A) $2\pi m^2$ **B)** $(4/3)\pi m^2$ **C)** $(3/4)\pi m^2$
D) $(3/2)\pi m^2$ **E)** $3\pi m^2$

Ejercicio 8 : Si el segundo y el sexto término de una progresión Geométrica son 24 y 96. ¿Cuál es el cuarto término positivo?

A) $2\sqrt{30}$ **B)** 16 **C)** 48

D) 24 **E)** $4\sqrt{3}$

Ejercicio 9 : Sabiendo que A; B y C están en progresión Geométrica en ese orden, entonces el producto (A + B + C). (A - B + C) es igual a:

A) $A^2 + B^2 + C^2$ **B)** $A^2 - B^2 + C^2$
C) $A^2 + B^2 - C^2$ **D)** $A^2 - B^2 - C^2$
E) $- A^2 + B^2 + C^2$

Ejercicio 10 : La suma de los 7 primeros términos de una Progresión Geométrica Creciente es 2 186, y la razón del séptimo término sobre el segundo término es 243. Hallar el término de lugar 4.

A) 12 **B)** 18 **C)** 54 **D)** 24 **E)** 162

Ejercicio 11 : Una Progresión Geométrica admite 4 términos siendo la suma de sus extremos 27 y la de los centrales 18. Proporcionar la suma de cifras del mayor de estos números.

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Ejercicio 12 : Los tres números positivos en progresión Aritmética que aumentados en 3; 3 y 7 respectivamente forman una progresión geométrica de suma 28 son:

A) 3; 5 y 7 **B)** 2; 6 y 10 **C)** 3; 6 y 9
D) 1; 5 y 9 **E)** 3; 7 y 11

Ejercicio 13 : La diferencia del tercer término menos el sexto de una progresión Geométrica es 26 y el cociente 27. Calcular el primer término.

A) 245 **B)** 234 **C)** 243 **D)** 342 **E)** N.A

Ejercicio 14 : Tres madres impacientes esperan consulta con niños de; 1; 37 y 289 días de nacido. El médico para entretenerlas, les pide que averiguen dentro de cuántos días las edades de sus niños estarán en progresión geométrica.

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Clave de Respuestas

1. D	2. B	3. C	4. B
5. D	6. A	7. B	8. C
9. A	10. C	11. D	12. D
13. C	14. B		

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Hallar el número de términos y la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 7 y el último 567 y la suma de todos los términos es 847.

A) 3; 5 **B)** 5; 3 **C)** 5; 5 **D)** 4; 5 **E)** 6; 3

Resolución:

- Sabemos que: $a_1 = 7$ *(Primer Término)*, $a_n = 567$ *(último término)*
  $Sn = 847$ *(Suma de todos los términos)*

- Aplicando la fórmula: $a_n = a_1 . r^{n-1}$; obtenemos:

$$567 = 7\,r^{n-1} \Rightarrow 81 = r^{n-1} \quad \text{...(I)}$$

- Aplicando la fórmula: $S_n = \dfrac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$; obtenemos:

$$847 = \frac{7\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \Rightarrow 121 = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{...(II)}$$

dividimos entre "r" al numerador y denominador de la fracción del segundo miembro de la expresión (II).

$$121 = \frac{\frac{r^n - 1}{r}}{\frac{r-1}{r}} \Rightarrow 121 = \frac{\frac{r^n}{r} - \frac{1}{r}}{\frac{r}{r} - \frac{1}{r}} \Rightarrow 121 = \frac{r^{n-1} - \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r}} \quad \text{...(III)}$$

- Sustituimos (I) en (III):

$$121 = \frac{81 - \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r}} \Rightarrow 121 - 121\left(\frac{1}{r}\right) = 81 - \frac{1}{r}$$

$$40 = 120\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \therefore\ r = 3$$

- Reemplazando el valor de r = 3, en (I)

$$81 = 3^{n-1} \Rightarrow 3^4 = 3^{n-1} \Rightarrow 4 = n-1 \Rightarrow \therefore \boxed{n = 5}$$

∴ El número de términos y la razón de la progresión geométrica son: 5 y 3 **Rpta. B**

2. En una progresión aritmética la suma esta representada por el número $\overline{aaa}$. El primer término y la razón son iguales a 1. Calcular el número de términos.

A) 35 B) 36 C) 37 D) 18 E) 19

Resolución:

Recuerda que

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$

- Sabemos que: $\boxed{a_1 = 1}$; $\boxed{r = 1}$

- Aplicando la fórmula: $S = \left(\dfrac{2a_1 + (n-1)\,r}{2}\right) \times n$; obtenemos:

$$\overline{aaa} = \left(\frac{2 \times 1 + (n-1) \cdot 1}{2}\right) \times n$$

$$\overline{aaa} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \times n$$

$$111a = \frac{(n+1) \times n}{2} \Rightarrow 222a = (n+1) \times n$$

$$37 \times (6a) = (n+1) \times n$$

Por comparación de términos: i) $37 = n+1 \Rightarrow \boxed{n = 36}$

ii) $6a = n \Rightarrow 6a = 36 \Rightarrow \boxed{a = 6}$

∴ El número de términos de dicha progresión aritmética es 36 **Rpta B**

3. Cuando se suman los diez primeros términos de una progresión aritmética es 4 veces la suma de los cinco primeros términos, la razón entre el primer término y la diferencia común es:

A) 1: 2 B) 2: 1 C) 1: 4 D) 4: 1 E) 1: 1

Resolución:

- Aplicando la fórmula: $S = \dfrac{\left(2a_1 + (n-1)\,r\right)}{2} \times n$; obtenemos:

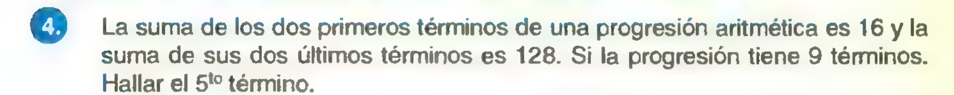
$$S_{10} = \left(\frac{2a_1 + (10-1)\,r}{2}\right) \times 10 \Rightarrow \boxed{S_{10} = \left(2a_1 + 9r\right) \times 5} \;...(I)$$

$$S_5 = \left(\frac{2a_1 + (5-1)\,r}{2}\right) \times 5 \Rightarrow \boxed{S_5 = \left(\frac{2a_1 + 4r}{2}\right) \times 5} \;...(II)$$

- De acuerdo al enunciado:

$$\left(2a_1 + 9r\right) \times \cancel{5} = \cancel{4}\left[\left(\frac{2a_1 + 4r}{\cancel{2}}\right) \times \cancel{5}\right]$$

$$2a_1 + 9r = 4a_1 + 8r \Rightarrow r = 2a_1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} = \frac{a_1}{r}}$$


∴ La razón entre el primer término y la diferencia común es: 1/2 **Rpta. A**

4. La suma de los dos primeros términos de una progresión aritmética es 16 y la suma de sus dos últimos términos es 128. Si la progresión tiene 9 términos. Hallar el 5^{to} término.

A) 32 **B)** 38 **C)** 36 **D)** 34 **E)** 30

Resolución:

Sean los 9 términos de la Progresión Aritmética:

$$a;\ (a + r);\ (a + 2r);\ (a + 3r)\ ....;\ (a + 8r)$$

- **Del enunciado**; planteamos las ecuaciones:

i) $a + (a + r) = 16 \Rightarrow \boxed{2a + r = 16}$ **...(I)**

ii) $(a + 7r) + (a + 8r) = 128 \Rightarrow \boxed{2a + 15r = 128}$ **...(II)**

- Restamos miembro a miembro (II) y (I):

$$14r = 112 \Rightarrow \therefore \boxed{r = 8}$$

Sustituimos el valor de r = 8; en (I):

$$2a + 8 = 16 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 4}$$

Luego: El quinto término = (a + 4r) = 4 + 4(8) = 36

∴ **El quinto término es: 36** **Rpta. C**

5. El límite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos es 9 y el segundo término 2. Calcular el primer término.

A) 3 B) 4 C) 5/2 D) 7/2 E) 9/2

Resolución:

Por Fórmula: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$ Donde: $\begin{cases} a_1 = \text{primer término} \\ r = \text{razón} \end{cases}$

Sabemos que $r = \dfrac{a_2}{a_1}$ $\begin{matrix}\rightarrow \textit{Segundo término} \\ \rightarrow \textit{Primer término}\end{matrix}$ $\Rightarrow r = \dfrac{2}{a_1} \Rightarrow a_1 = \dfrac{2}{r}$ ... (I)

- Sustituimos (I) en la fórmula:

$$S_\infty = \frac{\frac{2}{r}}{1-r} \Rightarrow 9 = \frac{2}{r\,(1-r)} \Rightarrow 9r\,(1-r) = 2 \Rightarrow 9r - 9r^2 = 2$$

$$9r^2 - 9r + 2 = 0$$

$$\begin{matrix} 3r & & -2 \\ 3r & & -1 \end{matrix}$$

Luego: (3r - 2) (3r - 1) = 0 ; igualamos cada factor a cero.

i) $3r - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{r = 2/3}$ ii) $3r - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{r = 1/3}$

- Sustituimos: r = 2/3 en (I): $a_1 = \dfrac{2}{2/3}$ ∴ $a_1 = 3$

- Sustituimos: r = 1/3 en (I): $a_1 = \dfrac{2}{1/3}$ $a_1 = 6$

∴ **El primer término de la P.G. decreciente de infinitos términos es: 3** **Rpta. A**

6. En una progresión Aritmética se sabe que:

$t_2 + t_5 = 46$ y $t_4 + t_9 = 82$, Entonces la razón pertenece al intervalo.

A)] 4; 6 [**B)**] 5/22; 5 [**C)**] 5; 7 [**D)**] 6; 8 [**E)**] 13/2; 7 [

Resolución:

Sea la Progresión Aritmética: a; (a + r); (a + 2r); (a + 3r) ;.......; (a + nr)

Luego: $t_2 + t_5 = 46 \Rightarrow (a + r) + (a + 4r) = 46 \Rightarrow \boxed{2a + 5r = 46}$ ...(I)

$t_4 + t_9 = 82 \Rightarrow (a + 3r) + (a + 8r) = 82 \Rightarrow \boxed{2a + 11r = 82}$ ...(II)

- Restamos miembros las ecuaciones (II) y (I); obteniendo:

$$6r = 36 \Rightarrow \boxed{r = 6}$$

∴ La razón pertenece al intervalo] 5; 7 [**Rpta. C**

7. Si el primer término de una Progresión Aritmética de enteros consecutivos es: $k^2 + 1$, la suma de los $2k + 1$ primeros términos de dicha progresión puede ser expresada como:

A) $(k + 1)^3 + k^3$ **B)** $(k - 1)^3 + k^3$ **C)** $(k + 1)^3$
D) $(k + 1)^2 + k^3$ **E)** $(2k + 1)(k + 1)^2$

Resolución:

Sabemos que: $\boxed{a_1 = k^2 + 1}$; $\boxed{r = 1}$ *(por ser enteros consecutivos)*

$\boxed{n = 2k + 1}$ $\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)\,r}$

$\boxed{a_n = (k^2 + 1) + (2k + 1 - 1).\,1 \Rightarrow a_n = k^2 + 2k + 1}$

- De la fórmula: $S_n = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n$, obtenemos:

$$S = \left[\frac{(K^2 + 1) + (K^2 + 2K + 1)}{2}\right] \times (2K + 1)$$

$$S = \left(\frac{2K^2+2K+2}{2}\right)\times(2K+1) = \frac{\not{2}\left(K^2+K+1\right)}{\not{2}}\times(2K+1)$$

$$S = 2K^3+K^2+2K^2+K+2K+1 = \underbrace{K^3+3K^2+3K+1}+K^3$$

$\therefore$ $\boxed{S = (K+1)^3+K^3}$ **Rpta. A**

8. Tres números a_1, a_2 y a_3 forman una Progresión aritmética; a_1; a_3 y a_2 forman una progresión geométrica y Además: $a_1+a_2+a_3=60$. Calcular el mayor de estos números.

A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) 10

Resolución:

Progresión Aritmética: $\underbrace{a_1 \; ; \; a_2}_{r} \; ; \; \underbrace{a_2 \; ; \; a_3}_{r}$ $\Rightarrow$ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ $\Rightarrow$ $\boxed{2a_2 = a_1 + a_3}$ **(I)**

Progresión Geométrica: $\underbrace{a_1 \; ; \; a_3}_{R} \; ; \; \underbrace{a_3 \; ; \; a_2}_{R}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a_3}{a_1} = \dfrac{a_2}{a_3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_3^2 = a_1 \cdot a_2}$ **(II)**

- De la expresión: $a_1+a_2+a_3 = 60$ $\Rightarrow$ $a_1+a_3+a_2 = 60$ .....**(III)**

  - Sustituimos (I) en (III): $2a_2 + a_2 = 60$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_2 = 20}$

  - Sustituimos el valor de $a_2 = 20$; en (I):

  $$2(20) = a_1 + a_3 \Rightarrow \boxed{a_1 = 40 - a_3} \text{ ....(IV)}$$

  - Sustituimos el valor de $a_2 = 20$ y (IV) en (II):

  $$a_3^2 = (40-a_3)\cdot 20 \Rightarrow a_3^2 + 20a_3 - 800 = 0$$

  a_3 ⟶ -20

  a_3 ⟶ $+40$

Luego: $(a_3 - 20)(a_3 + 40) = 0$

i) $a_3 - 20 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_3 = 20}$ **(No cumple)**

ii) $a_3 + 40 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_3 = -40}$ **(Sí cumple)**

- Sustituimos $a_2 = 20$ y $a_3 = -40$; En (I):

$2(20) = a_1 + (-40) \Rightarrow \therefore \boxed{a_1 = 80}$

$\therefore$ **El mayor de estos números es: $a_1 = 80$** **Rpta. D**

9. Los tres términos de una progresión aritmética que aumentados en 2; 3 y 8 respectivamente son proporcionales a 10; 25 y 50 son:

A) 2; 5 y 8 **B)** 3; 6 y 9 **C)** 3; 7 y 11 **D)** 2; 6 y 10 **E)** 2; 7 y 12

Resolución:

- Sea la Progresión Aritmética: $a; a+r; a+2r; .....(\alpha)$

Luego: $\dfrac{a+2}{10} = \dfrac{a+r+3}{25} = \dfrac{a+2r+8}{50}$

(1) entre la primera y la segunda fracción; (2) entre la segunda y la tercera.

De (1): $\dfrac{a+2}{\not{10}} = \dfrac{a+r+3}{\not{25}} \Rightarrow \dfrac{a+2}{2} = \dfrac{a+r+3}{5} \Rightarrow 5a+10 = 2a+2r+6$

$\boxed{3a+4 = 2r}$ ....(I)

De (2): $\dfrac{a+r+3}{25} = \dfrac{a+2r+8}{50} \Rightarrow 2(a+r+3) = a+2r+8$

$2a + \not{2r} + 6 = a + \not{2r} + 8 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

- Reemplazamos el valor de $a = 2$; En (I): $3(2) + 4 = 2r \Rightarrow \boxed{r = 5}$

- Reemplazamos el valor de $a = 2$ y $r = 5$; En (α):

P.A. $a; a+r; a+2r = 2 ; 2+5 ; 2+2(5) = 2 ; 7 ; 12$ **Rpta. E**

10 Calcular la suma: $S = \dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{15}{64} + \dfrac{31}{256} + \ .....$

A) 8/7 **B)** 5/3 **C)** 6/5 **D)** 7/5 **E)** 8/5

Resolución:

Sabemos que: $\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$; $\frac{7}{16}=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}$; $\frac{15}{64}=\frac{1}{4}-\frac{1}{64}$; $\frac{31}{256}=\frac{1}{8}-\frac{1}{256}$

Luego: $S=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{64}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{256}\right)+\ldots\ldots$

Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots\ldots\right)$$

$$S=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

Recuerda Que:

$S_{\infty}=\frac{a}{1-r}$ *Donde:* $\begin{cases} a = \text{primer termino} \\ r = \text{razón} \end{cases}$

$S=2-\frac{1}{3}$ ➡ $\therefore$ $\boxed{S=\frac{5}{3}}$ **Rpta. B**

ORDEN Y VALOR ABSOLUTO

2.1 SISTEMA DE LOS NúMEROS REALES (IR)

Un conjunto de vital importancia es el conjunto de los números reales que se denota por IR. El conjunto de los números reales es el conjunto IR(IR $\neq \phi$).

El conjunto IR de los números reales tiene como elementos a:

- Todos los números naturales (0; 1; 2; 3; 4; 5; ...)
- Todos los números enteros (... -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4;...)
- Todos los números racionales (... 3 / 2; 5 / 9; 0,6; 1,2; 6,9; 0,3; 1,2; ....)
- Todos los números irracionales ($\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{6}$;......)

2.1.1 ORDEN DE IR:

***Axioma:** En IR existe un subconjunto, llamado el de los Reales positivos que satisface las condiciones.*

1) Cada $a \in$ IR, satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:
$a \in IR^+$; $a \in IR^-$; $a = 0$

2) Si $a \in$ IR y $b \in$ IR, entonces: $a + b \in IR^+$ y $a \,.\, b \in IR^+$

2.1.2 DEFINICIÓN:

Si: a; b $\in$ IR se dice que "a es menor que b" y se denota con $a < b$. Si y sólo si: $b - a \in IR^+$.

De esta definición se tienen: $a \in IR^+ \Leftrightarrow a - 0 \in IR^+ \Leftrightarrow 0 < a$

Observaciones:

1) *Si: $a < b$, tambien se escribe $b > a$ (se lee "b" es mayor que a")*
2) *Se dice que "a es menor o igual que b" y se escribe $a \leq b$ sí y sólo si $a < b$ ó $a = b$. En forma similar, "b es mayor o igual que a" y se escribe $b \geq a$; si y sólo si $b > 0$ ó $b = a$*

Proposiciones:

a) Si: $a > 0 \Leftrightarrow$ "a" es positivo
b) Si: $a < 0 \Leftrightarrow$ "a" es negativo
c) Si: $a > b \Leftrightarrow$ "a - b" es positivo
d) Si: $a < b \Leftrightarrow$ "a - b" es negativo
e) Si: $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$
f) Si: $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$
g) Si: $a < b < c \Leftrightarrow (a < b) \wedge (b < c)$
h) Si: $a < b \leq c \Leftrightarrow [a < b \wedge (b < c \vee b = c)]$

Nota: Las relaciones $a < b$ y $a > b$ se llaman desigualdades estrictas mientras que $a \leq b$ y $a \geq b$ se llaman desigualdades no estrictas

2.1.3 PROPIEDADES BÁSICAS:

1º **Propiedad Desigualdad Adición:** Si: $a < b$ entonces: $a + c < b + c$

Ejemplos:
1) $6 < 10 \Rightarrow 6 + 3 < 10 + 3$
2) $x - 2 < 5 \Rightarrow x - 2 + 2 < 5 + 2 \Rightarrow x < 7$
3) $x + 6 < 12 \Rightarrow x + 6 - 6 < 12 - 6 \Rightarrow x < 6$

2º **Propiedad Transitiva:** Si: $a < b$ y $b < c$, entonces: $a < c$

Ejemplos:

1) $3 < 5$ y $5 < 8 \Rightarrow 3 < 8$ 2) $x < 7$ y $7 < 9 \Rightarrow x < 9$
3) $x + 6 < 10$ y $10 < 13 \Rightarrow x + 6 < 13 \Rightarrow x + 6 - 6 < 13 - 6 \Rightarrow x < 7$

3º **Propiedad Desigualdad Multiplicación:**

a) Si: $a < b$ y $c > 0$, entonces $a . c < b . c$

Ejemplos:
1) $5 < 8 \Rightarrow 5(3) < 8(3) \Rightarrow 15 < 24$
2) $-4 < 3 \Rightarrow -4(2) < 3(2) \Rightarrow -8 < 6$
3) $1/3x < 12 \Rightarrow 3(1/3x) < 3(12) \Rightarrow x < 36$

b) Si: $a < b$ y $c < 0$, entonces: $a . c > b . c$

Ejemplos :
1) $4 < 7 \Rightarrow 4(-3) > 7(-3) > 7(-3) \Rightarrow -12 > -21$
2) $-3x < 6 \Rightarrow -3x(-1/3) > 6(-1/3) \Rightarrow x > -2$

4º Si: $a . b > 0$, entonces: $a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$

Ejemplos:
1) $8x > 0 \Rightarrow x > 0$
2) $-5x > 0 \Rightarrow x < 0$

3) $4(x-2)>0 \Rightarrow (x-2)>0 \Rightarrow x>2$

4) $-3(x+5)>0 \Rightarrow (x+5)<0 \Rightarrow x<-5$

5º Si: a.b < 0, entonces: a > 0 y b < 0 ó a < 0 y b > 0

Ejemplos:

1) $7x<0 \Rightarrow x<0$

2) $3(x-4)<0 \Rightarrow (x-4)<0 \Rightarrow \boxed{x<4}$

3) $-4x<0 \Rightarrow x>0$

4) $-2(x-6)<0 \Rightarrow (x-6)>0 \Rightarrow \boxed{x>6}$

6º Si: 0 < a < b, entonces: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Ejemplos:

1) $3<5 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ 2) $\frac{1}{6} < \frac{1}{2} \Rightarrow 6>2$

3) $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 8 \Rightarrow 5>x>\frac{1}{8}$

7º Si: a < b < 0, entonces: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Ejemplos:

1) $-2 < -1 \Rightarrow \frac{1}{-2} > \frac{1}{-1} \Rightarrow \frac{-1}{2} > -1$

2) $-6 < \frac{1}{x} < \frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{-1}{6} > x > -3$

2.1.4 RESOLUCIÓN DE INECUACIONES LINEALES:

Una inecuación líneal o de primer grado en una variable x, es una desigualdad de la forma:

$$ax+b>0 \quad ó \quad ax+b<0$$

La técnica para resolver una Inecuación Líneal es muy sencilla y análoga a la resolución de una ecuación líneal con una incógnita. Se basa en la aplicación de los axiomas de orden y de las propiedades.

Ejemplo 1 : Hallar el conjunto solución de: $2x-7>5x+8$

Resolución:

Por la propiedad: $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$

Obtenemos: $2x - 7 + 7 > 5x + 8 + 7$ ➡ $2x > 5x + 15$

Nuevamente aplicamos la misma propiedad: $2x - 5x > 5x + 15 - 5x$ ➡ $-3x > 15$

Aplicamos la propiedad: $a > b$ y $c < 0$, entonces: $a \cdot c < b \cdot c$

$$-3x > 15 \Rightarrow -3x\left(-\frac{1}{3}\right) < 15\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{x < -5}$$

Por lo tanto, el Conjunto Solución es: $C.S. = \{x \in R / x < -5\}$ **Rpta.**

Nota: En la practica, para resolver una Inecuación Lineal se transpone todos los términos que contiene la variable x al primer miembro y las constantes al segundo miembro de la desigualdad.

Ejemplo 2: Hallar el conjunto solución de: $6x + 5 < 4x + 13$

Resolución:

Transponiendo términos se tiene: $6x - 4x < 13 - 5$

$$2x < 8 \Rightarrow x < \frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{x < 4}$$

Por lo tanto; el Conjunto Solución es: $C.S. = \{x \in R / x < 4\}$ ó
$C.S. = \langle -\infty ; 4 \rangle$

Ejemplo 3: Hallar el conjunto solución de: $2x - 3 \geq 9 - x$

Resolución:

Transponiendo términos se tiene. $2x + x \geq 9 + 3$

$$3x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{3} \Rightarrow x \geq 4$$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $C.S. = \{x \in R / x \geq 4\}$ ó
$C.S. = [4; \infty\rangle$

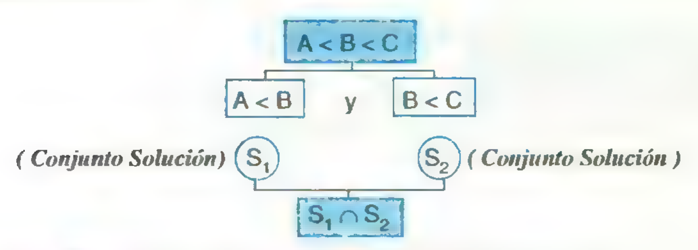
2.1.5 INECUACIONES DE TRES PARTES:

Se denomina Inecuaciones de Tres Partes a las inecuaciones que tienen la siguiente forma:

a) $x - 3 < 3x - 7 < 2x + 1$ **b)** $-13 \leq 3x - 5 \leq -7$

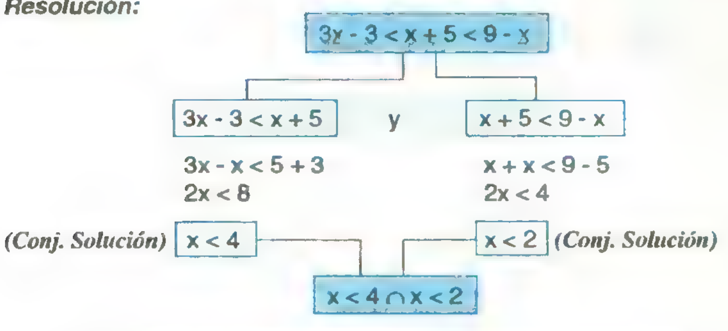
En General: $A < B < C$

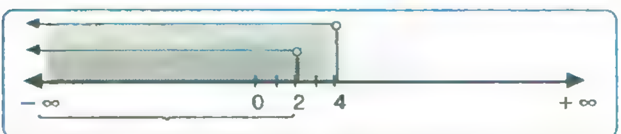
El conjunto solución de una Inecuación de tres partes se halla aplicando el siguiente esquema.



Ejemplo 1: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $3x - 3 < x + 5 < 9 - x$

Resolución:





El conjunto solución de la inecuación, es: $C.S. = \{x \in R \ / \ x < 2\}$

Es decir: $C.S. = \langle -\infty ; 2 \rangle$ **Rpta.**

Ejemplo 2: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $x - 16 < 2 - 2x \leq 2x + 6$

Resolución:

$$x - 16 < 2 - 2x \leq 2x + 6$$

$$x - 16 < 2 - 2x \quad \text{y} \quad 2 - 2x \leq 2x + 6$$

$x + 2x < 2 + 16$ $\qquad$ $2 - 6 \leq 2x + 2x$

$3x < 18$ $\qquad$ $-4 \leq 4x$

(Conj. Solución) $x < 6$ $\qquad$ $-1 \leq x$ *(Conj. Solución)*

$x < 6 \cap -1 \leq x$

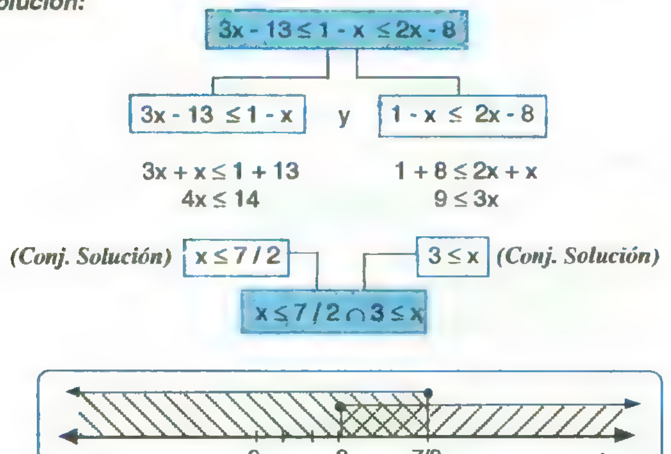
$-\infty$ $\quad -1 \quad 0 \quad 6 \quad$ $+\infty$

El conjunto solución de la inecuación, es: C.S. $= \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 6\}$

Es decir: $\quad$ C.S. $= [-1; 6\rangle$ $\qquad$ **Rpta.**

Ejemplo 3: Hallar el conjunto solución de: $3x - 13 \leq 1 - x \leq 2x - 8$

Resolución:



$3x - 13 \leq 1 - x \leq 2x - 8$

$3x - 13 \leq 1 - x$ $\quad$ y $\quad$ $1 - x \leq 2x - 8$

$3x + x \leq 1 + 13$ $\qquad$ $1 + 8 \leq 2x + x$

$4x \leq 14$ $\qquad$ $9 \leq 3x$

(Conj. Solución) $x \leq 7/2$ $\qquad$ $3 \leq x$ *(Conj. Solución)*

$x \leq 7/2 \cap 3 \leq x$

El conjunto solución de la inecuación, es: C.S. $= \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 7/2\}$

Es decir: C.S. $= [3; 7/2]$ $\qquad$ **Rpta.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 7

Ejercicio 1 : Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$2x - 5 < x + 3 < 7 - x$$

Resolución:

Rpta. C.S. = $<-\infty\ ; 2>$

Ejercicio 2 : Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$5x - 9 \leq 3 - x \leq 3x - 13$$

Resolución:

Rpta. C.S. = ϕ

Ejercicio 3 : Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$x - 18 < 3 - 6x \leq 8 - x$$

Resolución:

Rpta. C.S. = $[-1; 3>$

Ejercicio 4 : Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$(x - 1)(x + 3) < x^2 - 5 < (x + 1)(x + 2)$$

Resolución:

Rpta. C.S. = $< -7/3; -1 >$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE INECUACIONES DE TRES PARTES

Halla el conjunto solución de cada inecuación. Cada conjunto solución escribirlo como un intervalo.

1. $3x - 1 < x + 9 \leq 13 - x$
2. $5x < 3x - 4 < 2x + 6$
3. $4x - 7 \leq 1 + 2x < 7 - x$
4. $x / 3 \leq 2x - 1 < 7 + x / 2$
5. $-8 - x < 4 - 2x \leq 12 - 3x$
6. $3x - 4/5 \leq x + 1/3 < 2 - 3x$
7. $(x - 3)(x + 2) < x^2 - 2 < (x + 4)(x + 3)$
8. $-11 + 3x < x - 1 \leq 9 - 2x$
9. $2 / 3x - 4 \leq x + 1 \leq x / 2 - 1$
10. $(x + 5)(x - 1) < (x - 2)(x + 1) < x^2 - 5$

Clave de Respuestas

1. C.S. = $<-\infty ; 2]$
2. C.S. = $<-\infty ; -2>$
3. C.S. = $<-\infty ; 2>$
4. C.S. = $[3/5; 16/3>$
5. C.S. = $<-\infty ; 8]$
6. C.S. = $<-\infty ; 5/12>$
7. C.S. = $<-2; \infty>$
8. C.S. = $<-\infty ; 10/3]$
9. C.S. = $[-15; -4]$
10. C.S. = ϕ

2.2 SEGMENTO RECTILINEO DIRIGIDO

En la Recta Numérica, a todo número real le corresponde un punto en la recta, y que cada punto de la recta corresponde a un número real.

Esta correspondencia se objetivisa de la siguiente manera.

Q_n	Q_3	Q_2	Q_1	A	P_1	P_2	P_3	P_n
-x	-3	-2	-1	0	1	2	3	x

(− a la izquierda, + a la derecha)

y constituye lo que se denomina la recta Real o Numérica o Eje Lineal de Coordenadas.

En la Geometría Plana, se dice que:

a) Un segmento $\overline{P_1P_2}$ es parte de una recta. Esta parte o subconjunto tiene como extremos a los puntos P_1 y P_2.

b) En Geometría plana, no se hace distinción entre los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_1}$.

- En la Geometría Analítica es necesario considerar la longitud, tanto como la dirección o el sentido del segmento.

2.2.1 SEGMENTO ORIENTADO:

Sea: P_1P_3 el segmento orientado. En este caso se dice que: P_1 es el origen del segmento P_1P_3

P_3 es el punto final del segmento P_1P_3
El segmento está dirigido de P_1 a P_3.

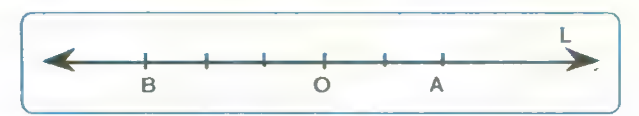
Si el segmento orientado fuera P_3P_1; en este caso el origen sería P_3; P_1 el punto final, el segmento está dirigido de P_3 a P_1.

Nota: En Geometría Plana o Geometría Elemental las longitudes de los segmentos dirigidos P_1P_3 y P_3P_1 son las mismas; pero en la Geometría Analítica se establece un distinción entre los signos de estas longitudes; es decir: $P_1P_3 = -P_3P_1$

Coordenada de un Punto.

La posición de cualquier punto P situado sobre la recta L, está dada por un número que representa la distancia dirigida OP, medida una unidad adecuada a partir de un punto O llamado origen, este número recibe el nombre de Coordenada de P.

Si en la recta L, la distancia entre cada marca es una unidad; la coordenada del punto A es 2 y la coordenada del punto B es -3.



2 es la **coordenada** del punto A; -3 es la coordenada del punto B.

Estos puntos con sus respectivas coordenadas pueden ser simbolizadas de la siguiente manera:

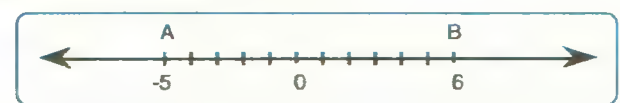
A (2); B (-3)

En forma general un punto P de una recta y su respectiva coordenada x, se simboliza por P (x).

2.2.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS (DISTANCIA DIRIGIDA)

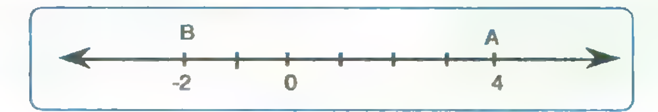
Supongamos que la coordenada de A es -5 $\Rightarrow$ A (-5)

La coordenada de B es 6 $\Rightarrow$ B (6)



De acuerdo a la figura: $\overline{AB} = 11$, es decir: $\overline{AB} = 6 - (-5) = 11$

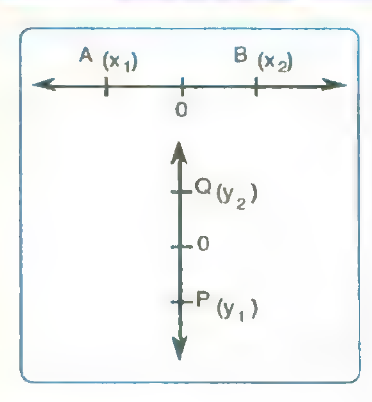
Supongamos que la coordenada de A es 4 → A (4)
la coordenada de B es -2 → B (-2)



De acuerdo a la figura: $\overline{AB} = -6$, es decir: $\overline{AB} = -2 - 4 = -6$

En Forma General: *Si la coordenada de A es x_1 y la coordenada de B es x_2, entonces la longitud del segmento dirigido $\overline{AB}$ es igual a la coordenada del punto final B; menos la coordenada del origen A.*

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$



En la figura mostrada, la distancia dirigida de A a B es positiva e igual a $(x_2 - x_1)$; y, la distancia dirigida de B a A es negativa e igual a $x_1 - x_2$.

Si denotamos por $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ estas distancias se tiene: $\overline{AB} = (x_2 - x_1)$; $\overline{BA} = (x_1 - x_2)$.

De la misma manera, la distancia dirigida de P a Q es positiva e igual a $(y_2 - y_1)$; y de Q a P es negativa e igual a $(y_1 - y_2)$; esto es:

$$\overline{PQ} = (y_2 - y_1) \; ; \; \overline{QP} = (y_1 - y_2)$$

Ejemplos:

1) Si: P (3) y Q (8) ➡ $\overline{PQ} = 8 - 3 = 5$

$\overline{QP} = 3 - 8 = -5$

2) Si: M (2) y N (-4) ➡ $\overline{MN} = -4 - 2 = -6$

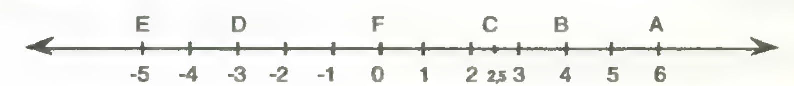
$\overline{NM} = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE DISTANCIA DIRIGIDA

Ejercicio 1: Sabiendo que: A (6); B (4); C (2, 5); D (-3); E (-5); F (0). Hallar las siguientes distancias dirigidas:

A) $\overline{CA}$ B) $\overline{DB}$ C) $\overline{CE}$ D) $\overline{BF}$ E) $\overline{EA}$

Resolución:



a) $\overline{CA} = 6 - 2{,}5 = 3{,}5$

b) $\overline{DB} = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$

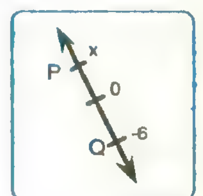
c) $\overline{CE} = -5 - 2{,}5 = -7{,}5$

d) $\overline{BF} = 0 - 4 = -4$

e) $\overline{EA} = 6 - (-5) = 11$

Ejercicio 2: En la figura mostrada, se sabe que:

$\overline{PQ} = -10$ y que Q (-6); Hallar la coordenada de P.



Resolución:

Sea: "x" la coordenada de P, entonces:

$\overline{PQ} = -6 - x$

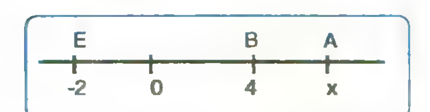
⬇

$-10 = -6 - x$ ➡ $x = -6 + 10$ ➡ $x = 4$

Rpta: La coordenada de P es 4

Ejercicio 3: La coordenada de B es 4 y la de E es -2. Si se cumple la igualdad $5\overline{EB} + 2\overline{AB} = 28$; entonces la coordenada de A es:

Resolución:



De la figura:

Sea "x" la coordenada de A.

Donde: $\begin{cases} \overline{EB} = 4 - (-2) & ➡ \quad \overline{EB} = 6 \\ \overline{AB} = 4 - x \end{cases}$

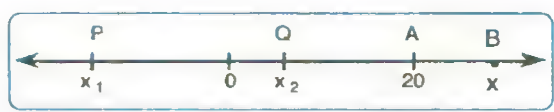
Reemplazando valores en la expresión: $5\,\overline{EB} + 2\,\overline{AB} = 28$; obtenemos:

$$5(6) + 2(4 - x) = 28$$
$$30 + 8 - 2x = 28 \Rightarrow 38 - 28 = 2x$$
$$10 = 2x$$
$$\boxed{x = 5}$$

Rpta. La coordenada de A es 5

Ejercicio 4: Las distancias dirigidas $\overline{AP}$ y $\overline{QA}$ son -28 y 10, respectivamente. La coordenada de A es 20. La coordenada de B, para que se cumpla la igualdad (PQ) (BA) - $\overline{BP}$ = 45, es:

Resolución:



Sea "x", la coordenada de B.

De la figura: $\overline{AP} = (x_1 - 20)$; $\overline{QA} = (20 - x_2)$

$-28 = x_1 - 20$; $10 = 20 - x_2$

$\boxed{-8 = x_1}$; $\boxed{x_2 = 10}$

Además: $\overline{PQ} = x_2 - x_1 \Rightarrow \overline{PQ} = 10 - (-8) \Rightarrow \boxed{\overline{PQ} = 18}$

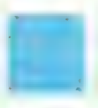
$\overline{BA} = (20 - x)$; $\overline{BP} = x_1 - x \Rightarrow \boxed{\overline{BP} = (-8 - x)}$

Reemplazando valores en la expresión: $(\overline{PQ})(\overline{BA}) - (\overline{BP}) = 45$; se obtiene:

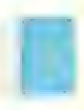
$$18(20 - x) - (-8 - x) = 45$$
$$360 - 18x + 8 + x = 45$$
$$368 - 17x = 45 \Rightarrow 323 = 17x$$

$$\therefore \boxed{x = 19}$$

Rpta. La coordenada de B es: 19



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE DISTANCIAS DIRIGIDAS



Ejercicio 1: Sabiendo que:

A (9); B (5); C (-3); D (-7); E (0).

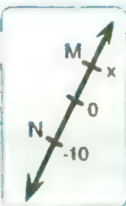
Hallar las siguientes distancias dirigidas.

A) $\overline{AB}$ = **B)** $\overline{BC}$ = **C)** $\overline{CD}$ =
D) $\overline{ED}$ = **E)** $\overline{CA}$ = **F)** $\overline{DB}$ =
G) $\overline{EB}$ = **H)** $\overline{CE}$ =

Ejercicio 2: En la figura mostrada, se sabe que:

$\overline{MN}$ = -16 y que N (-10)

Hallar la coordenada de M.



A) 5 **B)** 8
C) 6 **D)** 7
E) 4

Ejercicio 3: La coordenada de E es 6 y la de H es -3. Si se cumple la igualdad 3HE - AE = 25, entonces la coordenada de A es:

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 6

Ejercicio 4: Se sabe que: $4\overline{LF} - 3\overline{FR} = 15$ y que las coordenadas de F y L son respectivamente 6 y 9. Por tanto $\overline{RL}$ es:

A) -3 **B)** 9 **C)** 12 **D)** -12 **E)** 6

Ejercicio 5: La distancia dirigida $\overline{BC}$ es -18 y la coordenada de C es -13. La coordenada de M, para que se cumpla: $\overline{MB} + 3\,\overline{MC}$ = -42; es:

A) 3 **B)** 2 **C)** 4 **D)** -2 **E)** -6

Ejercicio 6: Las distancias dirigidas $\overline{AN}$ y $\overline{MA}$ son -20 y 12, respectivamente. La coordenada de A es 14. La coordenada de E, para que se cumpla la igualdad: $(\overline{NM}) . (\overline{EA}) + \overline{EN}$ = 43; es:

A) 7 **B)** -7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** -6

Clave de Respuestas

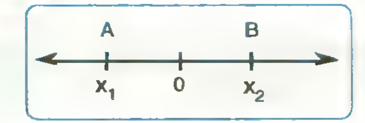
1. **A)** $\overline{AB}$ = -4 **B)** $\overline{BC}$ = -8
C) $\overline{CD}$ = -4 **D)** $\overline{ED}$ = -7
E) $\overline{CA}$ = 12 **F)** $\overline{DB}$ = 12
G) $\overline{EB}$ = 5 **H)** $\overline{CE}$ = 3

2. C **3. B** **4. C**

5. B **6. A**

2.2.3 DISTANCIA NO DIRIGIDA:

La distancia no dirigida entre los puntos A y B de una recta se denota por d (AB), y que es igual al valor absoluto de la distancia dirigida de A a B.



Si: la coordenada de A es x_1 y la coordenada de B es x_2, entonces la distancia no dirigida de A a B es:

$$d(AB) = |x_2 - x_1|$$

Ejemplo: En una recta se tienen los puntos y sus coordenadas siguientes: A (-3); B (-6), C (9); D (4). Hallar las distancias No dirigidas:

A) d (AB) **B)** d (CA) **C)** d (BD) **D)** d (DA)

Resolución:

A) d (AB) = |-6 - (-3)| = |-6 + 3| = |-3| = 3 **B)** d (CA) = |-3 - 9| = |-12| = 12

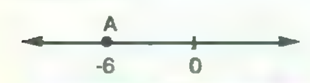
C) d (BD) = |-6 - 4| = |-10| = 10 **D)** d (DA) = |-3 - 4| = |-7| = 7

Nota: La distancia no dirigida siempre es un número real positivo. A la distancia no dirigida también se le denomina distancia absoluta o simplemente distancia.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE DISTANCIA ABSOLUTA

Ejercicio 1: La coordenada de A es -6. ¿Cuál debe ser la coordenada del punto B, para que la distancia absoluta de A a B sea 16?

Resolución:



Recuerda que:

$$|a| = b \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

Sea: 'x' la coordenada del punto B.

Luego: d (AB) = | x - (-6) |

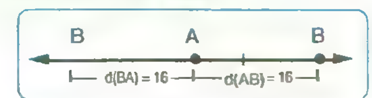
16 = | x + 6 |; resuelvo la ecuación:

i) 16 = x + 6 ➡ **x = 10**

ii) 16 = - (x + 6) ➡ 16 = -x - 6

x = -22

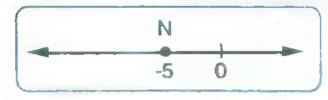
* Los valores de «x» hallados nos da a entender que la coordenada del punto B puede estar hacia la derecha ó hacia la izquierda. Veamos la figura:



Rpta: El punto B, tiene como coordenada a 10, y también el número -22.

Ejercicio 2 : La distancia absoluta de C a N es 14. C y N son puntos de una misma recta y la coordenada de N es -5. Hallar las coordenadas de C.

Resolución:



Sea 'x' la coordenada del punto C.

Luego: $d(CN) = |-5 - x|$

$14 = |-5 - x|$

Donde: **i)** $14 = -5 - x$ ⟹ $x = -19$

ii) $14 = -(-5 - x)$ ⟹ $14 = 5 + x$

$9 = x$

Rpta: El punto C, tiene como coordenada a -19, y también al número 9.

2.2.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SEGMENTOS Y SEMIRRECTAS HACIENDO USO DEL VALOR ABSOLUTO Y LAS RELACIONES DE ORDEN.

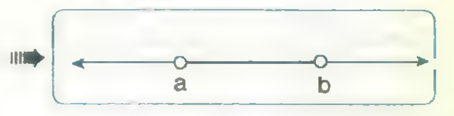
Recordemos la definición y representación de los siguientes conjuntos llamados intervalos (tema estudiado en el curso de 2do. año).

* Los intervalos pueden ser: Abiertos; cerrados; semiabiertos e infinitos.

Intervalo Abierto: Se llama intervalo abierto al conjunto de todos los números reales x tal que $a < x < b$; donde a y b no están incluidos. Se denota:

$\langle a; b\rangle =]a; b[= \{x \in IR / a < x < b\}$

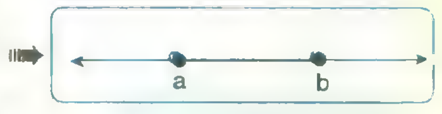
Se representa:



Intervalo Cerrado: Se llama intervalo cerrado al conjunto de todos los números reales x tal que $a \leq x \leq b$, donde a y b están incluidos.

Se denota: $[a, b] = \{x \in IR / a \leq x \leq b\}$

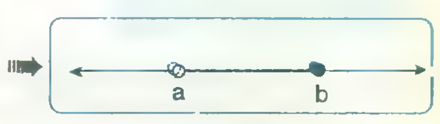
Se representa:



Intervalo Semiabierto: Se llama intervalo semiabierto por la izquierda al conjunto de todos los números reales x tal que $a < x \leq b$. Se denota:

$\langle a, b] =]a: b] = \{x \in IR / a < x \leq b\}$

Se representa:



* Se llama intervalo semiabierto por la derecha al conjunto de todos los números reales tal que $a \leq x < b$.

Se denota:

$[a, b> = [a; b[= \{x \in IR / a \leq x < b\}$ ➠

Se representa:

INTERVALOS INFINITOS (SEMIRRECTAS Y RAYOS)

- $< a; +\infty> =]a; +\infty[= \{x \in IR / x > a\}$

- $[a; +\infty> = [a +\infty[= \{x \in IR / x \geq a\}$

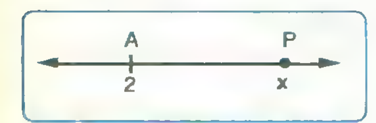
- $<-\infty; a> =]-\infty; a[= \{x \in IR / x < a\}$

- $<-\infty; a] =]-\infty; a] = \{x \in IR / x \leq a\}$

- $<-\infty; +\infty> =]-\infty; +\infty[= \{x \in IR\}$

Ejemplo 1: La coordenada de A es 2 y la coordenada de P es x. Halla todos los valores que puede tomar x para que la distancia de A a P sea menor que 7.

Resolución:



Por dato: $d|AP| < 7$
$|x - 2| < 7$

Por propiedad: $|x - 2| < 7$ ➠ $-7 < x - 2 < 7$

Sumamos 2 a ambos miembros:

$$-7 + 2 < x - 2 + 2 < 7 + 2$$

$$-5 < x < 9$$

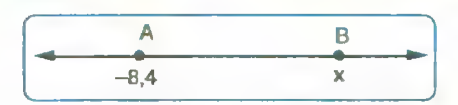
Recuerda Que:

$|a| < b$ ➠ $-b < a < b$

Rpta: Los valores que puede tomar x para que la distancia de A a P sea menor que 7, son cualquier elemento del intervalo $< -5; 9 >$

Ejemplo 2 : S es el intervalo al que pertenece x tal que: d (AB) < 10,6 en la que A (8, 4) y B (x); entonces: S ∩ [-8; 12, 3 > es:

Resolución:



Por dato: d (AB) < 10,6

| x - (-8,4) | < 10,6

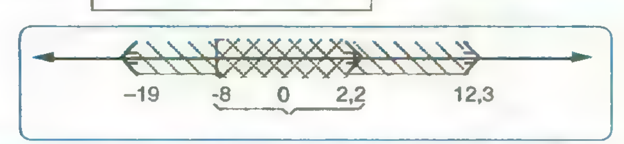
| x + 8,4 | < 10,6

Por propiedad: | x + 8,4 | < 10,6 ➡ -10,6 < x + 8,4 < 10,6

Restamos 8,4; a ambos miembros: -10,6 - 8,4 < x + 8,4 - 8,4 < 10,6 - 8,4

-19 < x < 2,2 ➡ **S = < -19; 2,2 >**

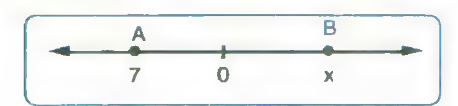
Luego, calculamos: S ∩ [-8; 12, 3 > = < -19; 2, 2 > ∩ [-8; 12, 3 >



S ∩ [-8; 12,3 > = < -19; 2,2 > ∩ [-8; 12,3 > = [-8; 2,2 > **Rpta.**

Ejemplo 3 : S es el intervalo al que pertenece x, tal que d(AB) ≤ 13 en la que A (-7) y B (x), por lo tanto [-25; 2 > -S es:

Resolución:



Por dato: d (AB) ≤ 13

| x - (-7) | ≤ 13

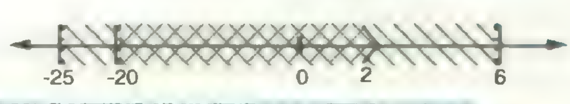
| x + 7 | ≤ 13

Por propiedad: | x + 7 | ≤ 13 ➡ -13 ≤ x + 7 ≤ 13; restamos 7 a ambos miembros:

-13 - 7 ≤ x + 7 - 7 ≤ 13 - 7

-20 ≤ x ≤ 6 ➡ **S = [-20; 6]**

Luego, calculamos: [-25; 2 > -S = [-25; 2 > - [-20 ; 6]



[-25; 2 > -S = [-25; 2 > - [-20; 6] = [-25; 20 > **Rpta.**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE DISTANCIA ABSOLUTA

Ejercicio 1: Todos los puntos y sus respectivas coordenadas que a continuación se indican pertenecen a una misma recta:

A (-6) ; B (-2) ; C (3, 4);
D (5, 2) ; E (-3, 5) ; F (-4)

Halla las siguientes distancias absolutas:

A) d (AC) =	**B)** d (BD) =
C) d (EC) =	**D)** d (CA) =
E) d (BE) =	**F)** d (BC) =
G) d (EF) =	**H)** d (FB) =
I) d (DE) =	**J)** d (AF) =
K) d (CD) =	**L)** d (FD) =

Ejercicio 2: Halla las coordenadas de P para que se cumpla la distancia absoluta entre los dos puntos dados.

A) d (PQ) = 15	;	Q (4)
B) d (RP) = 9	;	R (-2)
C) d (NP) = 8	;	N (6)
D) D (PA) = 12,4	;	A (3)
E) d (PK) = 16,8	;	K (-10,2)
F) d (MP) = 8,3	;	M (-4, 5)
G) d (PA) = 23	;	A (-4)
H) d (BP) = 18,2	;	B (-2, 8)

Ejercicio 3: En cada uno de los siguientes ejercicios, «x» es la coordenada de A. Halla el intervalo al que pertenece x para que la distancia de A al punto dado sea menor que el número real establecido:

A) d (CA) < 10	;	C (4)
B) d (AE) < 8	;	E (-3)
C) d (MA) < 13	;	M (8,4)
D) d (PA) ≤ 20	;	P (-6)
E) d (QA) < 26	;	Q (-9)
F) d (AN) ≤ 9,4	;	N (3,1)
G) d (TA) < 18,3	;	T (-6,4)
H) d (AR) ≤ 30	;	R (-12)

Ejercicio 4: La coordenada de A es -11. ¿Cuál debe ser la coordenada del punto B, para que la distancia absoluta de A a B sea 18?

A) -29 ó 7 **B)** -23 ó 7 **C)** -7 ó 7
D) -23 ó 13 **E)** N.A.

Ejercicio 5: La coordenada de A es el número positivo (x - 3), y la coordenada de B es el número -(5 + x), si d(AB) =18; siendo E (12); entonces d (AE) es:

A) 6 **B)** 8 **C)** 4
D) 9 **E)** 16

Ejercicio 6: S es el intervalo al que pertenece x; tal que d (AB) < 15,4 en la que A (-5, 6) y B (x); por tanto: [-24; 7] ∩ S es:

A) [-21; 7 > **B)** < -21; 7] **C)** <-21;9,8>
D) [7; 9,8 > **E)** N.A.

Ejercicio 7: S es el intervalo al que pertenece x; tal que d (AB) ≤ 20 en la que A (-9) y B (x), entonces: S - [4; 13] es:

A) <-29; 4] **B)** <11; 13> **C)** <-29; 11>
D) [-29; 4> **E)** N.A.

Ejercicio : S es el intervalo al que pertenece x, tal que d (AB) < 13 en la que A (-10) y B (x); entonces: <-8; 6] U S es:

A) [-23; 6 > **B)** < -23; 6] **C)** < -23; 3 >
D) < -20; -8] **E)** N.A.

Clave de Respuestas

1.
A. d (AC) = 9,4 **B.** d (BD) = 7,2 **C.** d (EC) = 6,9
D. d (CA) = 9,4 **E.** d (BE) = 1,5 **F.** d (BC) = 5,4
G. d (EF) = 0,5 **H.** d (FB) = 2 **I.** d (DE) = 8,7
J. d (AF) = 2 **K.** d (CD) = 1,8 **L.** d (FD) = 9,2

2.
A. -11 ó 19 **B.** -11 ó 7 **C.** -2 ó 14 **D.** -9,4 ó 15,4
E. -27 ó 6,6 **F.** -12,8 ó 3,8 **G.** -27 ó 19 **H.** -21 ó 15,4

3.
A. < -6; 14 > **B.** < -11; 5 > **C.** < -4,6; 21, 4 > **D.** [-26; 14]
E. < -35; 17 > **F.** [-6,3; 12,5] **G.** < -24,7; 11,9 > **H.** [-42; 18]

4. A **5.** C **6.** B **7.** D **8.** B

2.3 VALOR ABSOLUTO:

DEFINICIÓN: El valor absoluto de un número real **a**, denotado por I a I, se define por la regla:

$$|a| = \begin{cases} a; \text{ si: } a > 0 & \dots (1) \\ 0; \text{ si: } a = 0 & \dots (2) \\ -a; \text{ si: } a < 0 & \dots (3) \end{cases}$$

Ejemplos:

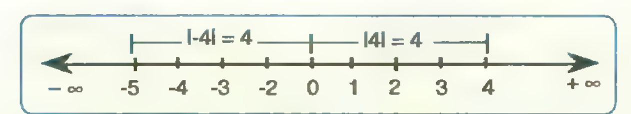
1) Se dice que: I 8 I = 8; porque se cumple la parte (1) de la definición es decir: a > 0; entonces: 8 > 0.

2) Se dice que: I-6I = 6; porque se cumple la parte (3) de la definición I-6I = -(-6); puesto que -6 < 0.

3) Se dice que: I 0 I = 0; porque se cumple la parte (2) de la definición a = 0; es decir: 0 = 0

De la definición deducimos que el valor absoluto de cualquier número real es cero o positivo; pero nunca negativo.

El valor absoluto de un número negativo es el número positivo correspondiente. Esto significa que para cada número real **a**, hay un número **-a**, cuyo valor absoluto representa su distancia al origen, el positivo a la derecha y el negativo a la izquierda. Geométricamente se representa como:



2.3.1 PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO:

1) $|a| = |-a|$

Ejemplo:

$|5| = |-5| = 5$

$|7| = |-7| = 7$

$|12| = |-12| = 12$

$|4| = |-4| = 4$

$|2| = |-2| = 2$

2) $|a.b| = |a|.|b|$

Ejemplo:

a) $|48| = |6||8|$

b) $|-15| = |-3||5|$

c) $|4x| = |4||x| = 4|x|$

d) $|-6x| = |-6||x| = 6|x|$

e) $|-5(x+3)| = |5||x+3| = 5|x+3|$

3) $|a| = b \;\; \begin{cases} b \geq 0 \\ \wedge \\ a = b \vee a = -b \end{cases}$

Ejemplo: $|x+2| = 3$

Donde: $x+2 = 3 \vee x+2 = -3$

$x = 1$ — $x = -5$

4) Si:

$|a| < k;\ k > 0$ entonces: $-k < a < k$

Ejemplo:

$|x| < 6 \Rightarrow -6 < x < 6 \Rightarrow$

C.S. $= \langle -6, 6 \rangle$

5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

Ejemplos:

a) $\left|\dfrac{x}{3}\right| = \dfrac{|x|}{|3|} = \dfrac{|x|}{3}$

b) $\left|\dfrac{x+2}{-4}\right| = \dfrac{|x+2|}{|-4|} = \dfrac{|x+2|}{4}$

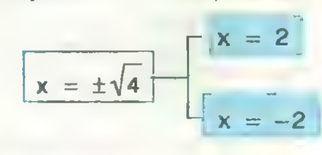
c) $\left|\dfrac{x-6}{x+1}\right| = \dfrac{|x-6|}{|x+1|}$

6) $|a|^2 = a^2$ y

también $|a|^2 = a^2$

Ejemplo:

a) $|x|^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4$



$x = \pm\sqrt{4}$ → $x = 2$; $x = -2$

7) Si: $|a| > b$; $b > 0$; entonces: $a > b$ $a < -b$

Ejemplo: $|x| > 7$ $x > 7$ $x < -7$

C.S. $= \langle -\infty ; 7 \rangle \cup \langle 7; \infty \rangle$

EJERCICIOS RESUELTOS APLICANDO LAS PROPIEDADES DE VALOR ABSOLUTO

Ejercicio 1 : Si: $|x - 8| = 4$; calcular: $|16 - x|$

Resolución:

En: $|x - 8| = 4$; aplicando la propiedad (3); obteniendo:

i) $x - 8 = 4 \Rightarrow \boxed{x = 12}$ ii) $x - 8 = -4 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

Luego, reemplazamos los valores de 'x' hallados en la expresión $|16 - x|$

Para: $\boxed{x = 12} \Rightarrow |16 - x| = |16 - 12| = |4| = \boxed{4}$

Para: $\boxed{x = 4} \Rightarrow |16 - x| = |16 - 4| = |12| = \boxed{12}$ **Rpta.**

Ejercicio 2 : Si: $|-9x| = 72$; Calcular: $|x - 3|$

Resolución:

En: $|-9x| = 72$; aplicamos la propiedad (2); obteniendo:

$9|x| = 72 \Rightarrow \boxed{|x| = 8}$; por la propiedad (3), se tiene que:

i) $x = 8$ ii) $x = -8$

Luego, reemplazamos los valores de 'x' hallados en la expresión: $|x - 3|$

Para: $\boxed{x = 8} \Rightarrow |x - 3| = |8 - 3| = |5| = \boxed{5}$

Para: $\boxed{x = -8} \Rightarrow |x - 3| = |-8 - 3| = |-11| = \boxed{11}$ **Rpta.**

Ejercicio 3 : Si: $|2x - 6| = 10$; calcular: $|x - 3|$

Resolución:

En: $|2x - 6| = 10$; aplicamos la propiedad (3); obteniendo:

i) $2x - 6 = 10 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow \boxed{x = 8}$; ii) $2x - 6 = -10 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

Luego, reemplazamos los valores de 'x' hallados en la expresión $|x - 3|$

para: $x = 8$ ➠ $|x - 3| = |8 - 3| = |5| = 5$

para: $x = -2$ ➠ $|x - 3| = |-2 - 3| = |-5| = 5$ **Rpta.**

Ejercicio 4 : Si: $|9 - x| = 6$; calcular: $|x - 9|$

Resolución:

En: $|9 - x|$; aplicamos la propiedad (3); obteniendo:

i) $9 - x = 6$ ➠ $9 - 6 = x$ ➠ $x = 3$; ii) $9 - x = -6$ ➠ $9 + 6 = x$ ➠ $x = 15$

Luego, reemplazamos los valores de "x" hallados en la expresión: $|x - 9|$:

para: $x = 3$ ➠ $|x - 9| = |3 - 9| = |-6| = 6$

para: $x = 15$ ➠ $|x - 9| = |15 - 9| = |6| = 6$ **Rpta.**

Ejercicio 5 : Si: $|4x - 20| = 12$; calcular: $|x - 5|$

Resolución:

La expresión: $|4x - 20| = 12$; se puede escribir así: $|4(x - 5)| = 12$

Donde: $4\,|x - 5| = 12$ ➠ $|x - 5| = 3$ **Rpta.**

Ejercicio 6 : Si: $\left|\dfrac{x-3}{-6}\right| = 2$; calcular: $|x + 3|$

Resolución:

La expresión: $\left|\dfrac{x-3}{-6}\right| = 2$; se puede escribir así: $\dfrac{|x-3|}{|-6|} = 2$ ➠ $|x-3| = 2\,|-6|$

$|x - 3| = 12$; por la propiedad (3), se tiene:

i) $x - 3 = 12$ ➠ $x = 15$; ii) $x - 3 = -12$ ➠ $x = -9$

Luego; reemplazamos los valores de "x" hallados en la expresión $|x + 3|$

para: $x = 15$ ➠ $|x + 3| = |15 + 3| = |18| = 18$

para: $x = -9$ ➠ $|x + 3| = |-9 + 3| = |-6| = 6$

Ejercicio 7 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x - 6| \leq 4$

Resolución:

Aplicando la propiedad (4); se tiene que:

$-4 \leq x - 6 \leq 4$; sumamos "6" a ambos miembros

$-4 + 6 \leq x - 6 + 6 < 4 + 6 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq x \leq 10$

$\therefore$ El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = [2; 10] ***Rpta.***

Ejercicio 8: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|2x - 1| > 9$

Resolución:

Aplicando la propiedad (7), se tiene que:

$|2x - 1| > 9 \Rightarrow 2x - 1 > 9 \quad \vee \quad 2x - 1 < -9$

$2x > 10 \qquad 2x < -8$

$x > 5 \qquad x < -4$

$<5 ; \infty> \qquad <-\infty; -4>$

$\therefore$ El conjunto solución de la inecuación es: $<-\infty; -4> \cup <5; \infty>$ **Rpta.**

Ejercicio 9: Si **A** es el conjunto solución de: $|x - 3| \leq 5$ y **B** es el conjunto solución de: $|x + 4| > 6$; entonces: $A \cap B$ es:

Resolución:

En el inecuación: $|x - 3| \leq 5$, aplicamos la propiedad (4).

$|x - 3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5$; sumamos "3" a ambos miembros.

$-5 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 5 + 3$

$-2 \leq x \leq 8 \Rightarrow$ C.S. = [-2 ; 8] $\Rightarrow \therefore$ A = [-2 ; 8] ...(I)

En la inecuación: $|x + 4| > 6$; aplicamos la propiedad. (7).

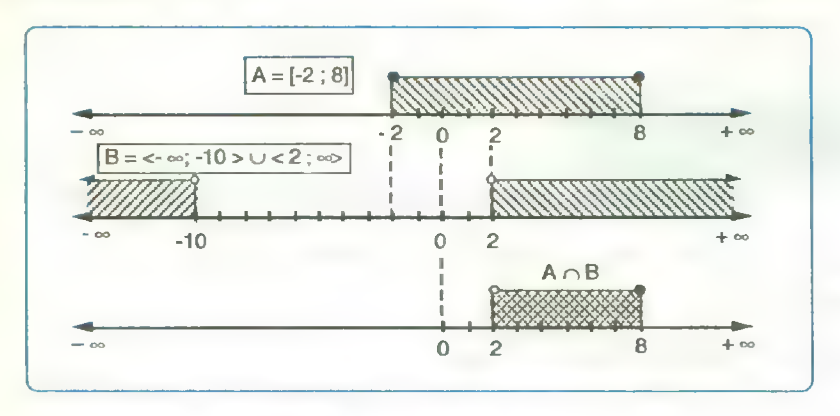
$|x + 4| > 6 \Rightarrow x + 4 > 6 \quad \vee \quad x + 4 < -6$

$x > 2 \qquad x < -10$

$<2 ; \infty> \qquad <-\infty ; -10>$

$\therefore$ $B = <-\infty ; -10> \cup <2; \infty>$ ...(II)

Luego; calculamos. $A \cap B$



$\therefore$

Rpta.

NEGRO

TALLER DE EJERCICIOS Nº 8

Ejercicio 1 : Si: $|12 - 3x| = 6$; Calcular: $|2x - 1|$

Resolución:

Rpta. 3 y 11

Ejercicio 2 : Si: $\left|\frac{2x-1}{3}\right| = 3$, Calcular $|3x - 1|$

Resolución:

Rpta. 13 y 14

Ejercicio 3 : Hallar el Conjunto Solución de la Inecuación: $|3x - 2| > 13$.

Resolución:

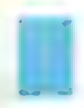
Rpta. C.S. = $\langle -\infty; -11/3 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$

Ejercicio 4 : Hallar el Conjunto Solución de la Inecuación: $|x - 8| \leq 10$

Resolución:

Rpta. C.S. = $[-2, 18]$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LAS PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO



Ejercicio 1: Analiza las propiedades de valor absoluto; luego completa las igualdades escribiendo los números que faltan.

A) $|x-5| = 8$ ⟶ $|10-x| =$; $|10-x| =$

B) $|-6x| = 30$ ⟶ $|x+3| =$; $|x+3| =$

C) $|-4x-12| = 20$ ⟶ $|x+6| =$; $|x+6| =$

D) $|x/3| = 6$ ⟶ $|2x+1| =$; $|2x+1| =$

E) $|8/x| = 4$ ⟶ $|x-5| =$; $|x-5| =$

F) $|-6x-24| = 36$ ⟶ $|x+5| =$; $|x+5| =$

G) $\left|\dfrac{-6}{x+2}\right| = 2$ ⟶ $|x+3| =$; $|x+3| =$

H) $\left|\dfrac{x+5}{-2}\right| = 3$ ⟶ $|x+4| =$; $|x+4| =$

Ejercicio 2: Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

A) $|x-4| < 9$ B) $|x+5| \leq 10$

C) $|2x-1| < 7$ D) $|5-3x| \leq 1$

E) $|x-9| < 1$ F) $\left|\dfrac{x+3}{2}\right| \leq 4$

G) $\left|\dfrac{x-2}{6}\right| < 1$ H) $\left|\dfrac{2x-4}{-3}\right| \leq 4$

I) $|x-6| \geq 2$ J) $|x+7| > 12$

K) $|3x-2| \geq 13$ L) $|8-5x| > 7$

Ejercicio 3: Si A es el conjunto solución de: $|x-2| \leq 7$ y B es el conjunto solución de $|x+5| > 1$; entonces: $A \cap B$ es:

Ejercicio 4: Si. P es el conjunto solución de: $|x+7| < 14$; y Q es el conjunto solución de: $|x+4| \geq 10$; entonces: $P \cap Q$ es:

Ejercicio 5: A, B y C son los conjuntos solución de las inecuaciones: $|x| \leq 13$; $|x-6| > 14$ y $|x+2| - 21 \geq 0$; respectivamente; entonces: $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ es:

Clave de Respuestas

1. **A.** 3 y 13 **B.** 2 y 8 **C.** 2 y 8
D. 37 y 35 **E.** 3 y 7 **F.** 5 y 7
G. 2 y 4 **H.** 7 y 5

2.
A. C.S. = <-5; 13> **B.** C.S. = [-15; 5]
C. C.S. = <-3; 4> **D.** C.S. = [4/3; 2]
E. C.S. = <8; 10> **F.** C.S. = [-11; 5]
G. C.S. = <-4; 8> **H.** C.S. = [-4; 8]
I. C.S. = <-∞; 4] ∪ [8; ∞>
J. C.S. = <-∞ ; -19> ∪ <5; ∞>
K. C.S. = <-∞ ; -11/3> ∪ [5; ∞>
L. C.S. = <-∞ ; 1/5> ∪ <3; ∞>

3. A ∩ B = <-4; 9]

4. P ∩ Q = <-21; -14] ∪ [6, 7>

5. (A ∩ B) ∪ (B ∩ C) = <-∞ , -23] ∪ [-13, -8> ∪ <20, ∞>

2.3.2 ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

Las propiedades que permiten resolver ecuaciones con Valor Absoluto son las siguientes:

Si:	$\lvert a \rvert = b$;	Entonces:	$b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)$
Si:	$\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$;	Entonces:	$a = b \vee a = -b$

Ejemplo 1 : Hallar el Conjunto Solución de la Ecuación: $\lvert 2x - 7 \rvert = x - 5$

Resolución:

$\lvert 2x - 7 \rvert = x - 5$; Entonces:

i) $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$ (**Base**)

$\wedge$

ii) $2x - 7 = x - 5$ $\vee$ iii) $2x - 7 = -(x - 5)$

ii) $2x - x = 7 - 5$; $\therefore x = 2$

iii) $2x - 7 = -x + 5$; $3x = 12$; $\therefore x = 4$

*Nota: La base: $x - 5 \geq 0$, es decir; $x \geq 5$, nos indica que sus raices de la ecuación deben ser mayores o iguales a 5. Si al resolver la ecuación algún número obtenido no cumple con la **BASE**, esto indica que no es raiz de la ecuación.*

En la ecuación, las raíces obtenidas son: $x = 2$ y $x = 4$, las cuales no cumplen que la BASE: $x \geq 5$; por lo tanto el conjunto solución de la ecuación será el conjunto vacio, es decir: $C.S. = \phi$ **Rpta.**

Ejemplo 2 : Hallar el Conjunto Solución de la ecuación: $\lvert 2x - 6 \rvert = x + 9$

Resolución:

$\lvert 2x - 6 \rvert = x + 9$; Entonces:

i) $x + 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq -9$ (**BASE**)

$\wedge$

ii) $2x - 6 = x + 9$ $\vee$ iii) $2x - 6 = -(x + 9)$

ii) $2x - x = 9 + 6$; $\therefore x = 15$

iii) $2x - 6 = -x - 9$; $3x = -3$; $\therefore x = -1$

Como se observará las raíces halladas o sea: $x = 15$ y $x = -1$; cumplen con la BASE: $x \geq -9$. Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación será:

$C.S. = \{-1; 15\}$ **Rpta.**

Ejemplo 3 : Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|3x - 2| - 18 = x$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir así: $|3x - 2| = x + 18$

Luego:

$|3x - 2| = x + 18$; Entonces:

i) $x + 18 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -18}$ (**BASE**)

$\wedge$

ii) $3x - 2 = x + 18$ $\quad$ v $\quad$ iii) $3x - 2 = -(x + 18)$

$3x - x = 18 + 2$ $\qquad$ $3x - 2 = -x - 18$

$2x = 20$ $\qquad$ $4x = -16$

$\therefore \boxed{x = 10}$ $\qquad$ $\therefore \boxed{x = -4}$

Como se observará las raíces halladas o sea: $x = 10$ y $x = -4$; cumplen con la BASE: x -18; por lo tanto el conjunto solución de la ecuación será:

$$\boxed{C.S. = \{-4; 10\}}$$ **Rpta.**

Ejemplo 4 : Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|x^2 - 2x| = 3x - 6$

Resolución:

$|x^2 - 2x| = 3x - 6$, Entonces:

i) $3x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$ (**BASE**)

$\wedge$

ii) $x^2 - 2x = 3x - 6$ $\quad$ v $\quad$ iii) $x^2 - 2x = -(3x - 6)$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 2x + 3x - 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$ $\qquad$ $x^2 + x - 6 = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$

Donde:

*) $x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

**) $x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

Donde:

*) $x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$

**) $x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

De las raíces halladas o sea: $x = 2$; $x = 3$ y $x = -3$; los que cumplen con la BASE $x \geq 2$; son: $x = 2$ y $x = 3$; por lo tanto el conjunto solución de la ecuación será:

$$\boxed{C.S. = \{2; 3\}}$$ **Rpta.**

Ejemplo 5 : Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|x^2 - 4| = 2x + 1$

Resolución:

$|x^2 - 4| = 2x + 1$;
Entonces:

i) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \quad -1 \Rightarrow x \geq -1/2$ (**BASE**)

ii) $x^2 - 4 = 2x + 1$
$x^2 - 2x - 5 = 0$, esta ecuación es de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$

donde: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Luego:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$x = 1 \pm \sqrt{6}$ → $x_1 = 1 + \sqrt{6}$; $x_2 = 1 - \sqrt{6}$

v

iii) $x^2 - 4 = -(2x + 1)$
$x^2 - 4 = -2x - 1$
$x^2 + 2x - 3 = 0$

x +3
x -1

donde: $(x + 3)(x - 1) = 0$

*) $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

**) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

De las raíces halladas o sea: $x_1 = 1 + \sqrt{6} = 3{,}499$; $x_2 = 1 - \sqrt{6} = -1{,}449$; $x_3 = -3$ y $x_4 = 1$; los que cumplen con la BASE $x \geq -1/2$; son: $x_1 = 1 + \sqrt{6}$ y $x_4 = 1$; por lo tanto el conjunto solución de la ecuación será:

$$C.S. = \{1 + \sqrt{6};\ 1\}$$ **Rpta.**

Ejemplo 6 : Hallar el conjunto solución de la ecuación: $\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right| = x - 1$

Resolución:

$\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right| = x - 1$;
Entonces:

i) $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ (**BASE**)

$\wedge$

ii) $\dfrac{x+3}{x+1} = x - 1$ v iii) $\dfrac{x+3}{x+1} = -(x-1)$

- Resolviendo las ecuaciones (ii) y (iii):

De la ecuación (ii): $\frac{x+3}{x+1}=x-1 \Rightarrow x+3=(x-1)(x+1)$

$x+3=x^2-1 \Rightarrow 0=x^2-x-4$

Resolvemos esta última ecuación: $x^2-x-4=0$, aplicandola la **fórmula.**

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2} \quad \begin{cases} x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

. De la ecuación (iii):

$$\frac{x+3}{x+1}=-(x-1)$$

$$x+3=-(x-1)(x+1)$$

$$x+3=-(x^2-1)$$

$$x^2+x+2=0$$

Resolviendo la ecuación: $x^2+x+2=0$; aplicando la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2} \quad \begin{cases} x_3=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2} \\ x_4=\frac{-1-\sqrt{-7}}{2} \end{cases}$$

De las raíces halladas, el que cumple con la base $x\geq 1$; es: $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$, por lo tanto el conjunto solución de la ecuaciones:

$$C.S.=\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$ **Rpta.**

Ejemplo 7: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|3x - 1| = |2x + 4|$

Resolución:

Aplicando la propiedad: Si: $|a| = |b|$, Entonces: $a = b \lor a = -b$

Luego: $|3x - 1| = |2x + 4|$; Entonces:

i) $3x - 1 = 2x + 4$ v ii) $3x - 1 = -(2x + 4)$

$3x - 2x = 4 + 1$

$\therefore$ $x = 5$

$3x - 1 = -2x - 4$

$5x = -3$

$\therefore$ $x = -3/5$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación es: C.S. $= \{-3/5; 5\}$ **Rpta.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 9

Ejercicio 1: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|5x - 1| = x + 7$

Resolución:

Rpta. C.S. = { -1; 2 }

Ejercicio 2: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|x^2 - 5| = x - 8$

Resolución:

Rpta. C.S. = ϕ

Ejercicio 3: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| = 2x$

Resolución:

Rpta. C.S. = {2}

Ejercicio 4: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|4x - 3| = |2x + 7|$

Resolución:

Rpta. C.S. = { - 2 / 3; 5 }

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Ejercicio 1: Hallar el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

A. $|4x - 2| = x + 13$
B. $|5x - 1| = 3x + 7$
C. $|x - 8| = 4x + 2$
D. $|2x + 5| - x = 3$
E. $|4x - 3| - 2x = 25$
F. $|x - 6| = 4$
G. $|2x - 3| = 15$
H. $|7x + 4| = 18$
I. $|5 - 3x| = 11$
J. $|9 - 4x| = 1$
K. $|3x + 4| = 6 + x$
L. $|6x + 1| = 5 - 4x$
M. $|6 - 2x| + 3 = x$
N. $|4x + 3| + 5 = 6x$
O. $|5 - 3x| - 2 = 2x$

Ejercicio 2: Hallar el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

A. $|x^2 - 3| = 3x + 1$
B. $|2x^2 + 3x| = 3 - 2x$
C. $|x^2 - 5| = 3 - 2x$
D. $|6x^2 - 4| = 1 - x$
E. $|2x^2 + 7x| = 8 - x$
F. $|x^2 - 3| = 4x - 3$
G. $|3x^2 - 1| = 2x + 4$
H. $|x^2 - 6x| = 9 - 2x$
I. $|x^2 - 4| = 3x + 1$

Ejercicio 3: Hallar el conjunto de solución de cada una de la siguientes ecuaciones:

A. $\left|\dfrac{x-4}{x+1}\right| = x+3$
B. $\left|\dfrac{2x+1}{x-3}\right| = x+4$
C. $\left|\dfrac{3x+6}{x-2}\right| = x+5$
D. $\left|\dfrac{x-3}{x+4}\right| = 3-x$
E. $\left|\dfrac{4x-3}{x-2}\right| = x+6$
F. $\left|\dfrac{12-5x}{x+1}\right| = 7-x$
G. $\left|\dfrac{15x-8}{x+4}\right| = 12-2x$
H. $\left|\dfrac{6x-5}{x+3}\right| = x+4$
I. $\left|\dfrac{9x-13}{x-2}\right| = 8-x$

Ejercicio 4: Hallar el conjunto solución de cada una de la siguientes ecuaciones:

A. $|x + 3| = |6 - 2x|$
B. $|4x - 5| = |x + 4|$
C. $|2x + 3| = |12 - x|$
D. $|6 - 4x| = |2 - 2x|$
E. $|8x - 3| = |3x - 2|$
F. $\left|\dfrac{3x-5}{2}\right| = |x-1|$
G. $|x^2 - 6| = |x|$
H. $|2x^2 - 3| = |3x + 1|$
I. $|3x^2 - 4| = |6 - 4x|$

Clave de Respuestas

1.
A. C.S. = { -11/5; 5 }
B. C.S. = { -3/4; 4 }
C. C.S. = { 6/5 }
D. C.S. = { -8/3; -2 }
E. C.S. = { -11/3; 14 }
F. C.S. = { 2; 10 }
G. C.S. = { -6; 9 }
H. C.S. = { -22/7; 2 }
I. C.S. = { -2; 16/3 }
J. C.S. = { 2; 5/2 }
K. C.S. = { -5/2; 1 }
L. C.S. = { -3; 2/5 }
M. C.S. = { 3 }
N. C.S. = { 4 }
O. C.S. = { 3/5; 7 }

2. A. C.S. $= \left\{4 \,;\, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$ B. C.S. = { -3; 1/2 }

C. C.S. $= \left\{-4 \,,\, 1-\sqrt{3}\right\}$ D. C.S. $= \left\{-1 \,;\, 5/6 \,;\, \frac{1-\sqrt{73}}{12} \,;\, \frac{1+\sqrt{73}}{12}\right\}$

E. C.S. $= \left\{-2-2\sqrt{2} \,;\, 2+2\sqrt{2}\right\}$ F. C.S. $= \left\{4 \,;-2+\sqrt{10}\right\}$

G. C.S. = { -1; 5/3 } H. C.S. $= \left\{2-\sqrt{13} \,;\, 4-\sqrt{7}\right\}$

I. C.S. $= \left\{\frac{3+\sqrt{29}}{2} \,,\, \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right\}$

3. A. C.S. $= \left\{\frac{-5+\sqrt{29}}{2}\right\}$ B. C.S. $= \left\{\frac{1-\sqrt{53}}{2} \,;\, \frac{1+\sqrt{53}}{2} \,;\, \frac{-3+\sqrt{53}}{2}\right\}$

C. C.S. $= \left\{-3+\sqrt{13} \,;\, -4 \,;\, 4\right\}$ D. C.S. = {-3 ; 3 ; -5}

E. C.S. $= \{-3 \,;\, 3 \,;\, -4+\sqrt{31}\}$ F. C.S. $= \left\{\frac{11-\sqrt{101}}{2} \,;\, \frac{1-\sqrt{77}}{2} \,;\, \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right\}$

G. C.S. $= \left\{\frac{-11-\sqrt{569}}{4} \,;\, \frac{-11+\sqrt{569}}{4} \,;\, \frac{19-\sqrt{681}}{4}\right\}$

H. C.S. $= \left\{\frac{-13+\sqrt{141}}{2}\right\}$ I. C.S. $= \left\{\frac{19-\sqrt{245}}{2}\right\}$

4. A. C.S. = { 9; 1 } B. C.S. = { 1/5; 3 } C. C.S. = { -15; 3 }
D. C.S. = { 4/3; 2 } E. C.S. = { 1/5; 5/11 } F. C.S. = { 7/5; 3 }

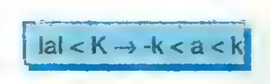
G. C.S. = { -2; -3; 2; 3 } H. C.S. $= \left\{-2 \,;\, 1/2 \,;\, \frac{3-\sqrt{41}}{4} \,;\, \frac{3+\sqrt{41}}{4}\right\}$

I. C.S. $= \left\{\frac{-2-\sqrt{34}}{3} \,;\, \frac{-2+\sqrt{34}}{3}\right\}$

2.3.3 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

Para resolver inecuaciones con valor absoluto, consideraremos dos casos:

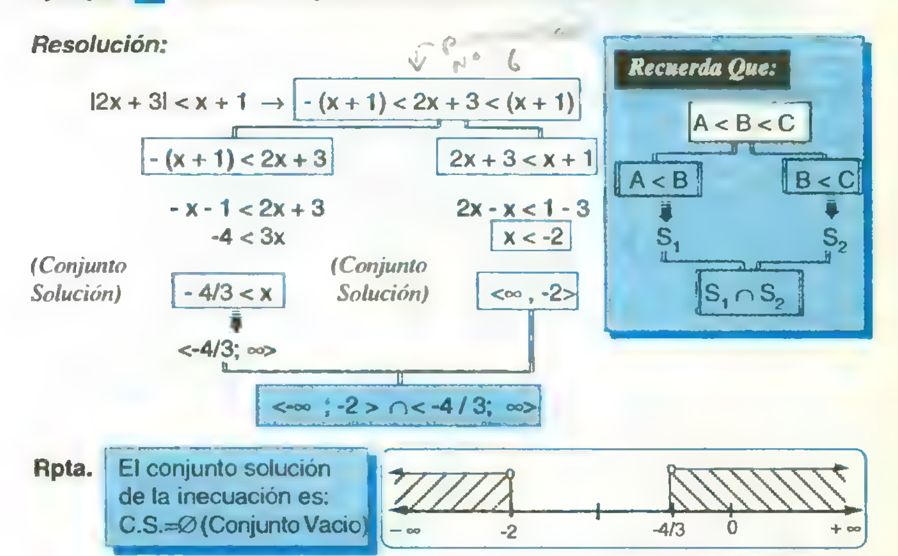
1º CASO: Cuando una inecuación pertenece a la forma: |a| < b; para resolverla aplicamos la propiedad:



(Para que se cumpla esta propiedad "k" debe ser mayor o igual a cero)

Ejemplo 1: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|2x + 3| < x + 1$

Resolución:



Ejemplo 2: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x + 4| + 3 \leq 2x$

Resolución:

- En primer lugar transponemos términos para darle a la inecuación la forma:

  $|a| \leq k \quad \Rightarrow \quad |x + 4| \leq 2x - 3$

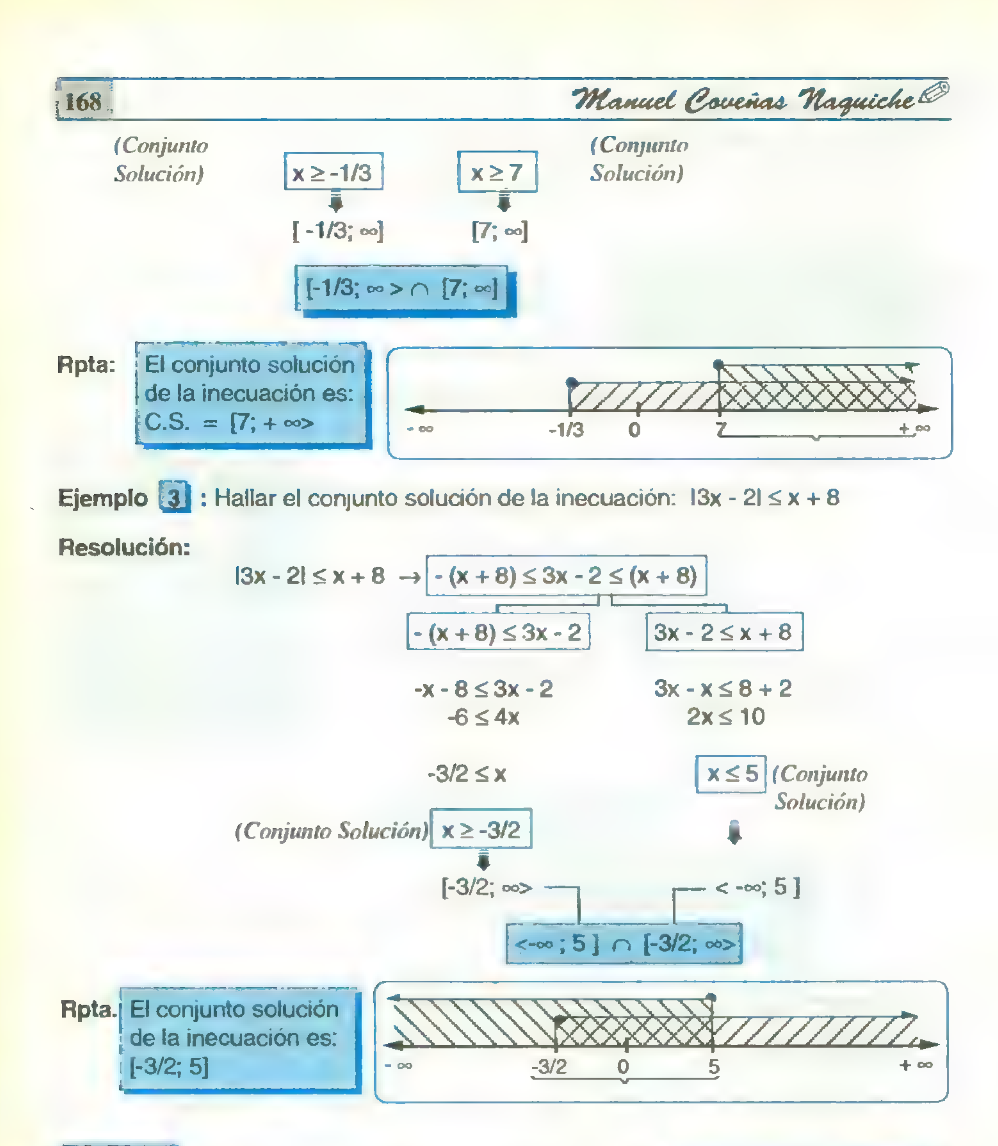
- En segundo lugar, aplico la propiedad: $|a| \leq k \rightarrow -k \leq a \leq k$

  $|x + 4| \leq 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad -(2x - 3) \leq x + 4 \leq (2x - 3)$

  $-(2x - 3) \leq x + 4$ $\qquad$ $x + 4 \leq (2x - 3)$

  $-2x + 3 \leq x + 4$ $\qquad$ $x - 2x \leq -3 - 4$

  $-2x - x \leq 4 - 3$ $\qquad$ $-x \leq -7$



(Conjunto Solución) $x \geq -1/3$ → $[-1/3; \infty]$

$x \geq 7$ *(Conjunto Solución)* → $[7; \infty]$

$[-1/3; \infty > \cap [7; \infty]$

Rpta: El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = [7; + ∞>

Ejemplo 3 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|3x - 2| \leq x + 8$

Resolución:

$|3x - 2| \leq x + 8 \rightarrow -(x + 8) \leq 3x - 2 \leq (x + 8)$

$-(x + 8) \leq 3x - 2$ | $3x - 2 \leq x + 8$

$-x - 8 \leq 3x - 2$

$-6 \leq 4x$

$-3/2 \leq x$

(Conjunto Solución) $x \geq -3/2$ → $[-3/2; \infty>$

$3x - x \leq 8 + 2$

$2x \leq 10$

$x \leq 5$ *(Conjunto Solución)* → $< -\infty; 5]$

$<-\infty; 5] \cap [-3/2; \infty>$

Rpta. El conjunto solución de la inecuación es: [-3/2; 5]

2º CASO: Cuando una inecuación pertenece a la forma: $|a| > b$; para resolverla; aplicamos la propiedad:

$|a| > b \rightarrow a > b \lor a < -b$

Ejemplo 1 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|6x + 1| > 3 - 4x$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a| > b \rightarrow a > b \lor a < -b$ se obtiene que:

$|6x + 1| > 3 - 4x \rightarrow$ $\boxed{6x + 1 > 3 - 4x}$ v $\boxed{6x + 1 < -(3 - 4x)}$

$6x + 4x > 3 - 1$ $\qquad$ $6x + 1 < -3 + 4x$

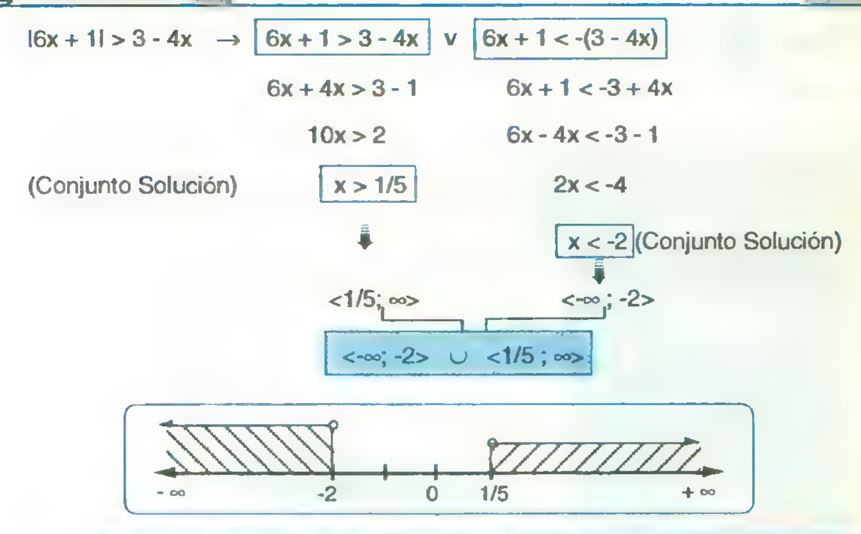
$10x > 2$ $\qquad$ $6x - 4x < -3 - 1$

(Conjunto Solución) $\boxed{x > 1/5}$ $\qquad$ $2x < -4$

$\boxed{x < -2}$ (Conjunto Solución)

<1/5; ∞> $\qquad$ <-∞; -2>

<-∞; -2> ∪ <1/5 ; ∞>



Rpta. El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = <-∞ ; -2> ∪ <1/5 ; ∞>

Ejemplo 2: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|2x + 5| \geq 9 + x$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a| > b \rightarrow a > b \vee a < -b$ se obtiene:

$|2x + 5| \geq 9 + x \rightarrow$ $\boxed{2x + 5 \geq 9 + x}$ v $\boxed{2x + 5 \leq -(9 + x)}$

$2x - x \geq 9 - 5$ $\qquad$ $2x + 5 \leq -9 - x$

$\boxed{x \geq 4}$ $\qquad$ $2x + x \leq 9 - 5$

$3x \leq -14$

$\boxed{x \leq -14/3}$

[4 ; ∞> $\qquad$ <-∞ ; -14/3]

<-∞ ; -14/3] ∪ [4 ; ∞>

- ∞ $\quad$ -14/3 $\quad$ 0 $\quad$ 4 $\quad$ + ∞

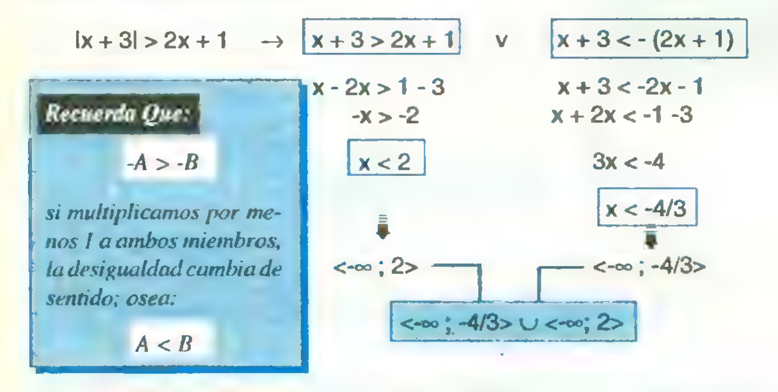
Rpta. El conjunto solución de la inecuación: C.S. = <-∞ ; -14/3] ∪ [4; ∞>

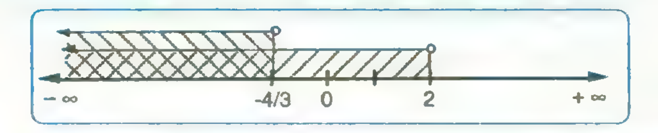
Ejemplo 3 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x + 3| > 2x + 1$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a| > b \rightarrow a > b \;\vee\; a < -b$; se obtiene que:

$|x + 3| > 2x + 1 \rightarrow$ $x + 3 > 2x + 1$ v $x + 3 < -(2x + 1)$





Rpta. El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = $\langle -\infty \,;\, 2\rangle$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 10

Ejercicio 1 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x + 3| + 1 \leq 3x$

Resolución:

Rpta. C.S. $= [2 ; \infty\rangle$

Ejercicio 2 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|4x + 3| > 2 - 5x$

Resolución:

Rpta. C.S. $= \langle -1/9, \infty\rangle$

Ejercicio 3 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|3x + 4| \geq 8 + x$

Resolución:

Rpta. C.S $= \langle -\infty ; -3] \cup [2;\infty\rangle$

Ejercicio 4 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x + 5| > 3x + 1$

Resolución:

Rpta. C.S $= \langle -\infty; 2\rangle$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE INECUACIONES LINEALES CON VALOR ABSOLUTO

Halla el conjunto solución de cada inecuación siguiente. Escribir las respuestas utilizando intervalos:

A. $|3x - 1| < x + 3$

B. $|4x + 3| \leq x + 6$

C. $|2x - 7| < 8 - x$

D. $|5x + 9| \leq 27 - x$

E. $|2x + 5| > - x + 2$

F. $|6x + 4| \geq 18 - x$

G. $|4x - 1| > 13 - 2x$

H. $|3x + 5| + x \leq 11$

I. $|7x + 10| - 28 \geq - 2x$

J. $|3x + 8| + 2x > 18$

K. $|13 - x| + 3x \leq 5$

L. $|16 - 3x| + 14 < 2x$

Clave de Respuestas

A. C.S $= < -1/2; 2 >$

B. C.S $= [-9/5; 1]$

C. C.S $= < -1; 5 >$

D. C.S $= [-9; 3]$

E. C.S $= < -\infty; - 7 > \cup < - 1; \infty >$

F. C.S $= < -\infty; - 22/5] \cup [2; \infty >$

G. C.S $= < -\infty; -6 > \cup < 7/3; \infty >$

H. C.S $= [-8; 3/2]$

I. C.S $= < -\infty ; - 38/5 > \cup < 2; \infty >$

J. C.S $= < -\infty ; - 26 > \cup < 2; \infty >$

K. C.S $= [-\infty; -4]$

L. C.S $= \phi$

2.3.4 INECUACIONES CUADRÁTICAS CON VALOR ABSOLUTO

Para resolver inecuaciones con valor absoluto, debemos tener en cuenta lo estudiado en el Texto de 3ro de Secundaria o sea las INECUACIONES CUADRÁTICAS; donde una inecuación se puede resolver aplicando:

a) El Método de factorización **b)** El Método de Completar el Cuadrado
c) El Método de los Puntos Críticos

Ejemplo 1 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x^2 - 6| \leq x + 4$

Resolución:

En primer lugar; aplicamos la propiedad: $|a| < k \rightarrow -k < a < k$

$$|x^2 - 6| \leq x + 4 \rightarrow \boxed{-(x + 4) \leq x^2 - 6 \leq (x + 4)}$$

$$\boxed{-(x+4) \leq x^2 - 6} \wedge \boxed{x^2 - 6 \leq x + 4}$$

$-x - 4 \leq x^2 - 6$ $x^2 - x \leq 4 + 6$

$\boxed{0 \leq x^2 + x - 2}$ ...(1) $\boxed{x^2 - x - 10 \leq 0}$ ...(2)

En segundo lugar resolvemos las inecuaciones (1) y (2):

De la inecuación (1): $0 \leq x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$

$$\begin{matrix} x & & +2 \\ x & & -1 \end{matrix}$$

Luego: $(x + 2)(x - 1) \geq 0$; los valores de «x» que anulan a los factores $(x + 2)(x - 1)$, son: $\boxed{x = -2}$ y $\boxed{x = 1}$ (**Puntos Críticos**). Estos puntos los ubicamos en la recta numérica.

Después de colocar estos valores se forman tres zonas que hemos representado por (I); (II) y (III)

A continuación se toma un valor cualquiera de la zona (I) y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $\boxed{x = -3}$

Donde: $(x + 2)(x - 1) = (-3 + 2)(-3 - 1) = (-1)(-4) = 4$ **(positivo)**

Luego: Toda la zona (I) es positiva.

- Se toma un valor de la zona (II) y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $\boxed{x = -1}$

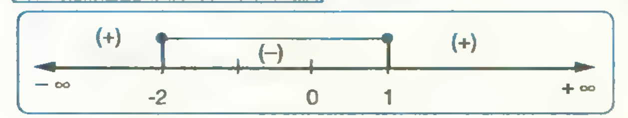
  Donde: $(x + 2)(x - 1) = (-1 + 2)(-1 - 1) = (1)(-2) = 2$ **(Negativo)**

  Luego: Toda la zona II es negativo.

- Se toma un valor de la zona (III) se reemplaza en le primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $\boxed{x = 2}$

  Donde: $(x + 2)(x - 1) = (2 + 2)(2 - 1) = (4)(1) = 4$ **(Positivo)**

  Luego: Toda la zona III es Positiva



Como la inecuación es: $(x+2)(x-1)>0$; nos interesan las zonas positivas vale decir las zonas (I) y (III)

Luego: La respuesta es: $< \infty; -2] \cup [1; \infty >$ ....(α)

De la inecuación (2): $x^2 - x - 10 < 0$; completando cuadrados:

↳ mitad de 1 es 1/2 , el cuadrado de $1/2 = (1/2)^2 = 1/4$

Sumo o resto : 1/4: $x^2 - x + \frac{1}{4} - 10 \leq 0 + \frac{1}{4}$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 10+\frac{1}{4} \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{41}{4}$$

Teorema:

Si: $a^2 \leq k$

Entonces:

$-\sqrt{k} \leq a \leq \sqrt{k}$

Siendo: $k > 0$

Por Teorema: $-\sqrt{\frac{41}{4}} \leq \left(x-\frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{41}{4}}$

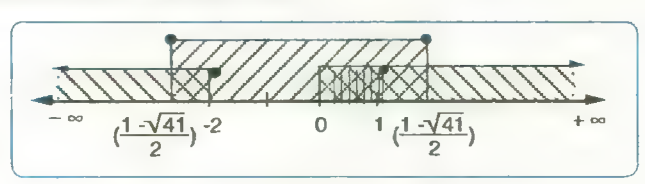
$$-\frac{\sqrt{41}}{2} \leq x-\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{41}}{2}$$

Sumamos 1/2 a ambos miembros: $-\frac{\sqrt{41}}{2}+\frac{1}{2} \leq x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{41}}{2}+\frac{1}{2}$

$$\frac{1-\sqrt{41}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{41}}{2}$$

Luego: La respuesta es: $\left[\frac{1-\sqrt{41}}{2}; \frac{1+\sqrt{41}}{2}\right]$ ... (β)

- En tercer lugar, hallamos la intersección de las expresiones (α) y (β), haciendo uso de la Recta Numérica.



Luego: El conjunto solución de la necuación: $|x^2 - 6| \leq x + 4$; es

$$C.S. = \left[\frac{1-\sqrt{41}}{2}; -2\right] \cup \left[1; \frac{1+\sqrt{41}}{2}\right]$$

Ejemplo 2: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x^2 - 3x| > x - 3$

Resolución:

En primer lugar, aplicamos la propiedad: $|a| > b \rightarrow a > b \vee a < -b$

$$|x^2 - 3x| > x - 3 \rightarrow \boxed{x^2 - 3x > x - 3} \quad \vee \quad \boxed{x^2 - 3x < -(x - 3)}$$

$$x^2 - 3x - x + 3 > 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x < -x + 3$$

$$\boxed{x^2 - 4x + 3 > 0} \ ...(1) \ \vee \quad \boxed{x^2 - 2x - 3 < 0} \ ... (2)$$

En segundo lugar, resolvemos las inecuaciones (1) y (2):

De la ecuación (1): $x^2 - 4x + 3 > 0$

x - 3
x - 1

Donde: $(x - 3)(x - 1) > 0$; los puntos criticos son: $\boxed{x = 3}$ y $\boxed{x = 1}$

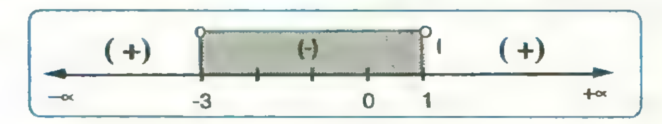
Luego; el conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 4x + 3 > 0$ es:

$$C.S = <-\infty ; 1> \cup <3 ; \infty> \qquad ...(\alpha)$$

De la inecuación (2): $x^2 - 2x - 3 < 0$

x -3
x +1

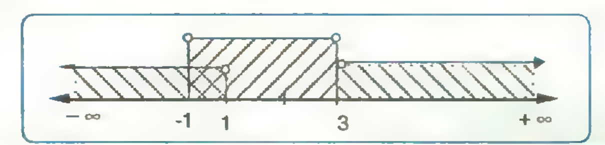
Donde: $(x - 3)(x + 2) < 0$; los puntos criticos son: $x = 3$ y $x = -1$



Luego, el conjunto solución de la inecuación: $(x - 3)(x + 2) < 0$, es:

$$C.S = <-1 ; 3> \quad ......(\beta)$$

- En tercer lugar, hallar la unión de las expresiones (α) y (β):



Luego, el conjunto solución de la inecuación: $|x^2 - 3x| > x - 3$; es: $C.S = \mathbb{R} - \{-1; 1; 3\}$

Ejemplo 3 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x^2 - 3x| \geq 4$

Resolución:

En primer lugar; aplicamos la propiedad: $|a| \geq b \rightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

$$|x^2 - 3x| \geq 4 \quad \rightarrow \quad x^2 - 3x \geq 4 \quad \vee \quad x^2 - 3x \leq -4$$

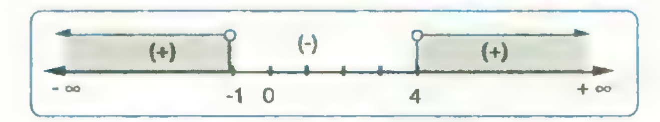
$$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \; ...(1) \quad \vee \quad x^2 - 3x + 4 \leq 0 \; ...(2)$$

En segundo lugar, resolvemos las inecuaciones (1) y (2):

De la inecuación (1): $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

$$\begin{matrix} x & & -4 \\ & \times & \\ x & & +1 \end{matrix}$$

Donde: $(x - 4)(x + 1) \geq 0$; los puntos críticos son: $x = 4$ y $x = -1$



Luego, el conjunto solución de la inecuación: $(x - 4)(x + 1) \geq 0$ es:

$$C.S. = <\infty; -1] \cup [4; \infty> \quad ....(\alpha)$$

De la inecuación (2): $x^2 - 3x + 4 < 0$

mitad de 3 es 3/2, el cuadrado de 3/2 es 9/4

Sumo y resto 9/4: $\underbrace{x^2 - 3x + \frac{9}{4}}_{} - \frac{9}{4} + 4 \leq 0$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} - 4 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq -\frac{7}{4}$$

En esta última expresión; como el primer miembro, está elevado al cuadrado resultará positivo; por lo tanto el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 3x + 4 \geq 0$ será el conjunto vacio.

Osea. $C.S = \phi \quad ...(\beta)$

En tercer lugar, hallamos la UNION de las expresiones (α) y (β) siendo dicha unión:

$$<-\infty ; -1] \cup [4 ; \infty> \cup \phi$$

Luego; el conjunto Solución de la inecuación $|x^2 - 3x| \geq 4$ es:

$$C.S = <-\infty ; -1] \cup [4; \infty>$$ **Rpta.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 11

Ejercicio 1: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x^2 - 5| \leq x + 3$

Resolución:

Rpta. $C.S. = \left[\frac{1-\sqrt{33}}{2} ; -2\right] \cup \left[1 ; \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right]$

Ejercicio 2: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x^2 - x| \geq 6$

Resolución:

Rpta. $C.S = <-\infty ; -2] \cup [3; \infty>$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE INECUACIONES CUADRÁTICAS CON VALOR ABSOLUTO

Halla el conjunto solución de cada inecuación siguiente. Escribir las respuestas utilizando intervalos:

A. $|x^2-4| < x+2$

B. $|x^2+8| \leq 7x-4$

C. $|x^2-3x| > x+5$

D. $|x^2-5x| \geq 3x-12$

E. $|x^2-2x|-3 > 0$

F. $|x^2-x|-12 \leq 0$

G. $|x^2-9x|-20 \geq 0$

H. $|2x^2+3x|>3-2x$

I. $|3x^2-5x|<2x-2$

J. $|4x^2-x| \geq 3$

K. $|2x^2+3x| > 2x+15$

L. $|5x^2+4x| < 6-3x$

Clave de Respuestas

A. C.S $= <1\,;3>$

B. C.S $= [3\,;4]$

C. C.S $= <-\infty\,;-1> \cup <5;\infty>$

D. C.S $= <-\infty\,;1+\sqrt{13}] \cup [6;\infty>$

E. C.S $= <-\infty;-1> \cup <3;\infty>$

F. C.S $= [-3\,;4]$

G. C.S $= \left\langle -\infty;\frac{9-\sqrt{161}}{2}\right] \cup [4;5] \cup \left[\frac{9+\sqrt{161}}{2};\infty\right\rangle$

H. C.S $= \langle -\infty;-3\rangle \cup \langle 1/2;\infty\rangle$

I. C.S $= \left\langle \frac{3+\sqrt{33}}{6}\,;\,2\right\rangle$

J. C.S $= <-\infty\,;-3/4] \cup [1;\infty>$

K. C.S $= <-\infty\,;-3> \cup <5/2\,;\infty>$

L. C.S $= <-2\,;3/5>$

Teorema: $a^2 < k \rightarrow -\sqrt{k} < a < \sqrt{k}$; si: $k > 0$
Teorema: $a^2 > b \rightarrow a > \sqrt{b} \;\vee\; a < -\sqrt{b}$

SABIAS QUE...

... existe un gran número de cuadrados invertidos?

12^2 =	144	➡	21^2 =	441
13^2 =	196	➡	31^2 =	961
102^2 =	10 404	➡	201^2 =	40 401
103^2 =	10 609	➡	301^2 =	90 601
112^2 =	12 544	➡	211^2 =	44 521
113^2 =	12 769	➡	311^2 =	96 721
122^2 =	14 884	➡	221^2 =	48 841

Intenta hallar otros.

Máximo Número de Puntos de Corte y Operaciones con Segmentos

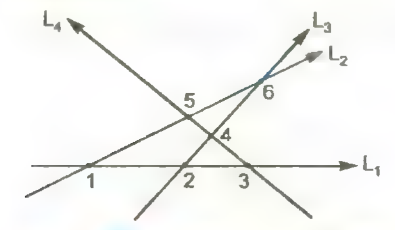
INTRODUCCIÓN

En este capítulo hallaremos en cuántos puntos como máximo se cortan o intersectan una cierta cantidad de figuras planas.

con la letra **"M"** representaremos al **"máximo número de puntos de corte o intersección".**

Ejemplo 1 : ¿En cuántos puntos como máximo se cortan 4 rectas secantes?

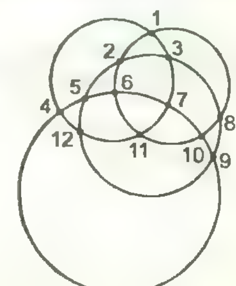
Resolución



- Sean las rectas secantes L_1, L_2, L_3 y L_4.
- Para que se produzca el máximo número de puntos de corte, cada recta debe cortar a las otras tres.
- Del gráfico: M = 6 puntos **Rpta**

Ejemplo 2 : Hallar el máximo número de puntos de intersección de 4 circunferencias secantes.

Resolución :



- Vemos que cada circunferencia se corta con cada una de las otras tres en 2 puntos.
- Luego el máximo número de puntos de corte es,

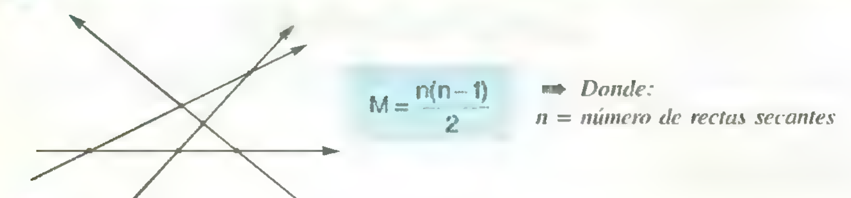
M = 12 puntos **Rpta**

¡Atención!

Existen ciertas fórmulas que se deducen aplicando el Análisis Combinatorio, que nos permiten calcular en forma inmediata el maximo número de puntos de corte o intersección

FÓRMULAS BÁSICAS

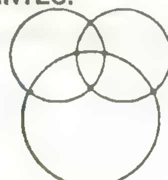
1. MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE CORTE DE "n" RECTAS SECANTES



$$M = \frac{n(n-1)}{2}$$

➡ *Donde:*
n = número de rectas secantes

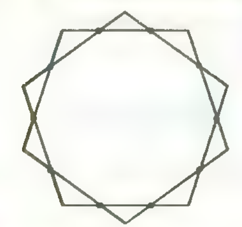
2. MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE CORTE DE "C" CIRCUNFERENCIAS SECANTES.



$$M = c(c-1)$$

➡ *Donde:*
c = número de circunferencias secantes.

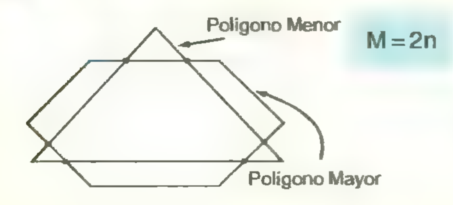
3. MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE CORTE DE "P" POLÍGONOS CONVEXOS DE "L" LADOS CADA UNO.



$$M = L.p(p-1)$$

➡ *Donde:*
P = número de polígonos convexos de igual número de lados
L = número de lados que tiene cada polígono.

4. MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE CORTE DE 2 POLÍGONOS CONVEXOS DE DIFERENTES NÚMEROS DE LADOS.



$$M = 2n$$

➡ *Donde:*
n = número de lados del polígono de menor número de lados.

FÓRMULAS DE COMBINACIÓN

Las Fórmulas de combinación se derivan a partir de la siguiente fórmula general.

5. MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE CORTE ORIGINADO POR LA COMBINACIÓN DE 2 FIGURAS DE DIFERENTES ESPECIES.

$M = kn_1n_2$ ➡ Donde:

$k =$ máximo número de puntos de corte de sólo 2 figuras diferentes.

$n_1 =$ número de figuras de la primera especie.

$n_2 =$ número de figuras de la segunda especie

NOTA: Las figuras pueden ser: rectas, polígonos, circunferencias, elipses, etc.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE CORTE O INTERSECCIÓN

Ejercicio : ¿En cuántos puntos como máximo se cortan 20 rectas secantes?

Resolución:

- Por fórmula: $M = \frac{n(n-1)}{2}$ Según datos $n = 20$

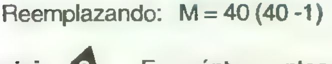
Entonces: $M = \frac{20(20-1)}{2}$ ➡ $M = 190$ puntos **Rpta**

Ejercicio 2 : Calcular el máximo número de puntos de corte de 40 circunferencias secantes.

Resolución:

- Por fórmula: $M = c(c-1)$ donde $c = 40$

Reemplazando: $M = 40\,(40-1)$ ➡ $M = 1560$ puntos **Rpta**



Ejercicio 3 : ¿En cuántos puntos como máximo se cortan 18 cuadriláteros convexos?

Resolución:

- Por fórmula: M = L.p(p - 1) Según datos: L = 4 (# de lados de un cuadrilátero) , p = 18 (# de cadriláteros)

M = 4 × 18(18 - 1) ➡ **M = 1224 puntos** **Rpta**

Ejercicio 4 : Encontrar el máximo número de puntos de intersección de 48 pentágonos convexos:

Resolución:

- M = L.p(p-1); según datos: L = 5 (# de lados de un pentágono) ; p = 48 (# de pentagonos)

M = 5 x 48 (48 - 1) ➡ **M = 11280 puntos** **Rpta**

Recuerda Que

A los polígonos se les nombra según su número de lados. Veamos:

# de lados	Nombre del Polígono
L = 3	Triángulo
L = 4	Cuadrilátero
L = 5	Pentágono
L = 6	Exágono o Hexágono
L = 7	Eptágono o Heptágono
L = 8	Octógono u Octágono
L = 9	Eneágono o Nonágono
L = 10	Decágono
L = 11	Ondecágono
L = 12	Dodecágono
L = 15	Pentadecágono
L = 20	Icoságono
L = 25	Polígono de 25 lados, etc.

Ejercicio 5 : Calcular el máximo número de puntos de intersección de 10 triángulos secantes con 30 cuadriláteros secantes.

Resolución:

¡ATENCIÓN!

Cuando nos dan dos o más grupos de figuras que se cortan el maximo número de puntos de corte se calcula según el siguiente procedimiento:

1° Se calcula en forma separada en cuántos puntos se cortan cada uno de los grupos utilizando las fórmulas básicas.

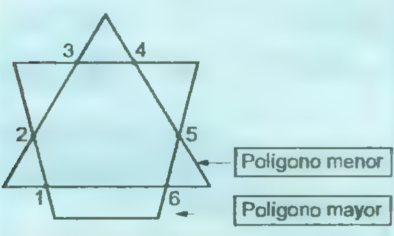
2° Calculamos los puntos de intersección originado por la combinación de dos figuras diferentes.

3° Finalmente sumamos todos los resultados.

- En primer lugar calculamos en forma separada el número de puntos de corte de:
  - 10 triángulos secantes: $M_1 = L.p(p-1) = 3 \times 10(10-1)$ ➡ $M_1 = 270$
  - 30 cuadriláteros secantes: $M_2 = L.p(p-1) = 4 \times 30(30-1)$ ➡ $M_2 = 3\,480$
- Ahora usamos la fórmula de combinación para hallar en cuántos puntos se cortan 10 triángulos con 30 cuadriláteros.

Recuerda Que:

Para hallar "K" combinamos 2 figuras: 1 triángulo y 1 cuadrilátero.



$K = 2(\#\text{ lados del polígono menor})$
$K = 2(3)$

$K = 6$

$M_3 = kn_1n_2$ ➡ $n_1 = 10$ triángulos, $n_2 = 30$ cuadriláteros

$M_3 = 6 \times 10 \times 30$

$M_3 = 1800$

- Finalmente la respuesta sería:

$M = M_1 + M_2 + M_3$
$M = 270 + 3480 + 1800$

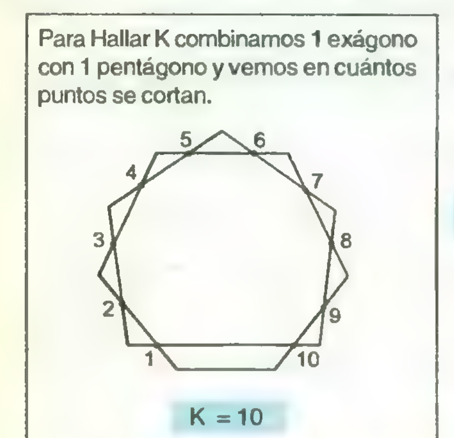
$M = 5550$ puntos **Rpta**

Ejercicio 6 : Hallar el máximo número de puntos de corte de 12 exágonos secantes con 10 pentágonos secantes.

Resolución:

- Para 12 Exágonos secantes: $M_1 = L.p(p-1) = 6 \times 12(12-1)$ ➡ $M_1 = 792$
- Para 10 Pentágonos secantes: $M_2 = L.p(p-1) = 5 \times 10(10-1)$ ➡ $M_2 = 450$
- Para 12 Exágonos y 10 pentágonos:

Para Hallar K combinamos 1 exágono con 1 pentágono y vemos en cuántos puntos se cortan.



K = 10

$M_3 = kn_1n_2$ ➡ n_1 = 12 exágonos; n_2 = 10 pentágonos

$M_3 = 10 \times 12 \times 10$

$M_3 = 1200$

- Finalmente:

$M = M_1 + M_2 + M_3$

$M = 792 + 450 + 1200$

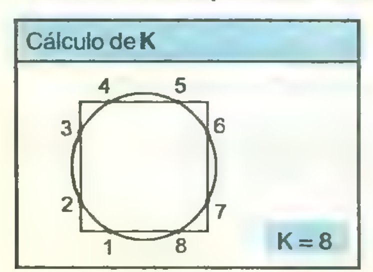
M = 2442 puntos **Rpta**

Ejercicio 7 : Calcular el máximo número de puntos de corte de 20 circunferencias secantes con 50 cuadriláteros secantes.

Resolución:

- 20 circunferencias: $M_1 = c(c-1) = 20(20-1)$ ➡ $M_1 = 380$
- 50 cuadriláteros: $M_2 = L.p(p-1) = 4 \times 50(50-1)$ ➡ $M_2 = 9\,800$
- 20 circunferencias y 50 cuadriláteros:

Cálculo de **K**



K = 8

$M_3 = kn._1.n_2$ ➡ n_1 = 20 circunferencia; n_2 = 50 cuadriláteros

$M_3 = 8 \times 20 \times 50$

$M_3 = 8000$

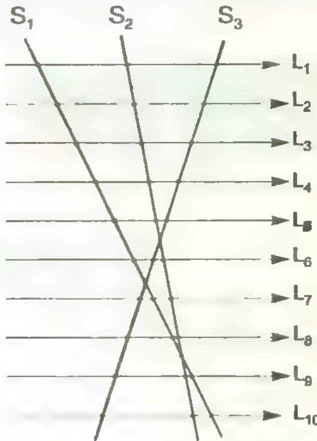
- Luego el total de puntos de corte sería

$M = M_1 + M_2 + M_3 = 380 + 9800 + 8000$

M = 18 180 puntos **Rpta**

Ejercicio 8 : Calcular el máximo número de puntos de intersección de 3 rectas secantes y 10 rectas paralelas.

Resolución:



- Sean las rectas secantes: S_1, S_2 y S_3 y las rectas paralelas: $L_1, L_2, \ldots, L_{10}$
- Máximo número de puntos de corte de las 3 rectas secantes:

$$M_1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} \Rightarrow M_1 = 3$$

- Máximo número de puntos de corte de las 10 rectas paralelas.

$$M_2 = 0$$

Cálculo de K.

Como una recta secante con una recta paralela se cortan en un punto.

Entonces: $K = 1$

- Máximo número de puntos de corte de las **3** rectas secantes y las 10 rectas paralelas.

$$M_3 = kn_1n_2 \Rightarrow \begin{array}{l} n_1 = 3 \text{ rectas secantes} \\ n_2 = 10 \text{ rectas paralelas} \end{array}$$

$$M_3 = 1 \times 3 \times 10$$

$$M_3 = 30$$

- Finalmente, el total de puntos sería:

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

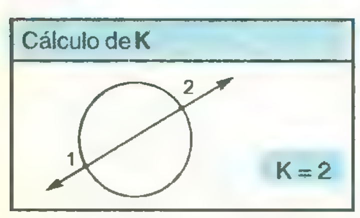
$$M = 3 + 0 + 30$$

$$M = 33 \text{ puntos}$$ **Rpta**

Ejercicio 9 : ¿En cuántos puntos como máximo se cortan 20 rectas secantes con 16 circunferencias secantes?

Resolución:

- 20 rectas secantes: $M_1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{20(20-1)}{2} \Rightarrow M_1 = 190$
- 16 circunferencias secantes: $M_2 = c(c-1) = 16(16-1) \Rightarrow M_2 = 240$
- 20 rectas secantes y 16 circunferencias secantes.



$M_3 = kn_1n_2 \Rightarrow$ $n_1 = 20$ rectas, $n_2 = 16$ circunferencias

$M_3 = 2 \times 20 \times 16$

$M_3 = 640$

- Finalmente: $M = M_1 + M_2 + M_3$

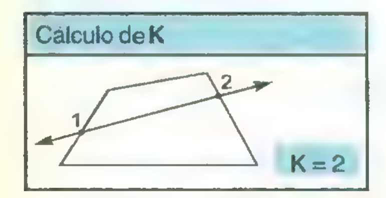
$M = 190 + 240 + 640$

$M = 1070$ puntos **Rpta**

Ejercico 10 : Hallar el máximo número de puntos de corte de 17 cuadriláteros y 22 rectas paralelas.

Resolución:

- 17 cuadriláteros: $M_1 = L.p(p-1) = 4 \times 17(17-1) \Rightarrow M_1 = 1088$
- 22 rectas paralelas: $M_2 = 0$ (Porque las paralelas no se cortan)
- 17 cuadriláteros y 22 rectas paralelas.



$M_3 = kn_1n_2$ $n_1 = 17$ cuadriláteros, $n_2 = 22$ rectas

$M_3 = 2 \times 17 \times 22$

$M_3 = 748$

- $M = M_1 + M_2 + M_3 = 1088 + 0 + 748 \Rightarrow M = 1836$ puntos **Rpta**

Ejercicio 11 : Calcular el máximo número de puntos de corte de 100 rectas siendo 40 de ellas concurrentes.

Resolución:

- Las 40 rectas concurrentes originan 1 punto de corte: $M_1 = 1$
- Las 60 rectas restantes serán secantes: $M_2 = \dfrac{60(60-1)}{2} \Rightarrow M_2 = 1770$
- Las 40 rectas concurrentes y las 60 rectas secantes se cortan en:

$M_3 = kn_1n_2 \Rightarrow$ $n_1 = 40$, $n_2 = 60$, $k = 1$

$M_3 = 1 \times 40 \times 60$

$M_3 = 2400$

- Luego:
  $M = M_1 + M_2 + M_3 = 1 + 1770 + 2400$

$\therefore$ **M = 4 171 puntos** **Rpta**

Ejercicio 12 : Hallar el máximo número de puntos de corte de 25 eneágonos y 32 rectas secantes:

Resolución:

- 25 eneágonos: $M_1 = L.p(p-1) = 9 \times 25(25-1) \Rightarrow M_1 = 5\,400$
- 32 secantes: $M_2 = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{32(32-1)}{2} \Rightarrow M_2 = 496$
- 25 eneágonos y 32 secantes:

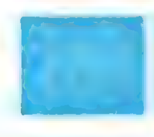
Valor de K
1 recta corta a un polígono convexo en 2 puntos. Entonces: K = 2

$M_3 = kn_1n_2 \Rightarrow$ $n_1 = 25$ eneágonos, $n_2 = 32$ rectas

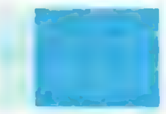
$M_3 = 2 \times 25 \times 32$

$M_3 = 1600$

- $M = M_1 + M_2 + M_3 = 5400 + 496 + 1600 \Rightarrow$ **M = 7 496 puntos** **Rpta**



TALLER DE EJERCICIOS N° (12)



Ejercicio 1 : Calcular el máximo número de puntos de corte de 40 rectas secantes.

Resolución:

Rpta. 780 puntos

Ejercicio 2 : Si tenemos 36 circunferencias secantes, ¿En cuántos puntos como máximo se cortan?

Resolución:

Rpta. 1 260 puntos

Ejercicio 3 : Hallar el máximo número de puntos de corte de 14 pentágonos convexos.

Resolución:

Rpta. 910 puntos

Ejercicio 4 : Calcular el máximo número de puntos de intersección de 10 rectas secantes y 8 rectas paralelas.

Resolución:

Rpta.: 125 puntos

Ejercicio 5 : ¿En cuántos puntos como máximo se cortan 10 rectas secantes y 22 circunferencias secantes?

Resolución:

Rpta. 947 puntos

Ejercicio 6 : Hallar el máximo número de puntos de corte de 12 cuadriláteros y 14 rectas paralelas.

Resolución:

Rpta. 864 puntos

Ejercicio 7 : Calcular el máximo número de puntos de corte 10 exágonos convexos y 14 circunferencias secantes.

Resolución:

Rpta. 2402 puntos

Ejercicio 8 : ¿En cuántos puntos como máximo se cortan 8 rectas secantes, 9 circunferencias secantes y 10 cuadriláteros convexos?

Resolución:

Rpta. 1 484 puntos

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE CORTE

NIVEL I

Ejercicio 1: Hallar el máximo número de puntos de corte de 8 circunferencias secantes.

A) 40 **B)** 72 **C)** 56 **D)** 48 **E)** 42

Ejercicio 2: ¿10 rectas secantes en cuántos puntos como máximo se cortan?

A) 45 **B)** 35 **C)** 50 **D)** 70 **E)** 90

Ejercicio 3: Encontrar el máximo número de puntos de intersección de 12 cuadriláteros convexos.

A) 740 **B)** 580 **C)** 420 **D)** 528 **E)** 618

Ejercicio 4: ¿Un pentágono convexo con un exágono convexo, en cuántos puntos como máximo se cortan?

A) 10 **B)** 12 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 15

Ejercicio 5: ¿Cuántas rectas secantes se necesitan para que originen un total de 15 puntos de corte como máximo?

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 5 **E)** 6

Ejercicio 6: Un grupo de circunferencias secantes determinan 72 puntos de corte como máximo. ¿Cuántas circunferencias son?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

Ejercicio 7: Calcular el máximo número de puntos de corte de 32 exágonos convexos.

A) 6 482 **B)** 5 952 **C)** 9 540
D) 3 410 **E)** 2 564

Ejercicio 8: Determinar el máximo número de puntos de corte de un icoságono convexo con un pentadecágono convexo

A) 8 **B)** 15 **C)** 40 **D)** 30 **E)** 20

Ejercicio 9: Si «x» rectas secantes determinan un máximo número de puntos de corte igual a 28, hallar «x».

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

Ejercicio 10: Si «C» circunferencias secantes se cortan en un máximo de 12 puntos, «2C» circunferencias secantes se cortarán en un máximo de:

A) 24 puntos **B)** 36 puntos **C)** 40 puntos
D) 28 puntos **E)** 56 puntos

Ejercicio 11: Un polígono convexo y una recta secante en ¿Cuántos puntos como máximo se cortan?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ejercicio 12: Si «x» pentágonos convexos se cortan en un máximo de 30 puntos, ¿En cuántos puntos como máximo se cortan «x» exágonos convexos?

A) 36 **B)** 42 **C)** 28 **D)** 30 **E)** 60

Ejercicio 13: Hallar el máximo número de puntos de corte de una circunferencia y un pentágono convexo.

A) 5 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

Ejercicio 14: Un polígono convexo de 23 lados con una circunferencia. ¿En cuántos puntos como máximo se cortan?

A) 23 B) 28 C) 40 D) 50 E) 46

Ejercicio 15: Un polígono convexo de 38 lados con un polígono convexo de 50 lados. ¿En cuántos puntos como máximo se cortan?

A) 1 900 B) 950 C) 76
D) 66 E) 100

Ejercicio 16: 80 rectas paralelas, ¿En cuántos puntos como máximo cortan a una recta secante?

A) 80 B) 40 C) 160 D) 140 E) 90

Ejercicio 17: Hallar el máximo número de puntos de corte de 10 rectas paralelas y una circunferencia.

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

Ejercicio 18: Hallar el máximo número de puntos de corte de 4 rectas concurrentes y 1 circunferencia *(Nota: rectas concurrentes son aquellas que pasan por un mismo punto).*

A) 8 B) 4 C) 9 D) 10 E) 7

Ejercicio 19: Hallar el máximo número de puntos de intersección de 13 rectas paralelas y 4 rectas secantes.

A) 52 B) 54 C) 56 D) 58 E) 60

Ejercicio 20: Calcular el máximo número de puntos de corte de un cuadrilátero cóncavo y una recta.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Ejercicio 21: Determinar el máximo número de puntos de corte de un triángulo, un cuadrilátero convexo y una recta secante.

A) 6 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

Ejercicio 22: Encontrar el máximo número de puntos de corte de un cuadrilátero convexo, un pentágono convexo y una circunferencia.

A) 14 B) 16 C) 24 D) 28 E) 26

Ejercicio 23: Hallar el máximo número de puntos de corte de un triángulo, una circunferencia y 5 rectas paralelas.

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

Ejercicio 24: Hallar el máximo número de puntos de corte de 2 circunferencias y 4 triángulos.

A) 86 B) 78 C) 84 D) 91 E) 92

Clave de Respuestas

1. C	2. A	3. D	4. A
5. E	6. B	7. B	8. D
9. C	10. E	11. B	12. A
13. D	14. E	15. C	16. A
17. E	18. C	19. D	20. C
21. C	22. E	23. C	24. A

NIVEL II

Ejercicio 1: ¿En cuántos puntos como máximo se cortan 12 pentágonos convexos con 10 rectas secantes?

A) 945 B) 450 C) 845
D) 545 E) 690

Ejercicio 2: Encontrar el máximo número de puntos de corte de 30 cuadriláteros convexos y 15 rectas paralelas.

A) 4 150 B) 3 680 C) 1 480
D) 2 830 E) 4 380

Ejercicio 3: Hallar el máximo número de puntos de corte de 80 rectas, siendo 50 de ellas paralelas.

A) 1 950 B) 1 935 C) 1 995
D) 1 970 E) 183

Ejercicio 4: Hallar el máximo número de puntos de corte de 60 rectas, siendo 20 de ellas concurrentes.

A) 642 B) 1 842 C) 1 581
D) 1 351 E) 1 273

Ejercicio 5: Calcular el máximo número de puntos de corte de 15 circunferencias con 14 heptágonos convexos.

A) 4 424 B) 7 281 C) 3 216
D) 5 608 E) N.A.

Ejercicio 6: ¿En cuántos puntos como máximo se cortan 3 eneágonos convexos, 7 decágonos convexos y 1 circunferencia?

A) 994 B) 1 021 C) 2 002
D) 1 847 E) 1 046

Ejercicio 7: Calcular el máximo número de puntos de corte de 8 octógonos convexos, 5 triángulos y 7 exágonos convexos.

A) 1 882 B) 2 432 C) 3 560
D) 1244 E) 6 830

Ejercicio 8: Hallar el máximo número de puntos de corte de 9 circunferencias, 6 triángulos y 12 rectas paralelas.

A) 648 B) 425 C) 846 D) 686 E) 1 022

Ejercicio 9: Encontrar el máximo número de puntos de intersección de 11 circunferencias y 8 rectas concurrentes.

A) 486 B) 572 C) 728 D) 287 E) 782

Ejercicio 10: Hallar el máximo número de puntos de corte de 16 circunferencias, 14 rectas paralelas y un triángulo.

A) 812 B) 248 C) 560 D) 648 E) 816

Ejercicio 11: Determinar en cuántos puntos como máximo se cortan «n» circunfeerencias y «n» triángulos.

A) $4n^2 - 4n$ B) $6n^2 - 4n$ C) $8n^2 - 6n$
D) $10n^2 - 4n$ E) $n^2 + n - 1$

Ejercicio 12: Si a un grupo de rectas secantes se le agrega una más, el máximo número de puntos de corte se duplicaría. Hallar el número inicial de rectas secantes.

A) 15 B) 7 C) 4 D) 3 E) 5

Ejercicio 13: Determinar el máximo número de puntos de intersección de 20 rectas secantes, sabiendo que 6 de ellas pasan por un mismo punto.

A) 160 B) 176 C) 92
D) 172 E) 45

Ejercicio 14 De «m» rectas secantes «n» son rectas paralelas entre si. Encontrar el máximo número de puntos de intersección.

A) $(m - n)(m + n - 1) / 2$
B) $(m + n)(m - n + 1) / 2$
C) $(m + n)m / 2$
D) $(m^2 - n^2) / 2$
E) $2mn / (m + n)$

Ejercicio 15 : 4 rectas secantes y 3 circunferencias secantes originan el mismo número de puntos de corte que «n» triángulos. Hallar «n»

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Ejercicio 16 : Hallar el máximo número de puntos de corte de "n" polígonos convexos secantes de "n" lados cada uno y de "n" polígonos convexos secantes de "n/2" lados cada uno.

A) $2n^2(3n - 1)$ B) $\frac{3}{2}n^2(5n-2)$

C) $\frac{n^2}{2}(5n-3)$ D) $\frac{3n^2}{2}(n-1)$

E) $\frac{n^2}{2}(n+1)$

Ejercicio 17 : El máximo número de puntos de corte que producen un grupo de rectas secantes es igual a 8 veces el número de estas rectas. ¿Cuántas rectas son?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 19 E) 21

Ejercicio 18 : Si se duplica el número de rectas secantes, el máximo número de puntos de corte se quintuplica. Hallar el número inicial de rectas secantes.

A) 10 B) 8 C) 7 D) 5 E) 3

Ejercicio 19 : Determinar el máximo número de puntos de intersección de 1 triángulo, 1 cuadrilátero convexo, 1 pentágono convexo y 1 circunferencia.

A) 44 B) 42 C) 40 D) 46 E) 48

Ejercicio 20 : Calcular el máximo número de puntos de intersección de 2 octógonos convexos secantes sabiendo que tienen un vértice común.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Clave de Respuestas

1. A	2. E	3. B	4. C
5. A	6. E	7. A	8. C
9. D	10. A	11. D	12. D
13. B	14. A	15. A	16. C
17. C	18. E	19. A	20. B

SEGMENTO DE RECTA

Definición: Es parte de la línea recta comprendida entre dos puntos (incluyendo a estos) a los cuales se les llama extremos del segmento.

Ejemplo: En la **Fig.1** se observa a un segmento de extremos A y B

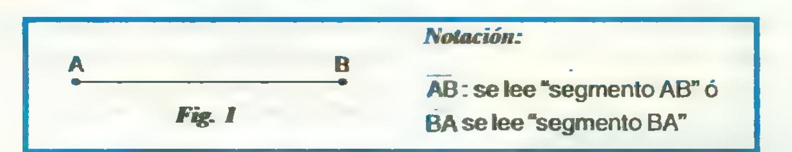


Fig. 1

Notación:

$\overline{AB}$: se lee "segmento AB" ó
$\overline{BA}$ se lee "segmento BA"

LONGITUD DE UN SEGMENTO.- Todo segmento se caracteriza por tener una longitud que es un número real positivo que nos indica la distancia que hay entre los extremos del segmento.

Ejemplo: En la **Fig.2** vemos a un segmento cuyos extremos A y B distan 12 cm.

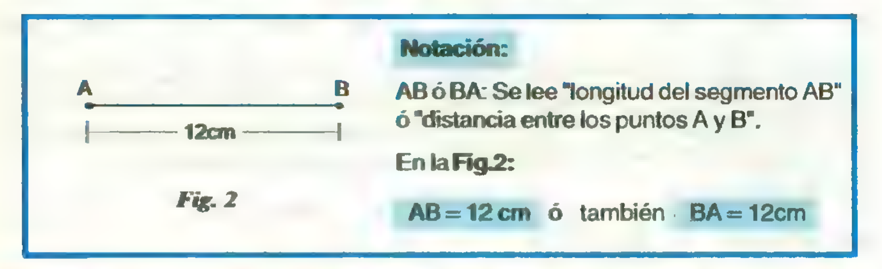


Fig. 2

Notación:

AB ó BA: Se lee "longitud del segmento AB" ó "distancia entre los puntos A y B".

En la **Fig.2:**

AB = 12 cm ó también BA = 12cm

NOTA: Cuando escribimos "$\overline{AB}$" nos referimos a una línea recta de extremos **A** y **B**. Y cuando escribimos "**AB**" nos referimos a la longitud o distancia que hay entre los extremos A y B.

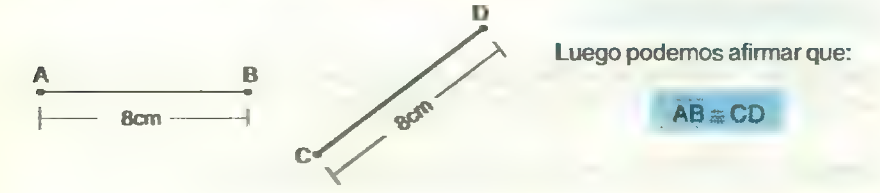
Por lo tanto: $\overline{AB} \neq AB$

CONGRUENCIA DE SEGMENTOS

Definición.- Dos segmentos son congruentes si y sólo si tienen la misma longitud.

$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow AB = CD$ El símbolo $\cong$ se lee : "es congruente a"

Ejemplo: En la figura: AB=8 cm y CD = 8 cm.



Luego podemos afirmar que:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

A) $(m - n)(m + n - 1) / 2$
B) $(m + n)(m - n + 1) / 2$
C) $(m + n)m / 2$
D) $(m^2 - n^2) / 2$
E) $2mn / (m + n)$

Ejercicio 15 : 4 rectas secantes y 3 circunferencias secantes originan el mismo número de puntos de corte que «n» triángulos. Hallar «n»

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Ejercicio 16 : Hallar el máximo número de puntos de corte de "n" polígonos convexos secantes de "n" lados cada uno y de "n" polígonos convexos secantes de "n/2" lados cada uno.

A) $2n^2(3n - 1)$ B) $\frac{3}{2}n^2(5n-2)$

C) $\frac{n^2}{2}(5n-3)$ D) $\frac{3n^2}{2}(n-1)$

E) $\frac{n^2}{2}(n+1)$

Ejercicio 17 : El máximo número de puntos de corte que producen un grupo de rectas secantes es igual a 8 veces el número de estas rectas. ¿Cuántas rectas son?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 19 E) 21

Ejercicio 18 : Si se duplica el número de rectas secantes, el máximo número de puntos de corte se quintuplica. Hallar el número inicial de rectas secantes.

A) 10 B) 8 C) 7 D) 5 E) 3

Ejercicio 19 : Determinar el máximo número de puntos de intersección de 1 triángulo, 1 cuadrilátero convexo, 1 pentágono convexo y 1 circunferencia.

A) 44 B) 42 C) 40 D) 46 E) 48

Ejercicio 20 : Calcular el máximo número de puntos de intersección de 2 octógonos convexos secantes sabiendo que tienen un vértice común.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Clave de Respuestas

1. A	2. E	3. B	4. C
5. A	6. E	7.A	8. C
9. D	10. A	11. D	12. D
13. B	14. A	15. A	16. C
17. C	18. E	19. A	20. B

SEGMENTO DE RECTA

Definición: Es parte de la línea recta comprendida entre dos puntos (incluyendo a estos) a los cuales se les llama extremos del segmento.

Ejemplo: En la **Fig.1** se observa a un segmento de extremos A y B

OPERACIONES CON SEGMENTOS.- Son las diferentes operaciones que se pueden realizar con los números reales que representan a las longitudes de los segmentos.

Ejemplo: Con respecto al a **Fig. 3** realizar las siguientes operaciones:

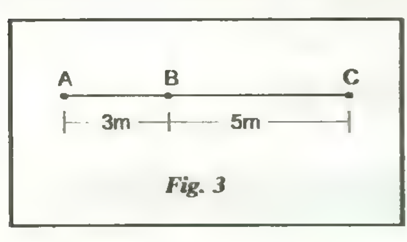


Fig. 3

I) $AB + BC$ II) $AB \cdot BC$

III) $BC - AB$ IV) $\frac{AB}{BC}$

V) $\sqrt{BC^2 - AB^2}$

Resolución:

- De la **Fig.3** vemos que: $AB = 3\,m$ y $BC = 5\,m$
- Reemplazando en cada operación:

I) $AB + BC = 3\,m + 5\,m = 8\,m$ **Rpta.**

II) $AB \cdot BC = (3m)(5m) = 15\,m^2$ **Rpta.**

III) $BC - AB = 5m - 3m = 2m$ **Rpta.**

IV) $\frac{AB}{BC} = \frac{3m}{5m} = 0{,}6$ **Rpta.**

V) $\sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5m)^2 - (3m)^2} = \sqrt{25m^2 - 9m^2} = \sqrt{16m^2} = 4m$ **Rpta.**

AXIOMAS IMPORTANTES:

1. ***"El todo es igual a la suma de sus partes"***

Ejemplo: En la **Fig. 4** si $AB = a$ y $BC = b$

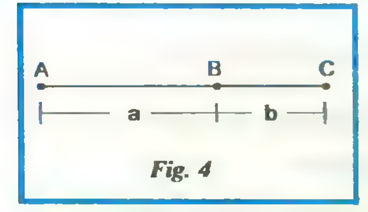


Fig. 4

Entonces:

$AC = AB + BC$

$AC = a + b$

2. ***"Si un segmento se divide en dos partes, la longitud de una de las partes es igual a la longitud total menos la longitud de la otra parte".***

Ejemplo: En la **Fig. 5** si AC = m y AB = n

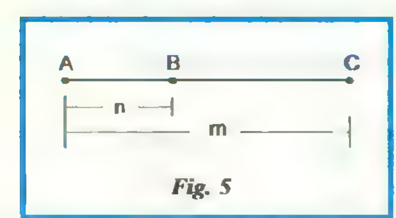


Fig. 5

Entonces:

BC = AC - AB

BC = m - n

3. *"Todo segmento tiene un único el cuál punto medio equidista de los extremos"*

Ejemplo: En la **Fig. 6** si "O" es punto medio de $\overline{AB}$,

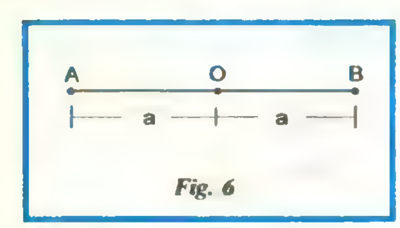


Fig. 6

Entonces:

AO = OB

si AO = a ➡ OB = a

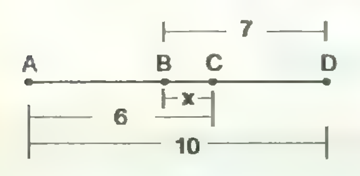
PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M.
SOBRE SEGMENTOS

Problema 1: Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A,B,C y D tal que: AD = 10 m, AC = 6 m y BD = 7m. Calcular BC:

A) 2m **B)** 3m **C)** 5m **D)** 6m **E)** 1m

Resolución:

- En primer lugar realizamos un gráfico, de acuerdo a los datos:



- Sea "x" la longitud de $\overline{BC}$.
- Del gráfico:

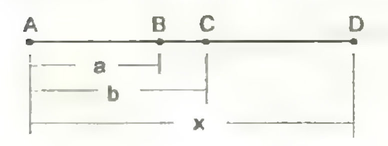
i) AB = AC - BC ➡ AB = 6 - x
ii) AB + BD = AD

(6-x)+7=10 ➡ ∴ x = 3m **Rpta B**

Problema 2: Se tienen los puntos colineales A, B, C y D. Si: 4 BD + 3CD = 18 BC, y 3AC - 2AB = 20, hallar "AD".

A) 15 B) 18 C) 20 D) 25 E) 30

Resolución:



- Sea AD = x , AB = a , AC = b
- Según datos del problema:

1. 3 AC-2AB = 20

   3b-2a = 20 ....(I)

2. 4BD + 3CD = 18BC

   4(x - a) + 3(x - b) = 18(b - a) ➠ 4x - 4a + 3x - 3b = 18b - 18a

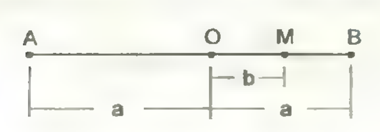
   7x = 21b - 14a, sacando séptima: x = 3b - 2a ...(II)

   - Finalmente, sustituimos **(I)** en **(II)** ➠ ∴ x = 20 **Rpta.:C**

Problema 3: Si "O" es el punto medio de AB y M es punto cualquiera de OB, hallar el valor de "K" si: $K = \frac{AM - MB}{OM}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0,5

Resolución:



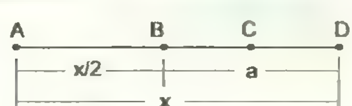
- Sea AO = OB = a y OM = b
- Luego: $K = \frac{(a+b)-(a-b)}{b} = \frac{2b}{b}$

  ∴ k = 2 **Rpta.: B**

Problema 4: Sobre una recta se disponen de los puntos consecutivos A, B, C y D, donde AD = 2 AB. Calcular AD si $BD^2 + 9 = 6BD$.

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) 10

Resolución:



- Sea AD = x , según datos:

  AD = 2AB ⇒ AB = x / 2

- Hacemos BD = a

$$\frac{1}{OC}-\frac{1}{AC}=\frac{AO}{OB^2+2AO} \Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=\frac{a}{b^2+2a}$$

$$\frac{a+\not{b}-\not{b}}{b(a+b)}=\frac{a}{b^2+2a} \Rightarrow \frac{\not{a}}{ab+b^2}=\frac{\not{a}}{b^2+2a} \Rightarrow ab+\not{b^2}=\not{b^2}+2a$$

$$\not{a}b=2\not{a} \Rightarrow \quad b=2 \qquad ....(2)$$

- Reemplanzando (2) en (1): $BC=4$ **Rpta.:C**

Problema 7: Sobre una recta se toma en forma consecutiva los puntos A,B,C y D.

Si $AB=a$, $CD=b$, y $\frac{AB}{AC}+\frac{CD}{BD}=1$, Calcular "BC"

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\sqrt{\frac{ab}{a+b}}$ D) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ E) $\sqrt{ab}$

Resolución:

A B C D
a x b

- Sea $BC=x=?$
- Según datos:

$$\frac{AB}{AC}+\frac{CD}{BD}=1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+x}+\frac{b}{x+b}=1 \Rightarrow \frac{a(x+b)+b(a+x)}{(a+x)(x+b)}=1$$

$$a(x+b)+b(a+x)=(a+x)(x+b) \Rightarrow \not{ax}+ab+ab+\not{bx}=x^2+\not{ax}+\not{bx}+ab$$

$$ab=x^2 \Rightarrow \quad \therefore \quad x=\sqrt{ab}$$ **Rpta.:E**

TALLER DE PROBLEMAS N° 13

Problema 1 : Se tienen los puntos colineales y consecutivos A,B,C y D, tales que: AB = 2 CD y AB + 2AC + 3 AD = BD - 3BC + 42. Calcular "AC"

Resolución:

Rpta. AC = 6

Problema 2 : Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A,B,C y D de tal manera que: AC = 6,BD = 8, y AB + CD = 4. Hallar "BC".

Resolución

Rpta. BC = 5

Problema 3 : Dado los puntos colineales M,A,B y C tales que BC = 3AB.

Calcular: $\dfrac{3MA + MC}{4MB}$

Resolución:

Rpta. 1

Problema 4 : Sobre una recta se toman los puntos consecutivos: A,B,C,D,E, tales que: AC + BE = 20 y AE = BC + 12, hallar "BC"

Resolución:

Rpta. BC = 4

Problema 5 : Se tienen los puntos A,B,C sobre una línea recta que cumplen la condición:

$$\frac{1}{AB}-\frac{1}{AC}=\frac{2}{5}$$ hallar "AB" si BC = 8

Resolución:

Rpta. AB = 2

Problema 7 : Dados los puntos colineales A, M, O, R, donde "O" es punto medio de $\overline{AR}$. Hallar MO si MR - MA = 18 m.

Resolución:

Rpta.: MO = 9m

Problema 6 : Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A,B,C y D tales que AB . BD = AC.CD. Calcular "AB" si CD = 7.

Resolución:

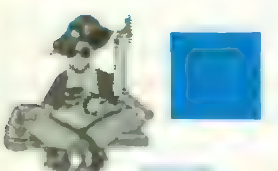
Rpta. AB = 7

Problema 8 : Se ubican los puntos A, B,C y D sobre una recta de modo que: AC = 5 ; BD = 3. Hallar "BC" si

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{4}{7-2BC}$$

Resolución:

Rpta. BC = 2



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE OPERACIONES CON SEGMENTOS

NIVEL I

Ejercicio 1: Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D tales que «B» es punto medio de $\overline{AC}$. Calcular «BD» sabiendo que: AD + CD = 18

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

Ejercicio 2: Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, M, C, donde «M» es punto medio de AC. Sabiendo que BC - AB = 24, calcular «BM».

A) 5 B) 6 C) 8 D) 12 E) 18

Ejercicio 3 : Los puntos colineales A,B,C,D, satisfacen las siguientes condiciones:

$AB = 2 ; CD = 3 ; \frac{BC}{AB} + \frac{AB}{BD} = 1$

Hallar «BC»

A) 0,5 B) 0,75 C) 1 D) 1,25 E) 1,5

Ejercicio 4: En una línea recta se tienen los puntos consecutivos: A,M,N,B, tales que:

BN - AM = 1 y además:

2AM + 3AN = 5NB, hallar «MN»

A) 3/5 B) 2/3 C) 4/3 D) 5/3 E) 1

Ejercicio 5: Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D, E. Si AB + CE = 18 ; BE - CD = 10 y AE - DE = 12, hallar «AE».

A) 10 B) 20 C) 40 D) 30 E) 25

Ejercicio 6: Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D, E, F, G, H. calcular «AH» si BG = 2AH / 3, CF = 3BG/5 y además: AD + BE + DG + CF + EH = 31

A) 12 B) 14 C) 15 D) 17 E) 31

Ejercicio 7: Sobre una recta se dan los puntos consecutivos A, B, C y D, donde BD = 8 y (AB - CD) (AD + BC) = 36. Hallar «AC»

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Ejercicio 8: De una cuerda de cierta longitud se utilizan la cuarta parte, más 4 metros. Luego la tercera parte de lo que sobra, más 3 metros, y finalmente la mitad de lo que queda, más 2 metros, sobrando todavía la sexta parte de 1 metro. ¿Cuántos metros se utilizó en la primera vez?

A) 1 m B) 5 m C) 20 m D) 8 m E) 9 m

Ejercicio 9: Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D, de tal manera que: AD = 24m ; AC = 15m; BD = 17m. Hallar «BC»

A) 6m B) 7m C) 8m D) 9m E) 10m

Ejercicio 10: Sobre una recta se dan los puntos consecutivos M, A y B siendo «O» punto medio de $\overline{AB}$. Calcular «MO» sabiendo que MA = 12 m y AB = 16 m

A) 18 m B) 30 m C) 20 m
D) 24 m E) 36 m

Ejercicio 11: Se tienen los puntos consecutivos A,B,C y D sobre una recta.
Hallar "AC" si: BC = CD = 28 ; CD - AB = 7

A) 48 B) 49 C) 50 D) 54 E) N.A.

Ejercicio 12: Sobre una línea recta se ubican lo puntos consecutivos A, B, C, D, E. Si : AD + BE = 20 y BD = AE / 4
Hallar "BD"

A) 4 B) 10 C) 5 D) 12 E) 8

Clave de Respuestas

1.C	2.D	3.C	4.D
5.B	6.C	7.B	8.E
9.C	10.C	11.B	12.A

NIVEL II

Ejercicio 1: Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BD}$; AC = 3, BD = 2
Hallar "CD".

A) 1 B) 2 C) 0,5 D) 1,5 E) N.A.

Ejercicio 2: En una recta se tiene los puntos consecutivos A,N,G,E,L, siendo N y G los puntos medio de $\overline{AE}$ y $\overline{NL}$, respectivamente. Hallar "AE".

Si : $\frac{1}{NL} - \frac{1}{AE} = \frac{1}{80}$ y GE = 2

A) 10 B) 40 C) 20 D) 30 E) N.A.

Ejercicio 3: Una hormiga camina sobre una línea recta del punto A hacia el punto B, si al llegar al punto M ("M" es el punto medio de $\overline{AB}$) decide retroceder hasta el punto "P" y se da cuenta que la distancia de P hasta M es la cuarta parte de la distancia de P hasta B. Calcular "AB" si la hormiga ha recorrido 72 m.

A) 81 m B) 36 m C) 45 m
D) 54 m E) 108 m

Ejercicio 4: Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C, D y E, tal que "C" es el punto medio de $\overline{AE}$; BC + DE = 15 y además:
2AB + 3BC + 4CD + 5DE = 84. Hallar "AE"

A) 36 B) 32 C) 23 D) 24 E) 42

Ejercicio 5: Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D de tal manera que AB . AD = 3BC . CD y además: $\frac{1}{CD} + \frac{4}{AC} = 15$ Hallar AB

A) 1/15 B) 5 C) 1/5
D) 15/2 E) 2/15

Ejercicio 6: Los puntos A,B,C y D de una recta son consecutivos tales que "AB" es la media aritmética de "AC" y "CD".
Si: $BD^2 = 4BD - 4$, hallar "AD"

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Ejercicio 7: Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A,B,C, y D de tal manera que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \text{ y } \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{3}$$

Hallar "AC"

A) 5 B) 8 C) 12 D) 6 E) 4

Ejercicio 8: Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos M, N, P y Q. Si "A" es punto medio de $\overline{MN}$, "B" punto medio de $\overline{PQ}$, MP=a, AB=b. Halle "NQ".

A) a + b B) a - b C) 2b - a
D) 2a - b E) 2a - 2b

Ejercicio 9: En una recta se consideran los puntos consecutiovs A,B,C y D siendo "C" punto medio de $\overline{AD}$. Hallar:

$$\frac{BD-BA}{3BC}$$

A) 2 B) 2/3 C) 3/2 D) 1 E) 1/2

Ejercicio 10: Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A, B y C, luego tomamos los puntos medio M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{MC}$ respectivamente. Si AB=BC, indicar la alternativa correcta:

A) AM = NC B) AM = 2BN C) MB = BN
D) MB = NC E) MB = 2AB

Ejercicio 11: Sobre una línea recta se considera los puntos consecutivos A; B; C y D, si: AC + BD = 5(AB + CD) y AD = 12. Calcular la longitud de $\overline{BC}$.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 7,5

Ejercicio 12: Sobre una línea recta se considera los puntos consecutivos A;B;C y D, si el punto "C" es el punto medio de $\overline{AD}$, además: $\frac{CB}{CD}=\frac{2}{3}$ y AD = 18

Calcular la longitud de $\overline{BC}$.

A) 6 B) 9 C) 12 D) 8 E) 10

Ejercicio 13: Sobre una línea recta se considera los puntos consecutivos A;B; C y D, si:

AC + AB = 18
BD + CD = 12

Calcular la longitud de AD.

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 19

Ejercicio 14: Sobre una línea recta se considera los puntos consecutivos A; B; C y D, de modo que: $\frac{AC}{BD}=\frac{BC}{CD}$

Luego, podemos afirmar que:

A) 2 AB = AB + CD
B) AB . CD = AD . BC
C) CB^2 = AB . CD
D) $\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{AD}$
E) AB = CD

Ejercicio 15: Sobre una línea recta se considera los puntos consecutivos A; B; C y D, de modo que AB = 27 m ; y AB . AD = n . BC . CD, hallar "n", si además:

$$\frac{1}{CD}+\frac{4}{AC}=\frac{1}{9}$$

A) 3 B) 1 C) 9 D) 4 E) 2

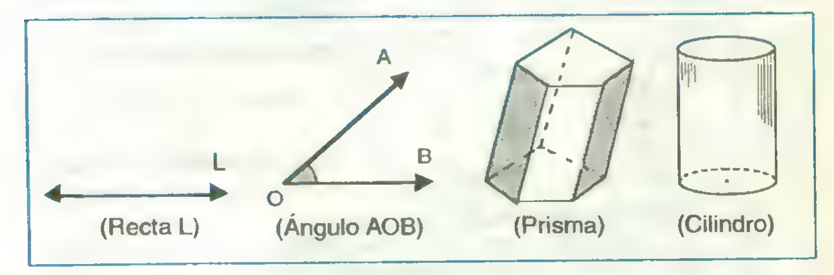
Clave de Respuestas

1.A	2.C	3.E
4C	5C	6D
7.D	8.C	9.B
10.B	11.B	12.A
13.C	14.C	15.A

Capítulo 4 ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

4.1 NOCIONES BÁSICAS

- **La Geometría:** Es una rama de la matemática que tiene por objetivo estudiar las propiedades y relaciones de las figuras geométricas.
- **Figura Geométrica:** Es cualquier conjunto de puntos. Una Recta, un ángulo, un prisma, un clindro; ... etc. Son Figuras Geométricas.



- **Geometría Plana:** Estudia las figuras consideradas en un plano.
- **Geometría del Espacio:** Estudia las figuras cuyos puntos no están en un solo plano.

4.2 ELEMENTOS DE GEOMETRíA

4.2.1 CONCEPTOS GEOMÉTRICOS FUNDAMENTALES

Cuando una idea es tan sencilla que no hay necesidad de definirla o explicarla se dice que es un concepto "primitivo" o que es un concepto "fundamental". En este capítulo vamos a considerar cuatro conceptos primitivos que son: **Punto, Recta, Plano y Espacio.**

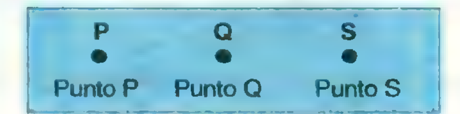
PUNTO:

La idea de un punto es fundamental y por eso no se define; en vez de definirla podemos poner ejemplos que nos dan idea de la existencia del punto, tales son:

- La marca dejada en el papel por la punta aguda de un lápiz.
- Un grano de arena. - La punta de un alfiler. - Un punto Ortográfico, etc.

Al punto como ente matemático lo consideramos carente de dimensiones.

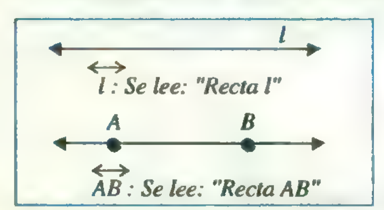
El punto se representa por una marquita redonda (.) o por un Aspa (x) y se nombra o designa por una letra mayúscula tal como:



RECTA:

Nos da la idea de recta el borde de la pizarra o de la mesa, un hilo tirante, etc. Una recta se nombra o designa generalmente con una letra minúscula tal como "l" o con dos letras mayúsculas que corresponden a dos de sus puntos tal como:

A y B y se denota por $\overleftrightarrow{AB}$ que se lee "recta AB"



Ejemplo:

Mencione tres nombres para la recta m.

m

A B C D E

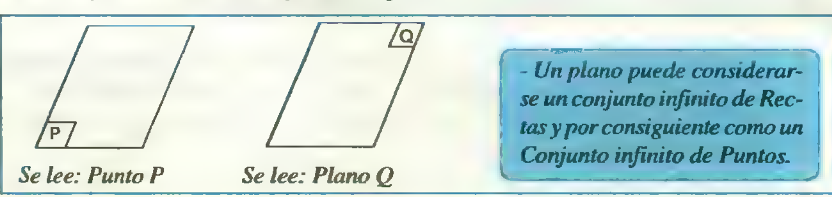
recta AB; recta AC; recta AD

- Una recta no tiene principio ni fin.
- La recta es ilimitada en sus dos sentidos.
- La recta es un conjunto infinito de puntos.

PLANO:

Nos da la idea de Plano la superficie de una mesa, las paredes del aula el piso, el techo, etc.

Los planos se representan por paralelogramos y se nombran o designan con letras mayúsculas. Así: Los planos P y Q.



Espacio

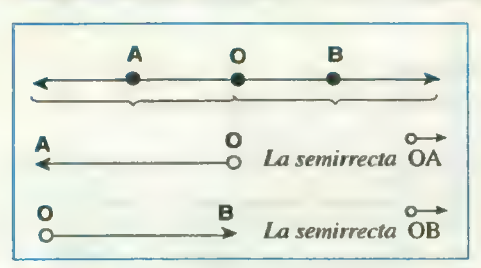
La idea de espacio es también primitiva no la vamos a definir. El espacio se extiende indefinidamente, cada lugar del espacio es un "punto". El conjunto de todos los puntos imaginables llena el espacio en su totalidad.

O sea: espacio = {puntos}

Por lo tanto todas las figuras de la Geometría están en el espacio.

Semirrecta

Sea una recta cualquiera $\overleftrightarrow{AB}$ y sobre ella tomamos un punto "O" entre A y B (Ver figura)



- Este Punto "O" divide a la recta en dos Subconjuntos de Puntos. Cada subconjunto es una semirrecta de origen "O".

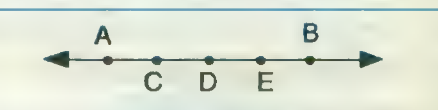
Una semirrecta no contiene el origen. La cabeza de flecha nos dice el sentido de cada semirrecta.

Rayo:

Llamaremos rayo a la figura formada por una semirrecta y su punto de origen.

Segmento de una Recta:

Dada una recta AB



Ahora obervemos que entre A y B hay un punto C. Entre C y B habrá otro punto D; entre D y B otro punto E y así sucesivamente. Por lo tanto entre A y B habrán muchísimos puntos que no podemos decir cuántos. Pero sí podemos afirmar que entre A y B hay un conjunto de puntos, a este conjunto de puntos que hay entre A y B le llamaremos **"segmento de recta"**.

Notación: *Se denota así: $\overline{AB}$; se lee: segmento de recta AB, donde los puntos A y B se llaman extremos del segmento.*

Segmentos Abiertos y Cerrados

a) Un segmento $\overset{\circ\!-\!\bullet}{AB}$ es abierto por la izquierda y cerrado por la derecha cuando no contiene al extremo A, pero sí contiene al extremo B.

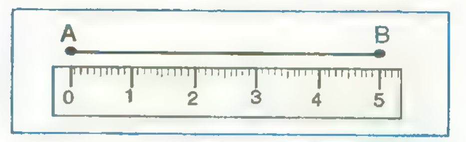
b) Un segmento $\overset{\bullet\!-\!\circ}{AB}$ es abierto por la derecha y cerrado por la izquierda cuando no contiene al extremo B, pero sí contiene al extremo A.

c) Un segmento $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$ es abierto por la izquierda y por la derecha, cuando no contiene a los extremos A y B.

d) Un segmento $\overset{\bullet\!-\!\bullet}{AB}$ es cerrado por la izquierda y por la derecha, cuando contiene a los extremos A y B.

Medida de un Segmento

Para medir un segmento se usa una regla graduada como se indica en la figura.



Para medir un segmento se procede como sigue:

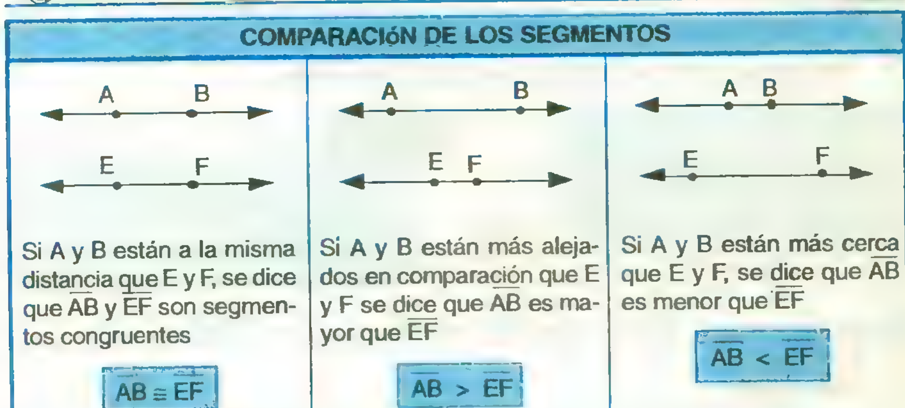
- Colocar la división cero (0) de la regla exactamente en el extremo A del segmento.
- Leer la longitud o medida del segmento, según el número de la regla que coincide con el extremo B.
- La medida de $\overline{AB}$ en la figura, es 5 cm. y se escribe: m ($\overline{AB}$) = 5 cm.
- Por facilidad escribiremos simplemente AB para indicar la longitud del segmento AB, esto es: AB = 5 cm.

Observación:

Tengamos en cuenta que el segmento es una figura geométrica o conjunto de puntos, en cambio la longitud o medida del segmento es la cantidad que indica la distancia entre los extremos de dicho segmento.

Al segmento de extremos A y B se les denota por $\overline{AB}$ y a su longitud por AB.

COMPARACIÓN DE LOS SEGMENTOS



Si A y B están a la misma distancia que E y F, se dice que $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son segmentos congruentes

$\overline{AB} \cong \overline{EF}$

Si A y B están más alejados en comparación que E y F se dice que AB es mayor que $\overline{EF}$

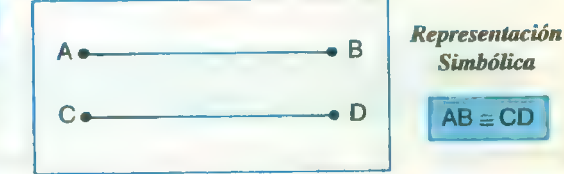
$\overline{AB} > \overline{EF}$

Si A y B están más cerca que E y F, se dice que AB es menor que $\overline{EF}$

$\overline{AB} < \overline{EF}$

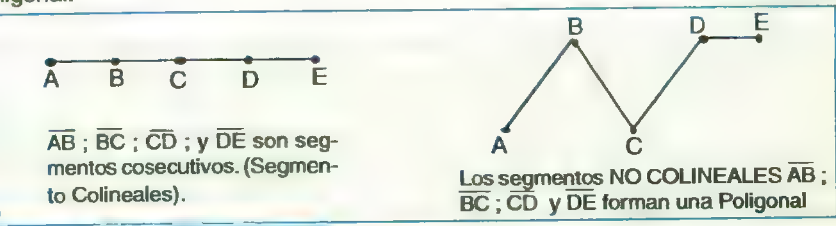
SEGMENTOS CONGRUENTES:

Dos segmentos son congruentes cuando tienen la misma longitud. AB es congruente con CD si: AB = CD



SEGMENTOS CONSECUTIVOS

Dos o más segmentos se llaman consecutivos, si cada uno tiene con el siguiente un extremo común. Si los segmentos consecutivos están contenidos en una misma recta, se llama segmentos colineales y si no están contenidos en una misma recta, se llaman poligonal.

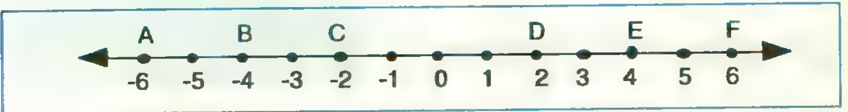


$\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; y $\overline{DE}$ son segmentos cosecutivos. (Segmento Colineales).

Los segmentos NO COLINEALES $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ forman una Poligonal

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:

Observamos la recta numérica de la figura mostrada:



En esta recta el número asignado a cada parte se llama coordenada.

Así tenemos que: A(-6); B(-4); C(-2); D(2); E(4) y F(6)

POSTULADO DE LA DISTANCIA:

A cada par de puntos diferentes de una recta le corresponde un número positivo único.

Recuerda

La distancia entre dos puntos de una recta es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de dichos puntos.

***Ejemplo 1*:** Halla la distancia que existe entre los puntos A y C de la figura anterior.

Resolución:

$AC = |(-2-(-6)| = |-2+6| = |4| = 4$ o también

$CA = |(-6)-(-2)| = |-6+2| = |-4| = 4$

Como se observará la distancia entre dos puntos de una recta no depende del sentido; por tal razón: AC = CA.

***Ejemplo 2*:** Halla la distancia que existe entre dos puntos B y E de la figura anterior.

Resolución:

$EB = |(-4)-(4)| = |-4-4) = |-8| = 8$ ó también

$BE = |4-(-4)| = |4+4| = |8| = 8$ $\therefore$ $BE = EB = 8$

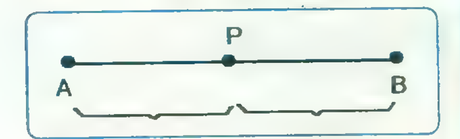
LONGITUD:

Consideremos la idea de longitud. Con frecuencia utilizamos otras plabras como altura, distancia, para describir esta idea. Por ejemplo, hablamos de la longitud de un pedazo de cordel, de la distancia entre dos ciudades *o* de la altura del mástil de la bandera; pero entre todas estas frases encontramos la misma idea. Damos ha entender que hemos elegido una unidad de medida y damos un número que aproximadamente indica cuántas de estas medidas de estas unidades están contenidas en la longitud, distancia o altura a que nos estamos refinendo.

La longitud de un segmento es un número que compara su tamaño con el tamaño de un segmento unidad.

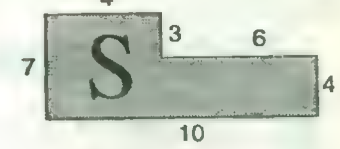
A la longitud le llamamos la Medida del Segmento (AB = 1)

Punto Medio de un Segmento: Sea el segmento AB y un punto $P \in \overline{AB}$; tal que A – P – B. (Se lee: "P está entre A y B)



Si: AP = PB, entonces P es el punto medio del segmento AB. El punto medio de un segmento lo biseca (lo divide en partes iguales).

Si la región S tiene un contorno que es una poligonal, el perímetro de S es la longitud de esta poligonal.



Perímetro de S = 7 + 4 + 3 + 6 + 4 + 10

∴ **Perímetro de S = 34**

TALLER DE PROBLEMAS Nº 14

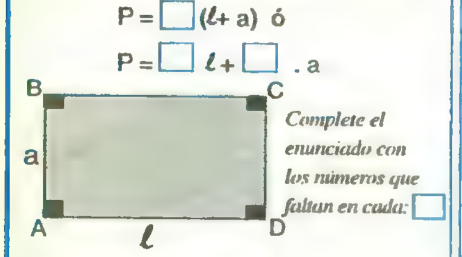
Ejercicio 1 : El perímetro de un triángulo está dado por la fórmula: $P = a + b + c$, donde: a; b y c son la longitudes de los lados del triángulo. Utilice esta fórmula para hallar las partes que faltan de cada fila de la tabla.

	a	b	c	P
1	25	18	12	
2	16	35		100
3	24		30	80
4		28	41	97

Ejercicio 2 : Una fórmula para el perímetro de la zona rectangular sería:

$P = \square\,(\ell + a)$ ó

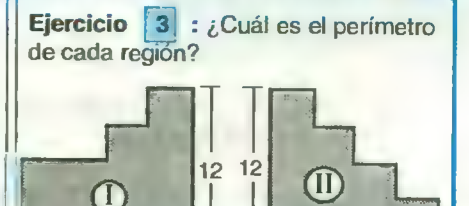
$P = \square\,\ell + \square\,.\,a$



Utilice la fórmula del perímetro del rectángulo para hallar los números que faltan en cada parte de la tabla.

	ℓ	a	P
1	26	12	
2	47	28	
3		35	186
4	52		160

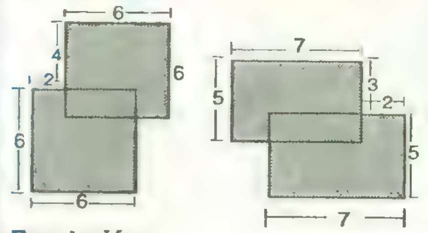
Ejercicio 3 : ¿Cuál es el perímetro de cada región?



Resolución:

Rpta. Perimetro = 64u c/u

Ejercicio 4 : ¿Cuál es el perímetro de cada región?



Resolución:

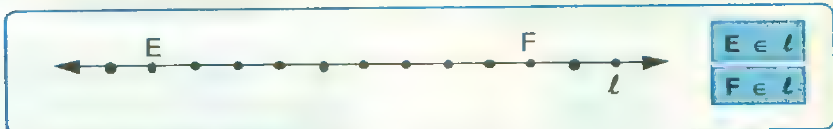
Rpta. ***36u y 34u***

Postulados y Axiomas

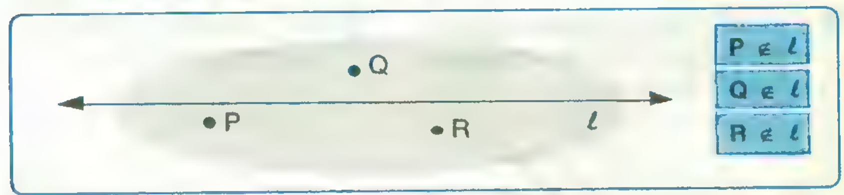
La geometría se construye partiendo de ciertas proposiciones, cuya verdad se acepta sin demostración a dichas proposiciones se les denomina axiomas o postulados.

POSTULADOS REFERENTES A PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

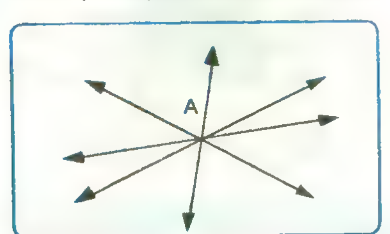
1. En una recta hay infinitos puntos.



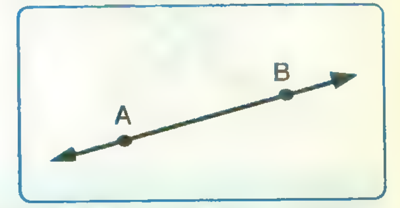
2. Fuera de una recta hay infinitos puntos.



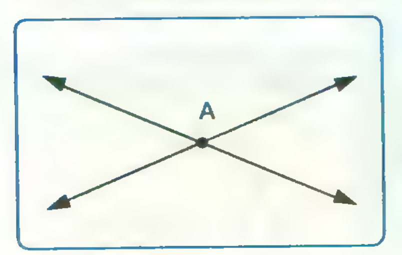
3. Por un punto pasan infinitas rectas.



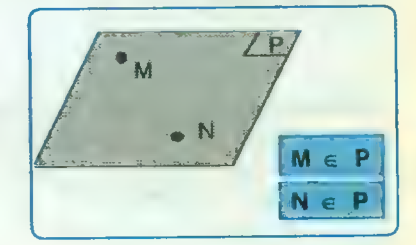
4. Por dos puntos diferentes pasa una y sólo una recta.



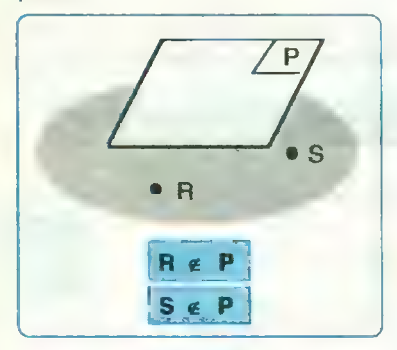
5. Dos rectas diferentes si se cortan, se cortan en un solo punto.



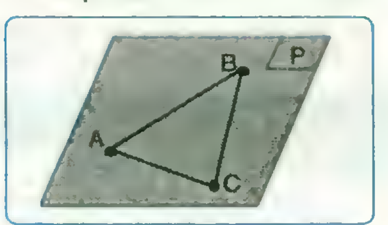
6. En un plano hay infinitos puntos.



7 Fuera de un plano hay infinitos puntos.

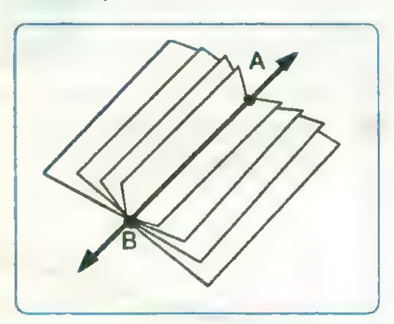


8 Por tres puntos no colineales pasa un solo plano.

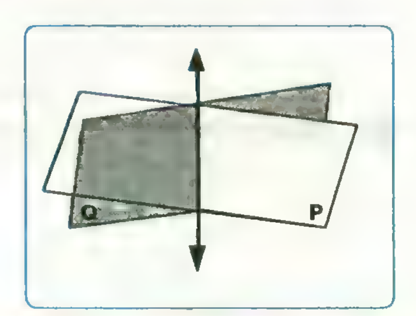


Nota: Puntos no colineales significa que no están en una misma recta.

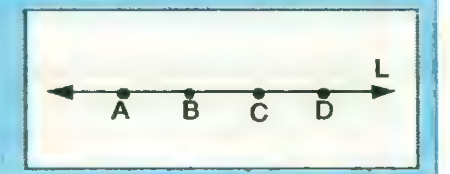
9 Por dos puntos diferentes pasan infinitos planos. Por una recta pasan infinitos planos.



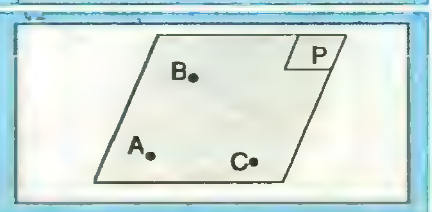
10 La intersección de dos planos no paralelos, es una recta.



Puntos Colineales. Llamamos así a todos los puntos que pertenecen a una misma recta. Así en la figura: A, B, C y D son puntos colineales.



Puntos Coplanares. Llamamos así a todos los puntos que pertenecen a un mismo plano. Así en la figura A, B y C pertenecen a un mismo plano "P".



TALLER DE PROBLEMAS Nº 15

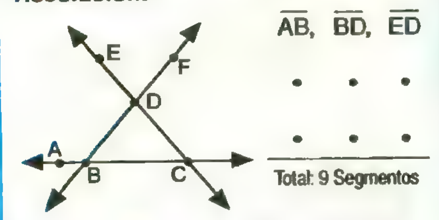
Ejercicio 1 : Dar 5 ejemplos que den la idea de punto.

Resolución.

1. ______________________
2. ______________________
3. ______________________
4. ______________________
5. ______________________

Ejercicio 2: Observa la figura, nombre e indique el total de segmentos:

Resolución:



$\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{ED}$

• • •

• • •

Total: 9 Segmentos

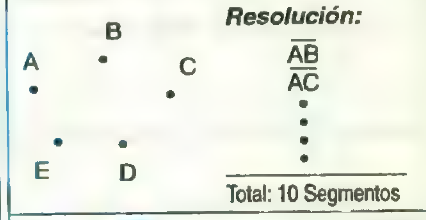
Ejercicio 3: Indique simbólicamente

- Recta AB: : $\overleftrightarrow{AB}$
- Rayo PQ: : ....
- Semirrecta MN: : $\overset{\circ\!\rightarrow}{MN}$
- Longitud de segmento AB : ....
- Recta m: : ....
- Rayo QP: : ....

Ejercicio 4: Dado los putos P, Q, R, T, de la recta **m**, diga si es verdadera **(V)** o falso **(F)**

- $\overline{PQ} \cup \overline{PR} = \overline{PR}$ ( )
- $\overline{PR} \cap \overline{QT} = \overline{QR}$ ( )
- $\overline{PQ} \cup \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ ( )
- $\overline{PT} \cap \overline{PR} = \overset{\circ\!\rightarrow}{PQ}$ ( )

Ejercicio 5: Dado los puntos A, B, C, D y E, trazar todos los segmentos posibles, nombrarlos e indicar el total de segmentos.



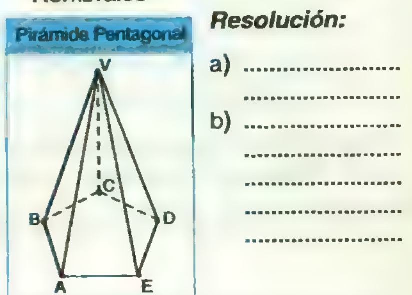
Resolución:

$\overline{AB}$
$\overline{AC}$
•
•
•
•

Total: 10 Segmentos

Ejercicio 6: Con respecto a la figura:

a) ¿Cuántos puntos están indicados?
b) ¿Cuántos planos están sugeridos? Nómbralos

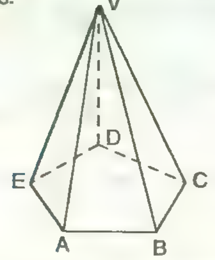


Resolución:

a) ....
....

b) ....
....
....
....
....

Ejercicio 7 : Con el siguiente cuerpo geométrico completar los siguientes enunciados:



a) Por "V" pasan los planos: ....

....

b) En "E" se intersectan las rectas: ..

....

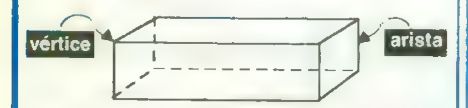
c) El punto "C" pertenece a los planos:

....

d) ¿Cuántos planos están sugeridos?

....

Ejercicio 8 : En una caja de fósforos:



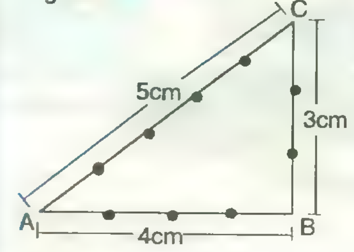
a) ¿Cuántos planos se forman? ....

....

b) ¿Cuántas aristas (intersección de dos planos) se forman? ....

c) ¿Cuántos vértices (intersección de tres planos) se forman? ....

Ejercicio 9 : Considerando la siguiente figura:



a) AB = ______

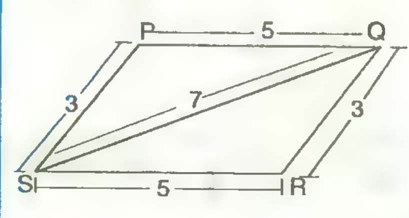
b) BC = ______

c) AC = ______

d) AB + BC − AC =

e) $\sqrt{AB^2 + BC^2}$ = __________

Ejercicio 10 : Según la figura, escribir verdadero **(V)** o falso **(F)**:



a) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ ( )

b) $\overline{PQ} \cong \overline{SQ}$ (F)

c) QR = RQ ( )

d) QS = PQ ( )

e) PS = SR - 1 ( )

f) $SQ^2 = SP^2 + SR^2 - SP \cdot SR$ ( )

4.3 POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

4.3.1 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS DE UN PLANO

Dos rectas sobre un plano pueden ocupar las siguientes posiciones:

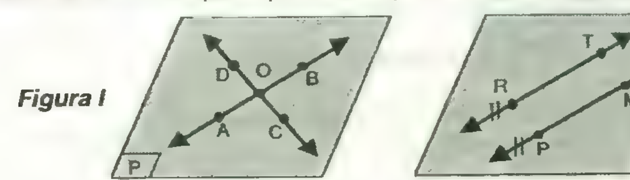


Figura I *Figura II*

a) **Rectas Secantes:** Dos rectas son secantes si tienen un sólo punto en común. (Ver figura I).

En dicha figura, observamos que: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, tienen un solo punto común "O".

De donde: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ = Punto O = {0}

b) **Rectas Paralelas:** Son aquellas que no tienen ningún punto en común. También se les define como aquellas que situadas en un mismo plano conservan la misma distancia.

En la figura II, observamos que las rectas $\overleftrightarrow{RT}$ y $\overleftrightarrow{PM}$ no tienen ningún punto común.

De donde: $\overleftrightarrow{RT} \cap \overleftrightarrow{PM} = \Phi$

Las rectas paralelas se denotan de la sigueinte manera:

$\overleftrightarrow{RT} \,//\, \overleftrightarrow{PM}$ (se lee: recta RT paralela a la recta PM)

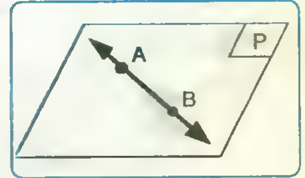
Nota: ***Rectas Alabeadas:*** *Dos rectas son alabeadas o cruzadas; si su intersección es el vacío y si pertenecen a planos diferentes.*

$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \Phi$

4.3.2 Posiciones Relativas de una Recta y un Plano:

Una recta y un plano pueden ser:

a) **Recta Contenida en el Plano,** si dos puntos cualquiera de la recta son puntos del plano.



Es decir:

Si: $\overleftrightarrow{AB} \cap$ Plano P = $\overleftrightarrow{AB}$

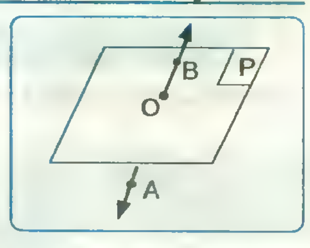
Entonces: $\overleftrightarrow{AB} \subset$ Plano P

b) **Recta Secante al Plano.** Si la recta y el plano tienen un solo punto en común.

Así en la figura la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el plano P tienen un punto común.

Es decir: Si $\overleftrightarrow{AB} \cap$ Plano P = Punto = {0}

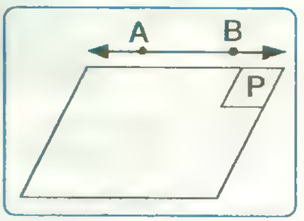
Entonces: $\overleftrightarrow{AB}$ es la recta secante al plano P.



c) **Recta Paralela al Plano.** Si la recta y el plano no tienen ningún punto común.

Así en la figura la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el plano P no tienen punto común.

Es decir: Si $\overleftrightarrow{AB} \cap$ plano P = Φ Entonces: la recta AB es paralela al plano P.



4.3.3 Posiciones Relativas de Dos Planos

Dos planos diferentes en el espacio son secantes o son paralelos.

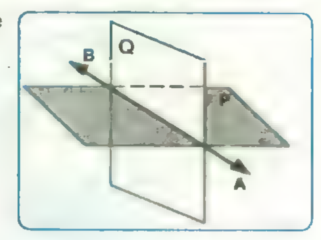
a) Si la intersección es una recta, los planos se llaman secantes.

Así:

Si plano P $\cap$ plano Q = $\overleftrightarrow{AB}$

Entonces:

P y Q **son planos secantes.**



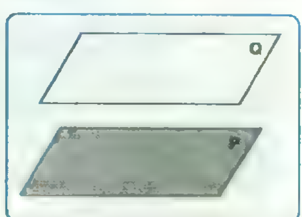
b) Si no hay intersección entre los planos, los planos son paralelos.

Así:

Si plano P $\cap$ plano Q = ∅

Entonces:

P y Q **son planos paralelos.**



4.3.4 Posiciones Relativas de Dos Rectas en el Espacio.

Pueden ser: Secantes o Alabeadas.

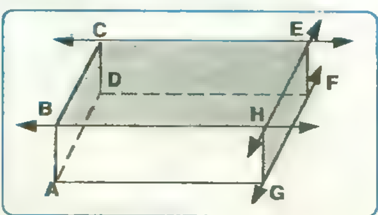
En la figura:

i) $\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{BH}$

ii) $\overleftrightarrow{HE} // \overleftrightarrow{GF}$, entonces:

$\overleftrightarrow{BH}$ y $\overleftrightarrow{HE}$ son secantes y

$\overleftrightarrow{CE}$ y $\overleftrightarrow{GF}$ son rectas que se cruzan o **rectas alabeadas.**



PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Ejercicio 1: Señalar con **(V)** lo verdadero y con **(F)** lo falso.

* Rectas alabeadas son aquellas que no se intersecan y no son paralelas.

** La línea de máxima pendiente de un plano "P" respecto a un plano secante "S" es aquella perpendicular trazada desde un punto del plano "P" a la intersección de ambos planos.

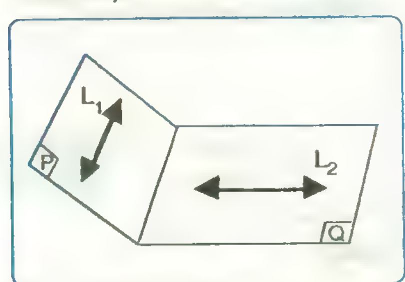
*** La máxima distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio es la longitud del segmento perpendicular a ambas.

A) VVV B) VFF C) VFV D) FFV E) VVF

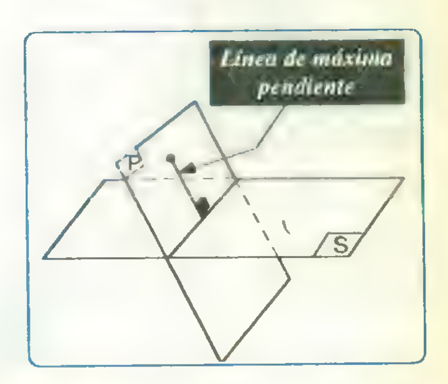
Resolución

* **Es verdadera:**

Ejemplo L_1 y L_2 son dos rectas **ALABEADAS** (pertenecen a planos diferentes)



** **Es verdadera,** Ejemplo:



*** **Es falsa** porque la longitud del segmento perpendicular a ambas rectas es la MÍNIMA distancia y no la máxima.

∴ VVF **Rpta E**

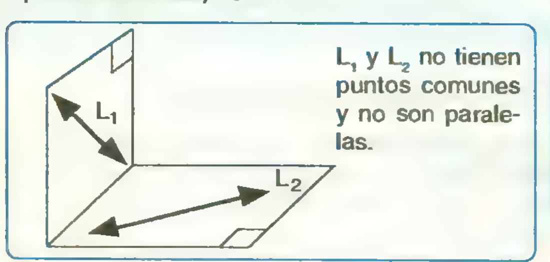
Ejercicio **:** Responder si las proposiciones siguientes son verdaderas **(V)** o falsas **(F)**.

I. Dos rectas paralelas son aquellas que no tienen puntos comunes.
II. Por una recta pasan infinitos planos
III. Dos rectas perpendiculares a un mismo plano, son paralelas entre si.

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E)FFF

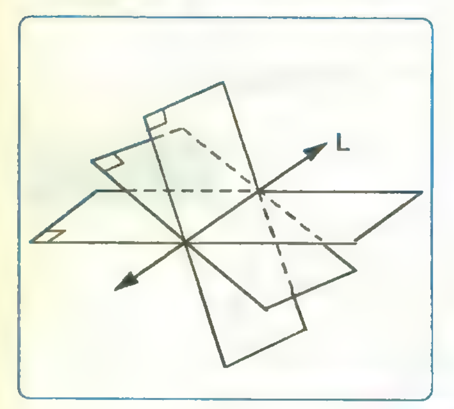
Resolución:

I. Esta proposición es **Falsa,** porque existen rectas que no tienen puntos comunes y no son paralelas, ellas son las rectas **alabeadas o cruzadas** (que pertenecen a planos diferentes):

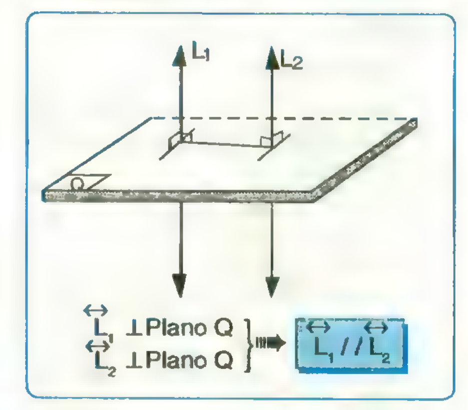


Nota: *Las rectas paralelas son aquellas que no tienen puntos comunes pero que pertenecen a un mismo plano.*

II. Esta proposición es **Verdadera.**
Ejemplo:



III. Esta proposición también es **Verdadera.**
Ejemplo:



∴

Rpta D

Ejercicio 3 : Cuando dos planos son perpendiculares:

A) Todo plano perpendicular a uno de ellos es también perpendicular al otro.

B) Toda recta perpendicular a la intersección de ambas debe estar contenida en uno de ellos.

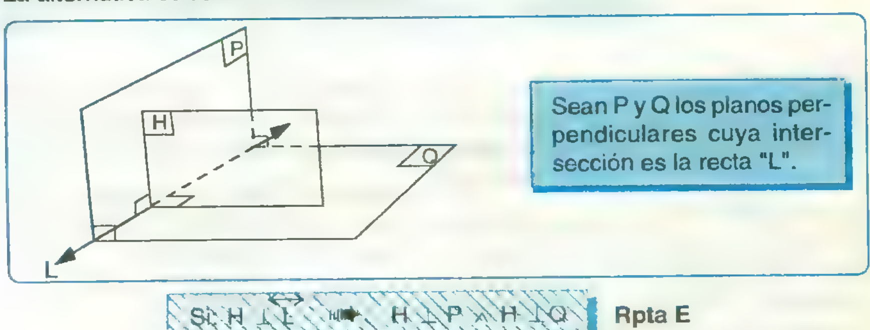
C) Todas las rectas de uno de ellos son perpendiculares a las rectas del otro.

D) No siempre se cortan

E) Todo plano perpendicular a su intersección es perpendicular a ambos.

Resolución:

- La alternativa correcta es la **E**. Veamos



Si: $H \perp \overleftrightarrow{L} \Rightarrow H \perp P \wedge H \perp Q$ **Rpta E**

Ejercicio 4 : De las siguientes afirmaciones cuántas son incorrectas?

I. Dos planos al intersectarse pueden hacerlo en un sólo punto.
II. Las rectas alabeadas pertenecen a un solo plano.
III. La proyección ortogonal de un triángulo sobre un plano es siempre un triángulo

A) I **B)** II **C)** I,II **D)** I, II, III **E)** II, III

Resolución:

- Analizamos cada afirmación

I.- **Es Incorrecta,** porque dos planos al intersectarse siempre lo hacen en una Recta.
II.- **Es incorrecta,** pues las rectas alabeadas o cruzadas, pertenecen a planos diferentes.
III.- **Es incorrecta,** porque la proyección ortogonal de un triánguo sobre un plano en algunos casos puede ser un segmento.

∴ **Rpta D**

Ejercicio 5 : Señale verdadero o falso:

( ) Un plano tiene un número finito de puntos
( ) Para determinar una recta se necesita como mínimo tres puntos.
( ) Por un punto pasan infinitas rectas

A) VFF **B)** FFV **C)** FVV **D)** VVV **E)** VFV

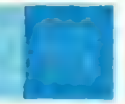
Resolución:

- La primera proposición es **FALSA** porque un plano tiene un número infinito de puntos.
- La segunda proposición es **FALSA** porque para determinar una recta se necesitan como mínimo DOS PUNTOS.
- La tercera proposición es **VERDADERA.**

∴

Rpta B

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO



Ejercicio 1: Si una recta AB es paralela a un plano P, ¿Se puede afirmar que un plano R que pasa por la recta AB es paralelo al plano P. ¿Por qué? Haga un dibujo.

Ejercicio 2: Si dos planos P y Q son paralelos. Un plano S secante a los planos P y Q determina intersecciones en cada plano. ¿Pueden ser paralelos estas intersecciones? Haga un dibujo.

Ejercicio 3: Contestar:

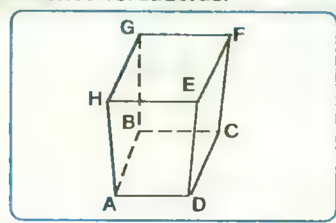
a) ¿Cuántos planos son necesarios para determinar un punto?

b) ¿En cuántos planos puede estar un punto dado?

c) ¿Un punto puede estar en tres planos a la vez?

d) ¿Una recta puede estar en tres planos a la vez?

Ejercicio 4: Con los puntos, rectas y planos sugeridos por la figura, completar los siguientes enunciados para que sean proposiciones verdaderas.



a) Plano EFG $\cap$ plano... = $\overleftrightarrow{HG}$

b) $\overleftrightarrow{HA}$ y $\overleftrightarrow{ED}$ son rectas.......

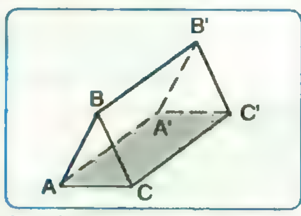
c) Si $\overleftrightarrow{HE}$ .... $\overleftrightarrow{AD} = \varnothing$, Entonces: $\overleftrightarrow{HE}$ ..... $\overleftrightarrow{AD}$

d) $\overleftrightarrow{GF}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son rectas ....

e) Plano EFC y plano HGB son .....

Ejercicio 5: Tres planos ¿Pueden cortarse en una recta? ¿En dos rectas? ¿En tres rectas? Haga un dibujo para cada caso.

Ejercicio 6: En la siguiente figura; diga si es falsa o verdadera cada una de las siguientes proposiciones:



a) $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \varnothing$

b) $\overleftrightarrow{CB} \cap \overleftrightarrow{BB'} = B$

c) Plano ABC $\cap$ Plano BB'C' = $\overleftrightarrow{CC'}$

d) Plano AA'C' $\cap$ $\overleftrightarrow{BC}$ = B

e) Plano A'C'B' $\cap$ Plano ACC' = $\overleftrightarrow{AA'}$

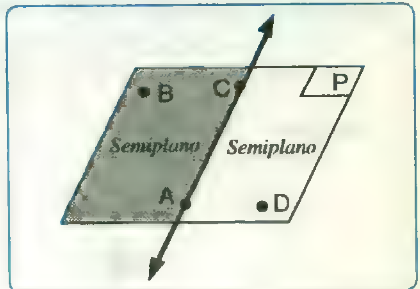
Ejercicio 7: Dada dos rectas contenidas cada una en planos paralelos. ¿Las rectas serán paralelas o alabeadas? Haga un dibujo.

Clave de Respuestas

1. No se puede afirmar que el plano R es paralelo al plano P. Porque puede ser también secante
2. Son paralelas
3. a) 3 b) En infinitos planos. c) Si d) Si.
4. a) HGB b) Secantes c) $\cap$; // d) Que se cruzan. e) Secantes.
5. Si, Si Si
6. a) V b) V c) F d) F e) F
7. En un caso puede ser paralelas y en los demás casos alabeadas.

4.4 ÁNGULOS EN EL PLANO

4.4.1 CONCEPTO DE SEMIPLANO.- Si sobre un plano P tomamos varios puntos no colineales tales como A, B, C y D y si por dos de ellos trazamos una recta $\overleftrightarrow{AC}$ ésta separa al conjunto plano en tres subconjuntos, un subconjunto es la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y los otros dos subconjuntos son las otras partes o regiones de infinitos puntos que llamaremos semiplanos.



Al subconjunto recta $\overleftrightarrow{AC}$ se le llama frontera de cada semiplano y no pertenece a ninguno de ellos.

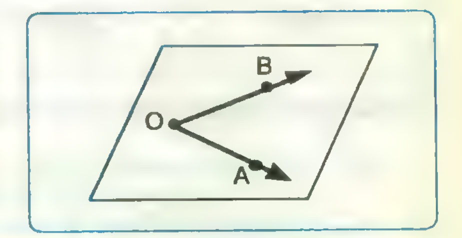
En la figura el punto B está en un lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y el punto D está en el otro lado. Por eso se puede decir semiplano del lado B de $\overleftrightarrow{AC}$ y semiplano del lado D de $\overleftrightarrow{AC}$.

4.4.2. ANGULO:

Si en un plano tomamos dos rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de origen común O, el conjunto $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ se llama ángulo.

Así en la figura:

$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los lados del ángulo y el punto O es el vértice del ángulo.

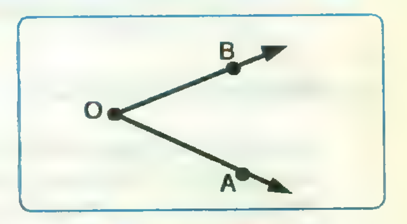


Definición

Se llama ángulo a la reunión de dos rayos que tienen el mismo origen.

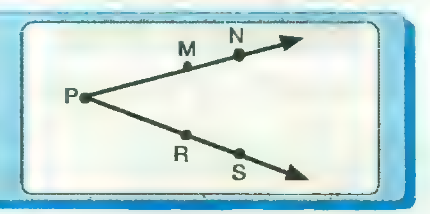
- Para nombrar un ángulo se acostumbra utilizar tres letras donde la letra del vértice siempre va entre las otras dos.
- Algunas veces se usa únicamente la letra del vértice para mencionar un ángulo.

El símbolo $\angle$: Se lee ángulo



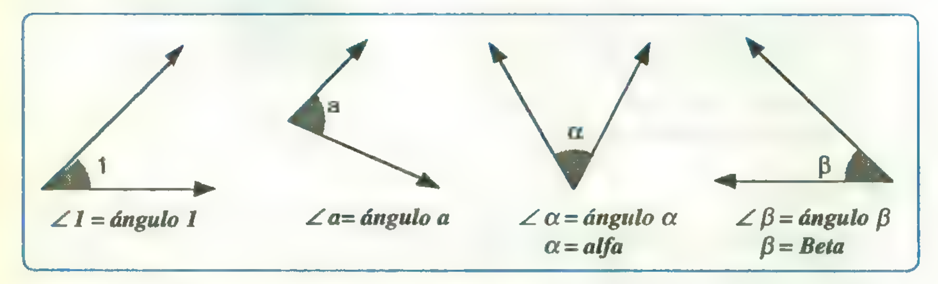
$\angle$ AOB ; $A\hat{O}B$
$\angle$ BOA ; $\angle$O

Observación: *De la figura mostrada, podemos afirmar que:*
$\angle RPM = \angle SPM = \angle NPR = \angle NPS$
como se observará los cuatro ángulos son de igual magnitud.



- También se acostumbra a indicar los ángulos por números o letras minúsculas tanto del alfabeto castellano o letras del alfabeto griego.

Así tenemos:

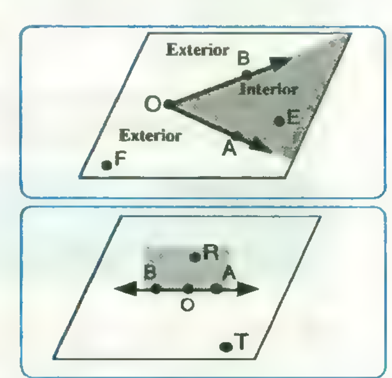


$\angle 1$ = ***ángulo 1*** $\angle a$ = ***ángulo a*** $\angle \alpha$ = ***ángulo*** α ; α = ***alfa*** $\angle \beta$ = ***ángulo*** β ; β = ***Beta***

4.4.3 INTERIOR Y EXTERIOR DE UN ÁNGULO:

- Todo ángulo divide al plano en dos regiones llamada: interior y exterior. En la figura "E" es un punto interior y "F" un punto exterior del ángulo AOB.

- En la siguiente figura si "R" pertenece al interior del ángulo AOB y "T" pertenece al exterior del ángulo AOB.

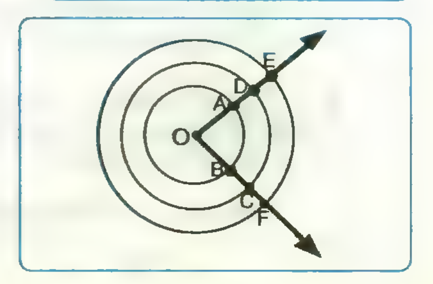


4.4.4 MEDIDA DE UN ÁNGULO:

En la figura mostrada observamos que el vértice "O" (Centro de la circunferencia) puede ser el centro de infinidad de circunferencias.

Ángulo central:

$\angle$ AOB = COD = $\angle$ EOF =, etc

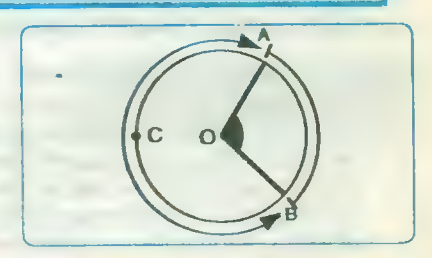


Definición Se llama ángulo central en una circunferencia al ángulo cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia.

- Un ángulo central divide a la circunferencia en dos subconjuntos de puntos, uno llamado Arco menor y el otro llamado Arco mayor. *(Ver figura)*

$\overset{\frown}{AB}$ = arco menor

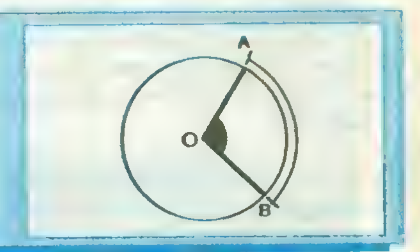
$\overset{\frown}{ACB}$ = arco mayor



- La medida de un ángulo central es igual a la medida de su correspondiente arco en la circunferencia.

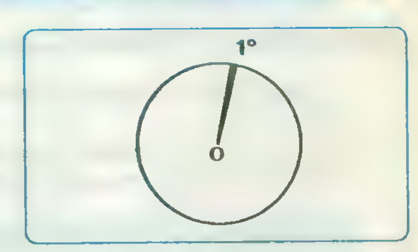
De la figura:

$m\angle AOB = m\overset{\frown}{AB}$

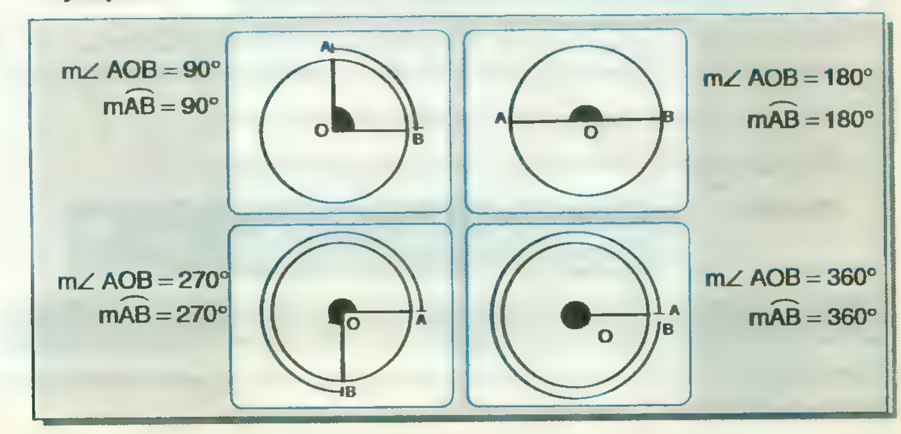


- La circunferencia se ha dividido en 360 partes iguales, para así facilitar la medición de arcos. Cada una de estas partes es un grado sexagesimal (1°)

Es por eso que decimos que la circunferencia mide 360°.

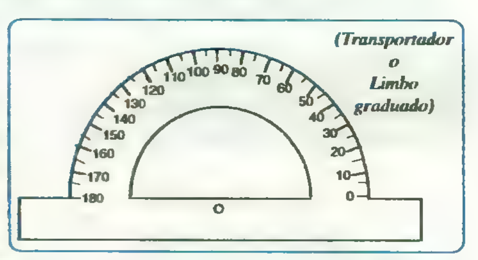


Ejemplos:

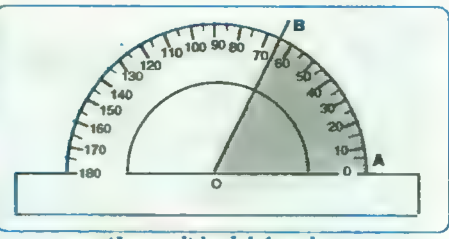


- En el comercio se venden semicircunferencias de plásticos y otro material divididos en 180 grados (180°). Este instrumento se llama **transportador.**

4.4.5 EMPLEO DEL TRANSPORTADOR.



Para medir un ángulo usando el transportador; conviene trazar desde el centro O de éste los lados que van a A y a B. Luego de sitúa el transportador con su centro (que ya viene marcado en el instrumento) coincidiendo con el de la circunferencia y el número "O" con uno de los lados del ángulo en este caso el lado OA. La medida del ángulo está dada por el número que coincide con el otro lado (OB).



(La medida del ángulo AOB=65° ó m ∠AOB=65°)

> ***Nota:*** *Esta explicación no tiene ningún valor si no practicas con el transportador.*

4.4.6 SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES.

La medida de un ángulo, en grados (o en radianes) se llama también magnitud del ángulo.
Para la medición de ángulos se pueden utilizar los sistemas sexagesimal o radial, según se empleen los grados o los radianes respectivamente.

1. **MEDICIÓN DE LOS ÁNGULOS EN GRADOS SEXAGESIMALES.**

Se toma como unidad principal el ángulo de UN GRADO (1°) sexagesimal. El ángulo de 1° es el que es igual a 1/360 parte de la medida de la circunferencia.

El ángulo igual a 1/60 parte de 1° es el ángulo de un minuto (1').

El ángulo igual a 1/60 parte de 1' es el ángulo de un segundo (1").

Es decir:

1° < > 60' (Se lee: un grado equivale a 60 minutos)
1' < > 60" (Se lee: un minuto equivale a 60 segundos)

FORMAS DE ESCRIBIR UN ÁNGULO EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS.

Ejemplo **1** Un ángulo mide 80°. Deseamos expresar dicha medida en grados, minutos y segundos.

Resolución:

$$80° = 79° + 1° = 79° + 60'$$

$$80° = 79° + 60' = 79° + (59' + 1') = 79° + (59' + 60")$$

$$80° = 79° + 59' + 60" = 79°59'60"$$ **Rpta**

Ejemplo 2: Un ángulo mide 36, 15°. Deseamos expresar dicha medida en grados, minutos y segundos.

Resolución:

$$36{,}15° = 36° + (0{,}15)°$$

$$36{,}15° = 36° + (0{,}15)°.1$$

$$36{,}15° = 36° + (0{,}15°)\frac{60'}{1°}$$

$$36{,}15° = 36° + 9' \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

Sabemos que:

1° <> 60'

Donde:

1°.1 <> 60' ⇒ $1 = \frac{60'}{1°}$

Los 9' se puede escribir como:

$$9' = 8' + 1' = 8' + 60"$$

$$9' = 8' + 60" \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

Reemplazamos **(II)** en **(I)**: 36,15° = 36° + 8' + 60" = 36°8'60"

$\therefore$ 36,15 = 36°8'60" **Rpta**

Ejemplo 3: Expresar: 5846" en grados, minutos y segundos.

Resolución:

Sabemos que:

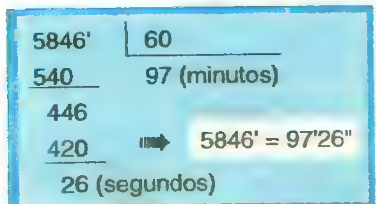
1' = 60"

Donde: 1' = 60".1

$\frac{1'}{60"} = 1$

$$5846" = 5846".1$$

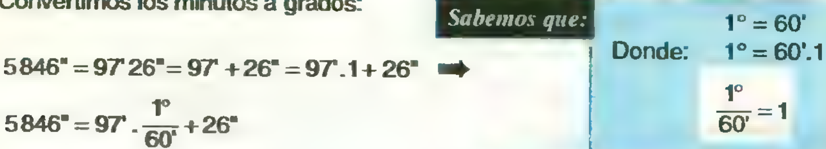
$$5846" = 5846"\frac{1'}{60"} = \frac{5846'}{60}$$



5846'	60
540	97 (minutos)
446	
420	⇒ 5846' = 97'26"
26 (segundos)	

⇒ $5846" = \frac{5846'}{60} = 97'26"$ .... (1)

- Convertimos los minutos a grados:



$$5846'' = 97'26'' = 97' + 26'' = 97'.1 + 26'' \Rightarrow$$

$$5846'' = 97' \cdot \frac{1^\circ}{60'} + 26''$$

$$5846'' = \frac{97^\circ}{60''} + 26''$$

$$5846'' = (1^\circ 37') + 26''$$

Rpta $5846'' = 1^\circ 37' 26''$

Sabemos que:

Donde: $1^\circ = 60'$

$1^\circ = 60'.1$

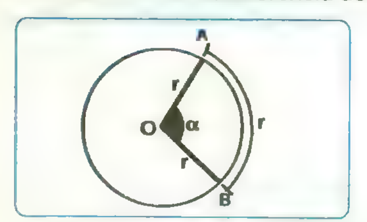
$$\frac{1^\circ}{60'} = 1$$

97°	60
60	1 (Grado)
37(Minuto)	

$$\Rightarrow \frac{97^\circ}{60} = 1^\circ 37'$$

2. Medición de los Ángulos en Radianes.

Se toma como unidad principal el ángulo de un radián (1 rad.) Un ángulo central mide1 radián cuando la longitud del arco subtendido arc AB es igual a la longitud del radio r de la circunferencia de centro O.



$\Rightarrow$ Si arc $\overset{\frown}{AB} = r$

Entonces: $m\angle A\hat{O}B = 1$ radián

De la figura:

Longitud de la ⊙ $\Rightarrow$ grados

$2\pi r \Rightarrow 360^\circ$

$r \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{360^\circ r}{2\pi r} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi}$$

En consecuencia:

$$1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{\pi}$$; pero: π 3,1416

Luego:

$$1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{3{,}1416} = 57^\circ 17' \text{ (aprox.)}$$

$$\therefore \quad 1 \text{ radián} = 57^\circ 17'$$

EQUIVALENCIAS ENTRE RADIANTES Y GRADOS SEXAGESIMALES

2π radianes = 360°	;	$\frac{\pi}{3}$ radianes = 60°
π radianes = 180°	;	$\frac{\pi}{4}$ radianes = 45°
$\frac{\pi}{2}$ radianes = 90°	;	$\frac{\pi}{6}$ radianes = 30°

***Ejemplo* 1**: Expresar: 105° a radianes.

Resolución:

Sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} 180° &\longrightarrow \pi \text{ radianes} \\ 105° &\longrightarrow x \text{ radianes} \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \boxed{x = 1{,}83}$$

Por regla de tres:

$$x = \frac{105° \cdot \pi}{180°} = \frac{105°(3{,}1416)}{180°}$$

Otra forma:

$$105° = 105° \cdot 1$$

$$105° = 105° \boxed{\frac{\pi \text{ rad}}{180°}}$$

$$105° = \frac{105 \quad \pi \cdot \text{rad}}{180} = 1{,}83 \text{ rad.}$$

$$\therefore \boxed{105° = 1{,}83 \text{ rad.}}$$ **Rpta.**

Recuerda que:

180° = π rad.

Donde:

180° .1 = π rad.

$$1 = \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$

***Ejemplo* 2**: Expresa: 30° 36' en radianes.

Resolución:

- En primer lugar, convertimos los 36´ grados.

$$36' = 36'.1$$

$$36' = 36' \boxed{\frac{1°}{60'}}$$

$$36' = \frac{36°}{60} = 0{,}6°$$

$$\therefore \boxed{36' = 0{,}6°}$$

Pero: 1° = 60'
1° = 60' . 1

Donde: $\frac{1°}{60'} = 1$

Luego: $30°36' = 30° + 0,6° = 30,6°$

- En segundo lugar convertimos los 30,6° a radianes:

$$30,6° = 30,6° \cdot 1 = 30,6° \cdot \frac{\pi\,\text{rad}}{180°} = \frac{30,6 \cdot (3,1416)\text{rad}}{180} = 0,534\;072\text{rad}$$

$\therefore$ $30°36' = 30,6° = 0,534\;072$ rad. **Rpta.**

Ejemplo 3: Expresa $\frac{3\pi}{5}$ radianes en grados sexagesimales.

Resolución:

$$\frac{3}{5}\pi\,\text{rad} = \frac{3}{5}(\pi\,\text{rad})$$ **pero:** $\pi\,\text{rad} = 180°$

$$\frac{3}{5}\pi\,\text{rad} = \frac{3(180°)}{5} = 3(36°) = 108°$$

$\therefore$ $\frac{3}{5}\pi\,\text{rad} = 108°$ **Rpta**

Ejemplo 4: Expresa: $\frac{5\pi}{8}$ radianes en grados sexagesimales.

Resolución:

$$\frac{5}{8}\pi\,\text{radianes} = \frac{5}{8}(\pi\,\text{radianes})$$ **pero:** $\pi\,\text{rad.} = 180°$

$$= \frac{5}{8}(180°) = \frac{900°}{8} = \frac{225°}{2} = 112,5°$$

225°	2
2	112,5
-2	
2	
-5	
4	
10	

$\therefore$ $\frac{5}{8}\pi\,\text{radianes} = 112,5°$ **Rpta.**

Nota: *Cuando la medida de un ángulo está expresada en radianes se obvia dicha palabra y solo se escriben los números.*

O sea: $\frac{3}{4}\pi\,\text{radianes} = \frac{3}{4}\pi$

TALLER DE PROBLEMAS Nº 16

Ejercicio 1: Expresa la medida de cada ángulo en grados minutos y segundos.

a) 37°

Resolución

....

....

....

Rpta: 36°59'60"

b) 15,45°

Resolución

....

....

....

Rpta: 15°26'60"

c) 60,125°

Resolución

....

....

....

Rpta: 60°7'30"

d) 105,46°

Resolución

....

....

....

Rpta: 105°27'36"

e) 7830"

Resolución

....

....

....

Rpta: 2°10'30"

f) 225'

Resolución

....

....

....

Rpta: 3°44'60"

Ejercicio 2: Expresa la medida de cada ángulo en radianes

a) 10°

Resolución

....

....

....

Rpta $\frac{\pi}{18}$ ó 0,1745 rad

b) 9°

Resolución

....

....

....

Rpta $\frac{\pi}{20}$ ó 0,1571 rad

c) 36°

Resolución

....
....
....

Rpta: $\frac{\pi}{5}$ ó 0,6283 rad

d) 22°30'

Resolución

....
....
....

Rpta $\frac{\pi}{8}$ ó 0,3927 rad

f) 0°21'36"

Resolución

....
....
....

Rpta $\frac{\pi}{500}$ ó $6,2832 \times 10^{-3}$ rad

Ejercicio 3: Exprese la medida de cada ángulo en grados sexagesimales.

a) $\frac{3\pi}{4}$

Rpta. 135°

b) $\frac{7\pi}{20}$

Rpta. 63°

c) $\frac{5\pi}{8}$

Rpta. 112,5°

d) $\frac{2\pi}{5}$

Rpta. 72°

e) $\frac{9\pi}{4}$

Rpta. 405°

f) $\frac{\pi}{9}$

Rpta. 20°

4.4.7 Clasificación de los ángulos por su medida

Los ángulos según su medida se clasifican en:

a) ángulos rectos b) ángulos agudos c) ángulos obtusos
d) ángulos nulos e) ángulos llanos

a) **Ángulo Recto:** Un ángulo es recto si su medida es 90°

Ejm:

90°

b) **Ángulo Agudo:** Un ángulo es agudo si su medida es menor que 90° pero mayor que 0°

Ejm:

40°

c) **Ánguo Obtuso:** Un ángulo es obtuso si su medida es mayor que 90° pero menor que 180°

Ejm:

120°

d) **Ángulo Nulo:** Un ángulo es nulo si su medida es 0°

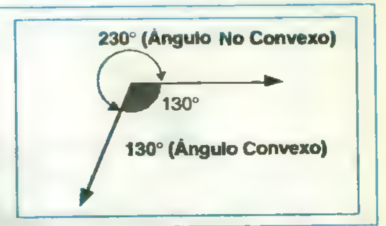
0

e) **Ángulo Llano:** Un ángulo es llano si su medida es 180°

180°

- ***Ángulo No Convexo:*** *Un ángulo es cóncavo si su medida es mayor que 180° pero menor que 360°.*

- ***Ángulo Convexo:*** *Un ángulo es convexo si su medida es mayor que 0° pero menor que 180°.*



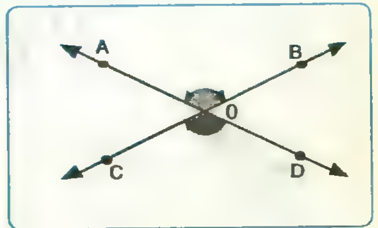
- **Congruencia de Ángulos:**

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

En la figura:

$\angle$ AOB es congruente con $\angle$ COD

que se denota: $\angle AOB \cong \angle COD$



- **Bisectriz de un Ángulo:**

Se denomina bisectriz de un ángulo al rayo cuyo origen es el vértice del ángulo y divide a dicho ángulo en dos ángulos congruentes.

De la figura:

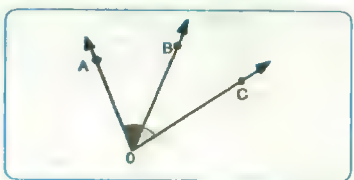
Medida ∠AOC = medida ∠ COB

$$m \angle AOC = m \angle COB$$

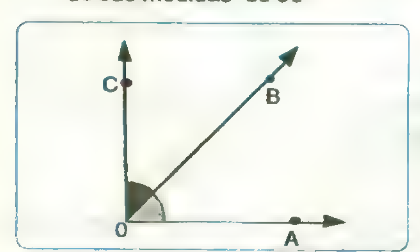
- **Pares de Ángulos:** Dos ángulos pueden ser:

a) Ángulos Consecutivos: Dos ángulos consecutivos son los que tienen en común el vértice y un lado se encuentra acada lado del lado común.

Los ángulos AOB y BOC son consecutivos, cuyo lado común es $\overrightarrow{OB}$ y el vértice común O.



b) Ángulos Complementarios: Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°



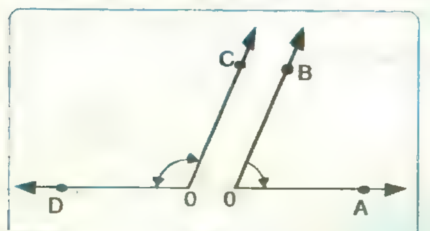
$$m \angle AOB + m \angle BOC = 90^\circ$$

Complemento de un Ángulo: Es lo que le falta a un ángulo para ser igual a 90°

Así:

Complemento de 40° es 50°
porque: 90° - 40° = 50°
Complemento de 70° es 20°,
porque: 90° - 70° = 20°

c) Ángulos Suplementarios: Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°

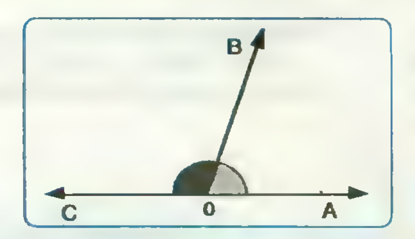


$$m\angle AOB + m \angle COD = 180^\circ$$

Suplemento de un Ángulo: Es lo que le falta a la medida de un ángulo para ser igual a 180°.

Así: El suplemento de 50° es 130°
Porque: 180° - 50° = 130°
El suplemento de 120° es 60°
porque: 180° - 120° = 60°

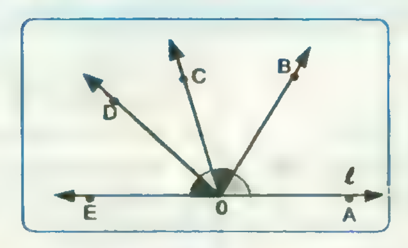
d) **Ángulos Adyacentes Suplementarios:** Dos ángulos se llaman adyacentes suplementarios cuando son consecutivos y suplementarios



Los ángulos $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ son adyacentes suplementarios cuyo lado común es $\overrightarrow{OB}$ y los lados no comunes $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ están prolongación.

$$m\angle AOB + m\angle BOC = 180°$$

TEOREMA: la suma de las medidas de los ángulos consecutivos, formados alrededor de un mismo vértice y a un mismo lado de una recta es 180°.



Hipótesis: Consideremos los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$ formados alrededor del vértice O y a un mismo lado de la recta ℓ.

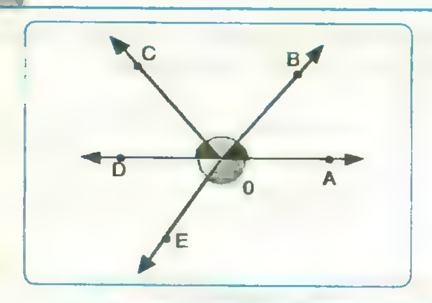
Tesis:

$$\Rightarrow \quad m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD + m\angle DOE = 180°$$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $m\angle AOD + m\angle DOE = 180°$	1. AOD y DOE son suplementarios
2. $m\angle AOD = m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD$	2. Por adición de ángulos.
3. $m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD + m\angle DOE = 180°$	3. Sustituyendo 2 en 1.

TEOREMA: La suma de las medidas de los ángulos consecutivos, formados alrededor de un punto en un plano es 360°.



Hipótesis: Consideremos los ángulos ∠ AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠ DOE, ∠ EOA, formados alrededor del vértice O.

Tesis: m ∠ AOB + m ∠ BOC + m ∠ COD + m ∠ DOE + m ∠ EOA = 360°

Demostración:

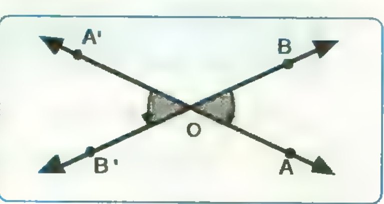
Afirmaciones	Razones
1. m∠ AOB + m ∠ BOD = 180°	1. ∠ AOB y ∠ BOD son suplementarios
2. m ∠ BOD = m ∠ BOC + m ∠ COD	2. Por adición de ángulos
3. m ∠ AOB + m ∠ BOC + m ∠ COD = 180°	3. Sustituyendo 2 en 1
4. m ∠ DOE + m ∠ EOA = 180°	4. $D\hat{O}E$ y $E\hat{O}A$ son suplementarios
5. m ∠ AOB + m ∠ BOC + m ∠ COD + m ∠ DOE + m ∠ EOA = 360°	5. Sumamos miembro a miembro 3 y 4.

e) **Ángulos Opuestos por el Vértice:** Dos ángulos son opuestos por el vértice si tienen un vértice común y los lados de uno son la prolongación de los lados del otro, tales como ∠ AOB y ∠ A' OB'.

- Dos ángulos opuestos por el vértice, tienen igual medida.

m ∠ AOB = m ∠ A'OB'

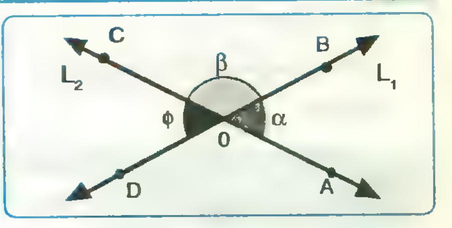
m ∠ BOA' = m ∠ AOB'



(∠ AOB y A'ÔB' son opuestos por el vértice).

TEOREMA Dos ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida.

Hipótesis: Las rectas L_1 y L_2 se cortan en O. El ∠ AOB y ∠ COD son opuestos por el vértice.



Tesis:

m ∠ AOB = m ∠ COD

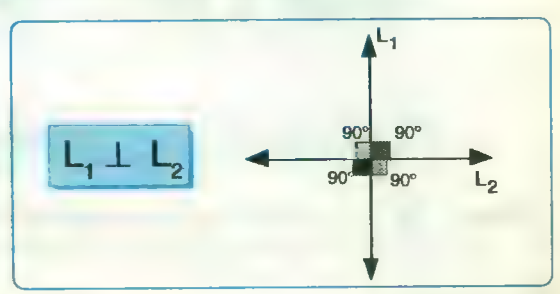
Demostración

Afirmaciones	Razones
1. α, β, ϕ son las medidas de los ángulos: m ∠ AOB = α; m ∠ BOC = β; m ∠ COD = ϕ	1. Medida de ángulos
2. $\alpha + \beta = 180°$ $\phi + \beta = 180°$	2. Medidas que corresponden a ángulos adyacentes suplementarios
3. $\alpha + \beta = \phi + \beta$	3. Como los segundos miembros son iguales, los primeros miembros deben ser iguales.
4. $\alpha = ø$	4. Por cancelación de β.
5. m ∠ AOB = m ∠ COD	5. Por la afirmación 1.

Rectas Perpendiculares Dos rectas son perpendiculares si al intersectarse forman cuatro ángulos rectos.

En la figura:

L_1 y L_2 son perpendiculares. Simbólicamente se expresa así:



Rectas Oblicuas: Dos rectas son oblicuas si al cortarse determinan en el plano dos ángulos agudos y dos ángulos obtusos.

En la figura:

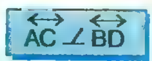
Las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ son oblicuas.

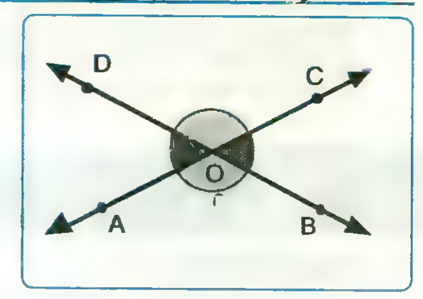
Siendo:

∠ BOC y ∠ AOD (ángulos agudos),

∠ DOC y ∠ AOB (ángulos obtusos)

Simbólicamente se expresa así:


$\overleftrightarrow{AC} \angle \overleftrightarrow{BD}$



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Problema 1: La medida de un ángulo "α" es: 62° 48' 36". Halla su complemento, en grados sexagesimales.

Resolución:

- Medida del ángulo

  "α"= 62° 48' 36"

- Su complemento del ángulo "α"

  = 90° - (62° 48' 36")

  = 89° 59' 60" - 62° 48' 36"

  = 27° 11'24"

¡Atención!

90° = 89° + 1°

90° = 89° + 60' = 89° 60'

90° = 89° (59' + 1')

90° = 89° (59'+ 60")

∴ 90° = 89° 59' 60"

El complemento del ángulo "α" es igual a : 27° 11' 24" **Rpta**

Problema 2: Los ángulos A y B son suplementarios. La medida de "A" es a la de "B" como 4 es a 5. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?

Resolución:

- Como los ángulos "A" y "B" son suplementarios:

A + B = 180° ..... (I)

Además: $\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$ ➡ $\frac{A}{4} = \frac{B}{5} = \boxed{K}$ → $\boxed{A = 4K}$, $\boxed{B = 5K}$ .... **(II)**

Reemplazando los valores de **(II)** en **(I)**, obtenemos:

$$4K + 5K = 180° \Rightarrow 9K = 180° \Rightarrow \therefore \boxed{K = 20°}$$

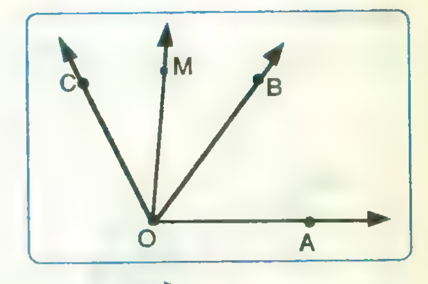
Luego, reemplazamos el valor de K = 20°; en **(II)**:

$$A = 4K = 4(20°) = 80° \Rightarrow \boxed{A = 80°}$$

$$B = 5K = 5(20°) = 100° \Rightarrow \boxed{B = 100°}$$

La medida de cada ángulo es de 80° y 100° **Rpta.**

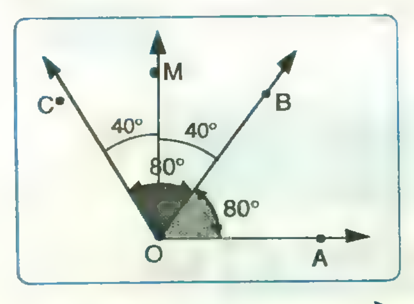
Problema 3: En la figura mostrada: m ∠ AOC = 160°, $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del ángulo AOC y $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo BOC.



Calcular:

a) m ∠ COM
b) m ∠ AOB
c) m ∠ AOM

Resolución:



- Sabemos que $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del ∠ AOC

Por Definición de bisectriz.

$$m\angle AOB = m\angle BOC = \frac{m\angle AOC}{2}$$

$$m\angle AOB = m\angle BOC = \frac{160°}{2} = 80°$$

$$\therefore \boxed{m\angle AOB = m\angle BOC = 80°}$$

- También sabemos que $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ∠ BOC.

Por definición de bisectriz ➡ $m\angle COM = m\angle MOB = \frac{m\angle BOC}{2}$

$$m\angle COM = m\angle MOB = \frac{80°}{2} = 40°$$

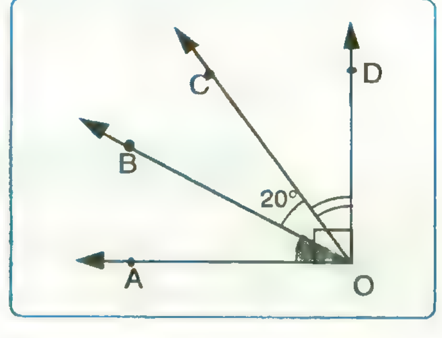
$$\therefore \boxed{m\angle COM = m\angle MOB = 40°}$$

Luego, la medida de los ángulos son:

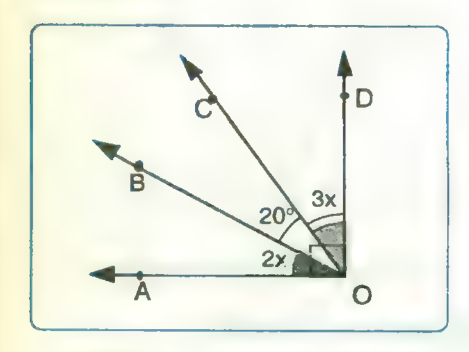
a) $m\angle COM = 40°$ b) $m\angle AOB = 80°$ c) $m\angle AOM = 120°$ **Rpta.**

Problema 4: En la figura mostrada: "2x" es la medida del ∠ AOB, "3x" es la medida del ∠ COD. ¿cuáles son las medidas en grados de los ángulos:

a) ∠ AOB
b) ∠ BOD?



Resolución:



- De la figura:

$$2x + 20° + 3x = 90°$$

$$\Rightarrow 5x = 90° - 20°$$

$$\Rightarrow 5x = 70°$$

$$\Rightarrow x = \frac{70°}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 14°}$$

Luego:

a) $m\angle AOB = 2x = 2(14°) = 28°$

b) $m\angle BOD = (20° + 3x) = 20° + 3(14°) = 62°$

a) $m\angle AOB = 28°$ b) $m\angle BOD = 62°$ **Rpta.**

Problema 5: De la figura mostrada. Calcular:

a) $m\angle XOA$
b) $m\angle AOB$

Resolución:

- De la figura:

$$2\alpha + \alpha = 180°$$

$$3\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = \frac{180°}{3} = 60°$$

$$\Rightarrow \therefore \boxed{\alpha = 60°}$$

- De igual modo:

$$3\beta + \alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \boxed{5\beta + \alpha = 180°} \quad \text{..... (I)}$$

- Reemplazamos el valor de $\boxed{\alpha = 60°}$, En **(I)**:

$$5\beta + 60° = 180° \Rightarrow 5\beta = 120° \Rightarrow \therefore \boxed{\beta = 24°}$$

Luego: $m\angle XOA = 3\beta = 3(24°) = 72°$

$m\angle AOB = \alpha = 60°$

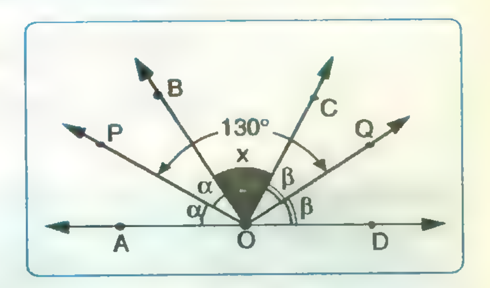
$\boxed{m\angle XOA = 72° \quad b)\ m\angle AOB = 60°}$ **Rpta**

Problema 6: De la figura mostrada. Calcular x = medida del ∠ BOC. Sabiendo que:

$\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ∠ AOB

$\overrightarrow{OQ}$ es bisectriz del ∠ DOC

Además: $m\angle POQ = 130°$



Resolución:

- De la figura: $\alpha + x + \beta = 180°$

$$\boxed{\alpha + \beta = 50°} \quad \text{.... (I)}$$

Además: $\alpha + x + \beta = 130°$

$$\Rightarrow \boxed{x + (\alpha + \beta) = 130°} \quad \text{... (II)}$$

- Reemplazamos **(I)** en **(II)**

$x + 50° = 130° \quad \therefore$

$\boxed{x = 80°}$ **Rpta**

Problema 7: Hallar el complemento del complemento del complemento de 70°

Resolución:

Compl. del Compl. del Compl. de 70° = Compl. del Compl. (90 - 70°)

= Complemento del Complemento (20°)

= Complemento de (90° - 20°)

= Complemento de 70° = 90° - 70°

➡ = **20°** **Rpta**

Problema 8: Halle el suplemento del suplemento del suplemento del suplemento de 80°

Resolución:

Supl. del Supl. del Supl. del Supl. de 80° = Supl. del Supl. del Supl.(180° - 80°)

= Suplemento del Suplemento del Suplemento (100°)

= Suplemento del Suplemento (180° - 100°)

= Suplemento del Suplemento 80°

= Suplemento de (180° - 80°) = Suplemento de (100°)

➡ = 180° - 100° = **80°**

TEOREMAS

1) El compl. del Compl. del .... del Compl. de β; **siempre** es igual a β.
"2n" veces

2) El Compl. del Compl. del ... del Compl. de β, **siempre** es igual a (90° - β)
"2n - 1" veces

3) El Supl. del Supl. del ... del Supl. de β, **siempre** es igual a β.
"2n" veces

4) El Supl. del Supl. del ... del Supl. de β, **siempre** es igual a (180° - β)
"2n - 1" veces

¡ATENCIóN! *"2n" representa a un número par y "2n - 1" representa a un número impar.*

Problema : Hallar el valor del ángulo sabiendo que es igual a la cuarta parte del suplemento de la mitad de dicho ángulo.

Resolución:

- Sea el ángulo pedido = "α"
- Suplemento de la mitad de dicho ángulo = $\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right)$

De acuerdo, el enunciado del problema, planteamos la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$4\alpha = 180° - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 8\alpha = 360° - \alpha$$

$$\Rightarrow 9\alpha = 360° \Rightarrow \boxed{\alpha = 40°}$$

$\therefore$ El ángulo pedido es : $\alpha = 40°$ **Rpta.**

Problema : Calcular el Suplemento de la suma de dos ángulos, sabiendo que el Complemento de uno de ellos más el Suplemento del otro es 140°.

Resolución:

Sean los dos ángulos "a" y "b"; cuya suma = a + b

Incógnita: Suplemento de la suma de los dos ángulos = $\boxed{180° - (a + b)}$ ... (I)

Del enunciado:

El Complemento de uno de Ellos más el Suplemento del otro es 140°

Planteamos la ecuación:

$$(90° - a) + (180° - b) = 140°$$

$$270° - 140° = a + b \Rightarrow \boxed{130° = a + b} \text{ ... (II)}$$

Reemplazamos (II) en (I) y obtenemos:

Suplemento de la suma de los dos ángulos = 180° - (130°) = 50°

$\therefore$ El Suplemento de la suma de los dos ángulos es : 50° **Rpta**

Problema 11: Si el Complemento del Suplemento del Suplemento del Complemento de un ángulo mide 15°. Hallar el Suplemento del Complemento del Complemento del Suplemento de dicho ángulo.

Resolución:

- Sea el ángulo pedido = "α"
- En primer lugar, Hallamos:

$$\text{El Compl. del Supl. del Supl. del } \underbrace{\text{Compl. de "}\alpha\text{"}}_{(90^\circ - \alpha)} = 15^\circ$$

$$\text{El Compl. del Supl. de } [\underbrace{180^\circ - (90^\circ - \alpha)}_{(90^\circ + \alpha)}] = 15^\circ$$

$$\text{El Compl. de } [\underbrace{180^\circ - (90^\circ + \alpha)}_{(90^\circ - \alpha)}] = 15^\circ$$

$$90^\circ - (90^\circ - \alpha) = 15^\circ \implies \therefore \boxed{\alpha = 15^\circ}$$

- En Segundo lugar, Hallamos:

$$\text{Supl. del Compl. del Compl. del } \underbrace{\text{Supl. de "}\alpha\text{"}}_{(180^\circ - \alpha)} = ?$$

$$\text{Supl. del Compl. del } \underbrace{\text{Compl. de } (180^\circ - \alpha)}_{[90^\circ - (180^\circ - \alpha)]} = ?$$

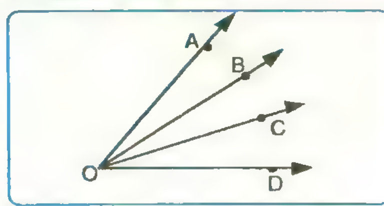
$$\text{Supl. del } \underbrace{\text{Compl. } (\alpha - 90^\circ)}_{[90^\circ - (\alpha - 90^\circ)]} = ?$$

$$\text{Supl. de } [180^\circ - \alpha] = 180^\circ - [180^\circ - \alpha] = \alpha = 15^\circ$$

$\therefore$ El supl. del Compl. del Compl. del Supl. del "α" = 15° **Rpta.**

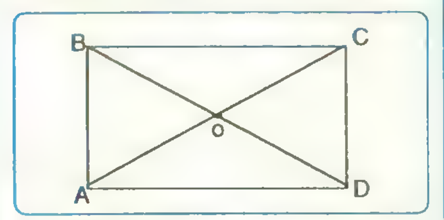
TALLER DE PROBLEMAS Nº 17

Problema 1: En la figura, puedes nombrar los ángulos agudos que existen. ¿Cuáles son éstos?



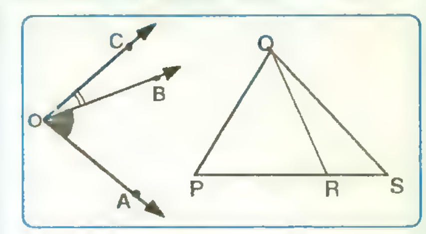
Resolución:

Problema 2: En la figura mostrada: ABCD es un rectángulo. ¿Puedes nombrar los ángulos que son rectos, ángulos agudos y ángulos obtusos?



Resolución:

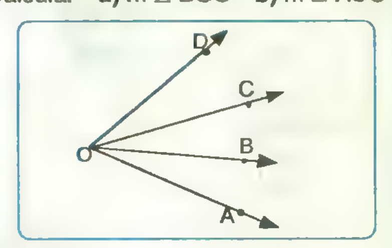
Problema 3: Medir cada uno de los ángulos que se muestran en las figuras (Hacer uso del transportador)



Resolución:

m ∠ AOB =	m ∠ QPS =
m ∠ PQR =	m ∠ BOC =
m ∠ PQS =	m ∠ RQS =
m ∠ AOC =	m ∠ PSQ =
m ∠ QRS =	m ∠ PRQ =

Problema 4: En lafigura mostrada: m ∠ AOD = 80°, m ∠ AOB = 36°, $\overrightarrow{OC}$ Es bisectriz del ∠ BOD,
Calcular **a)** m ∠ BOC **b)** m ∠ AOC



Resolución:

Problema 5 : Trazar ángulos de 50°;75°, 110° y 150°.

Resolución:

Problema 7 : El complemento de un ángulo es igual a 2/5 del suplemento del mismo ángulo ¿Cuál es su valor?

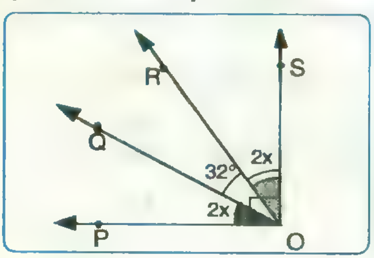
Resolución:

Rpta. 30°

Problema 6 : En la figura mostrada: m ∠ POQ = m ∠ ROS = 2x; m ∠ QOR = 32°

Calcular:

a) m ∠ ROS; **b)** m ∠ POR



Resolución:

Problema 8 : ¿Cuánto mide un ángulo si la diferencia entre su suplemento y complemento es 6 veces el valor de dicho ángulo?

Resolución:

Rpta. 15°

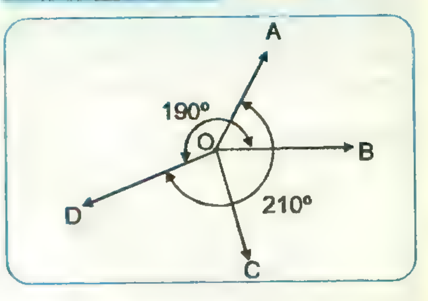
PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMATICA

Organizados por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa

ÁNGULOS

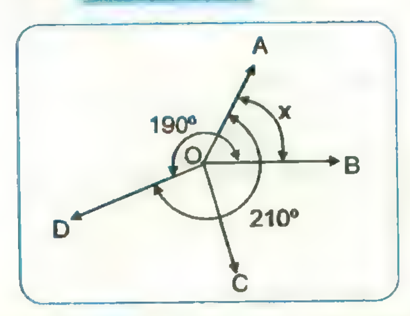
Problema 1 : En la figura, calcular el ángulo AOB.



A) 20° **B)** 40° **C)** 50°
D) 30° **E)** 60°

Resolución:

♣ Sea $m\angle AOB = x^{\circ}$



♣ Del gráfico, por ángulo de una vuelta:

$m\angle DOB + m\angle BOD = 360^{\circ}$

➡ $(210^{\circ} - x) + 190^{\circ} = 360^{\circ}$

$\therefore$ $x = 40^{\circ}$

Rpta.: B

Problema 2 : Se tiene los ángulos consecutivos AOB,BOC y COD, de manera que:

$m\angle \frac{AOB}{3} = m\angle \frac{BOC}{4} = m\angle \frac{COD}{5}$, y

$m\angle AOD = 48^{\circ}$ Calcular:

$m\angle COD - m\angle AOB$

A) 4° **B)** 8° **C)** 12° **D)** 16° **E)** 18°

Resolución:

A
B
C
D
O
3k°
4k°
5k°
48°

♣ Sea $m\angle \frac{AOB}{3} = m\angle \frac{BOC}{4}$

➡ $= m\angle \frac{COD}{5} = k^{\circ}$

Entonces
$m\angle AOB = 3k^{\circ}$
$m\angle BOC = 4k^{\circ}$
$m\angle COD = 5k^{\circ}$

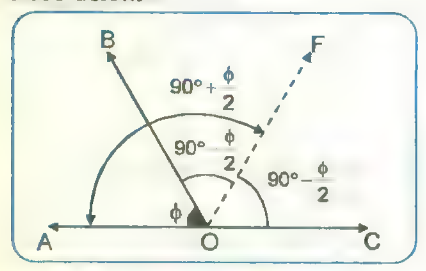
- Del gráfico: $3k^o + 4k^o + 5k^o = 48^o$ ➡ $K^o = 4^o$
- Nos piden calcular:

$$m\angle COD - m\angle AOB = 5K^o - 3K^o = 2K = 2(4^o) = 8^o$$ **Rpta.: B**

Problema 3 : Sabiendo que el suplementos del complemento de la mitad del mayor ángulo que forman la bisectriz del ángulo adyacente a un ángulo "ϕ" y el otro lado no común es 140º , calcular "ϕ".

A) 20° **B)** 40° **C)** 42°
D) 50° **E)** 80°

Resolución:



- Sea $\angle AOB$, el ánguloque mide "ϕ" y $\angle BOC$ el ángulo adyacente cuya bisectriz es $\overrightarrow{OF}$
- Según el gráfico $\overrightarrow{OB}$ es el LADO COMÚN y $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ son los lados NO COMUNES. El mayor ángulo es AOF.
- Según datos: $SC_{\frac{1}{2}\angle AOF} = 140^o$

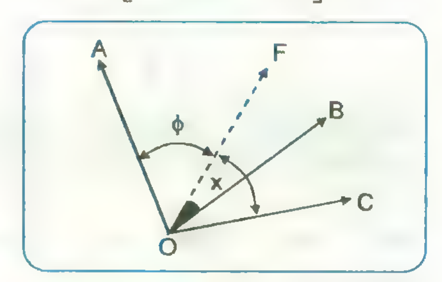
$$180^o - \left[90^o - \frac{1}{2}\left(90^o + \frac{\phi}{2}\right)\right] = 140^o$$

Resolviendo: $\phi = 20^o$ **Rpta.: A**

Problema 4 : La suma de dos ángulos consecutivos AOB y BOC es menor de 180° y la diferencia de los mismos es 28°. Hallar el ángulo formado por el lado OB y la bisectriz del ángulo AOC.

A) 28° **B)** 14° **C)** 62°
D) 76° **E)** 20°

Resolución:



- Sea $\overrightarrow{OF}$ la bisectriz del $\angle AOC$ ➡ $m\angle FOB = x$
- Según Datos: $m\angle AOB - m\angle BOC = 28^o$

$$\Rightarrow (\phi + x) - (\phi - x) = 28^o$$

$$\Rightarrow 2x = 28^o \Rightarrow x = 14^o$$ **Rpta.: B**

Problema 5 : Si: C $\rightarrow$ complemento, siendo:

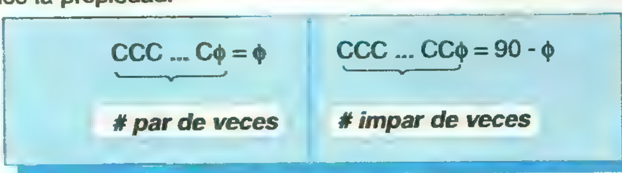
$$CC_{2\alpha} + CCCC_{4\alpha} + CCCCCC_{6\alpha} + ... + CCC...C_{2n\alpha} = 42\alpha$$

Calcular "n"

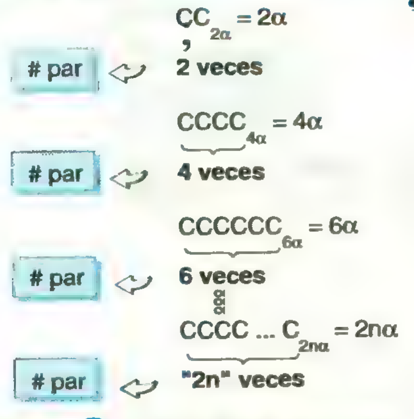
A) 8 B) 6 C) 7 D) 4 E) 5

Resolución:

♣ Recordamos la propiedad:



♣ En el problema:



♣ Según Datos:

$2\alpha + 4\alpha + 6\alpha + ... + 2n\alpha = 42\alpha$

$2\alpha\underbrace{(1 + 2 + 3 + ... + n)} = 42\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = 21$

$\Rightarrow n(n+1) = 42$

$\Rightarrow n(n+1) = 6(6+1)$

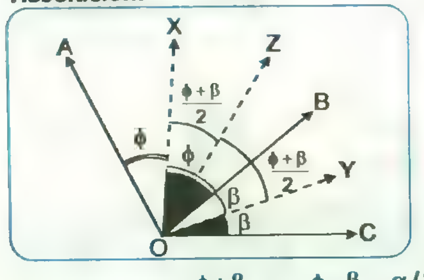
$\therefore$ $n = 6$ **Rpta.: B**

Problema 6 : Dado los ángulos adyacentes suplementarios AOB y BOC. Los rayos OX, OY, OZ son las bisectrices de los ángulos AOB, BOC y XOY respectivamente. Si: $m\angle AOB - m\angle BOC = \alpha$, calcular $m\angle BOZ$.

A) $\dfrac{\alpha}{2}$ B) $\dfrac{\alpha}{3}$ C) $\dfrac{\alpha}{4}$

D) $\dfrac{\alpha}{8}$ E) $\dfrac{2\alpha}{3}$

Resolución:



♣ Sea:
$m\angle AOB = 2\phi$; $m\angle BOC = 2\beta$
entonces según datos: $2\phi - 2\beta = \alpha$

$\phi - \beta = \alpha/2$

♣ Del gráfico: $m\angle XOY = \phi + \beta$

$m\angle XOZ = m\angle ZOY = \dfrac{\phi+\beta}{2}$

♣ Del gráfico también:
$m\angle BOZ = m\angle ZOY - m\angle BOY$

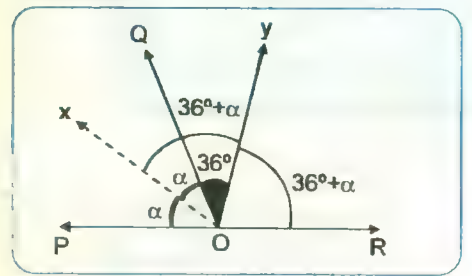
$\Rightarrow m\angle BOZ = \dfrac{\phi+\beta}{2} - \beta = \dfrac{\phi-\beta}{2} = \dfrac{\alpha/2}{2} = \dfrac{\alpha}{4}$

$\therefore$ $m\angle BOZ = \alpha/4$ **Rpta.: C**

Problema 7 : Los ángulos POQ y QOR son adyacentes suplementarios, se trazan las bisetrices $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OX}$ de los ángulos XOR y POQ. Si la medida del ángulo YOQ es 36º, calcular la m∠POQ.

A) 36° B) 48° C) 54°
D) 72° E) 81°

Resolución:



- Del gráfico:

  m∠POQ = 2α = ? ... (1)

- Del gráfico:

  m∠POX+m∠XOY+m∠YOR = 180º

  α+(36+α) + (36+α) = 180º

  a = 36º ... (2)

- Reemplazando **(2)** en **(1)** :

  m∠POQ = 2(36º) = 72º **Rpta.:D**

Problema 8 : Se tiene los ángulos consecutivos ∠AOB y ∠BOC, siendo m ∠AOB = 90 . Se trazan las bisectrices $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ de los ángulos ∠AOC y ∠BOC respectivamente. Calcular el complemento del ∠MON.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

Resolución:

- Sea m∠BOC = 2ϕ y m∠MON = x

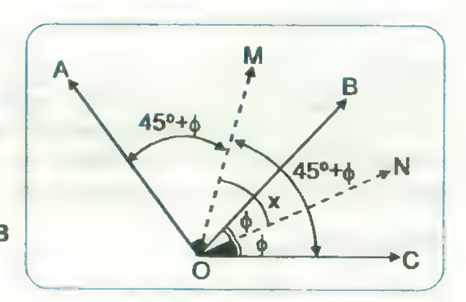
  ➡ C_x = 90º - x = ? ...(1)

- Del gráfico:

  x + ϕ = 45º + ϕ ➡ x = 45º ...(2)

- Reemplazando **(2)** en **(1):**

  C_x = 90º - 45º = 45º **Rpta.: B**



Problema 9 : Si: C → Complemento y
S → Suplemento

Calcular el complemento de "x" siendo:

$CCC_x + SSSSS_{2x} = 210°$

A) 80° B) 70° C) 65°
D) 60° E) 42°

Resolución:

- Por la propiedad:

$\underbrace{GCC}_{3 \text{ veces}}{}_x = 90 - x$; # impar	$\underbrace{SSSSS}_{5 \text{ veces}}{}_{2x} = 180 - 2x$ # impar

♣ Reemplazando en la Condición del problema:

$$90° - x + 180° - 2x = 210° \qquad \boxed{x = 20^\circ}$$

- Nos piden el complemento de x:

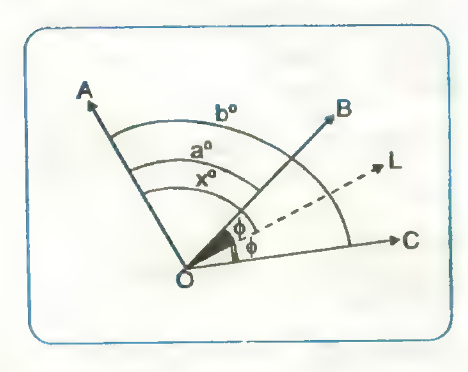
$$\boxed{C_x = C_{20°} = 70°} \qquad \textbf{Rpta.: B}$$

Problema 10: Se tiene dos ángulos consecutivos AOB y BOC. Calcular la medida del ángulo formado por $\overrightarrow{OA}$ con la bisectriz del ángulo BOC, si $m\angle AOB = a$ y $m\angle AOC = b^\circ$.

A) $\frac{a°+b°}{2}$ **B)** a°+b° **C)** 2(a°+b°)

D) $\frac{a°+2b°}{2}$ **E)** $\frac{2a°+3b°}{2}$

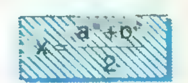
Resolución:



- Sea $\overrightarrow{OL}$ la bisectriz del $\angle BOC$. Veamos la figura.

- Siendo "x" la medida del ángulo pedido, del gráfico vemos lo siguiente:

$$x^\circ = a^\circ + \phi, y$$
$$x^\circ = b^\circ - \phi$$
$$\Sigma MAM: 2x° = a° + b°$$



$$\boxed{x = \frac{a°+b°}{2}}$$

Rpta.: A

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE MEDICION DE ÁNGULOS

NIVEL I

Problema 1 : Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD tal que $\widehat{AOB} = 2x$, $\widehat{BOC} = 5x$ y $\widehat{COD} = 3x$. Hallar la medida del ángulo BOC si el ángulo AOD es llano.

A) 36° **B)** 90° **C)** 48°
D) 72° **E)** 108°

Problema 2 : Calcular el Complemento de: 72°25'46"

A) 17°24'15" **B)** 17°34'15"
C) 17°34'14" **E)** 17°41'14"
E) 12°34'14"

Problema 3 : Hallar el Suplemento de: 135°28'15"

A) 45°31'45" **B)** 45°31'35"
C) 44°31'45" **D)** 44°31'35"
E) 44°21'45"

Problema 4 : Si un ángulo es el cuádruplo de su adyacente suplementario. ¿Cuánto mide dicho ángulo?

A) 144° **B)** 136° **C)** 138°
D) 124° **E)** 36°

Problema 5 : Sumar: 62°46'28" con 28º 16'55"

A) 93°60'23" **B)** 90°3'23"
C) 91°3'23" **D)** 91°3'13"
E) 91°13'3"

Problema 6 : Calcular la diferencia de dos ángulos que miden 30°46'50" y 18° 52'35"

A) 12°54'15" **B)** 10°54'15"
C) 11°55'15" **D)** 11°54'25"
E) 11°54 15"

Problema 7 : Se tienen dos ángulos complementarios tal que uno es los 4/5 del otro. ¿Cuánto mide el mayor de ellos?

A) 60° **B)** 65° **C)** 50°
D) 55° **E)** 45°

Problema 8 : Calcular la diferencia de dos ángulos que miden 109°30'25" y 58° 19'30".

A) 51°20'55" **B)** 51°10'55"
C) 51°10'45" **D)** 41°10'35"
E) 61°10'55"

Problema 9 : Si un ángulo mide 40°. Calcular el Suplemento del doble de dicho ángulo.

A) 80° **B)** 100° **C)** 140°
D) 120° **E)** 110°

Problema 10 : Calcular el Suplemento de 24°30'18"

A) 165°29'42" **B)** 135°29'46"
C) 155°29'42" **D)** 145°29'42"
E) 155°28'52"

Problema 11 : Si un ángulo mide 60° . Calcular el Suplemento del Complemento de dicho ángulo.

A) 120° B) 130° C) 150° D) 160° E) 100°

Problema 12: Si un ángulo mide 30°. Calcular el Suplemento del Suplemento del Complemento del doble de dicho ángulo.

A) 60° **B)** 30° **C)** 150° **D)** 120° **E)** 80°

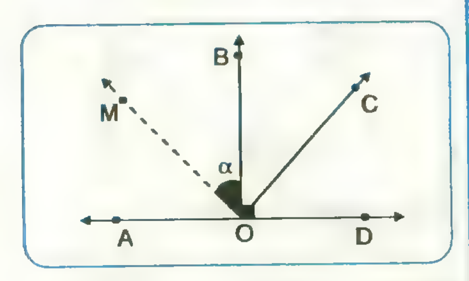
Problema 13: Dos ángulos adyacentes suplementarios difieren en 40°. Hallar la medida del mayor ángulo.

A) 100° **B)** 110° **C)** 120°
D) 98° **E)** 125°

Problema 14: Cuánto mide un ángulo si la diferencia entre su Suplemento y su Complemento es seis veces el ángulo.

A) 15° **B)** 30° **C)** 22°30'
D) 45° **E)** 20°

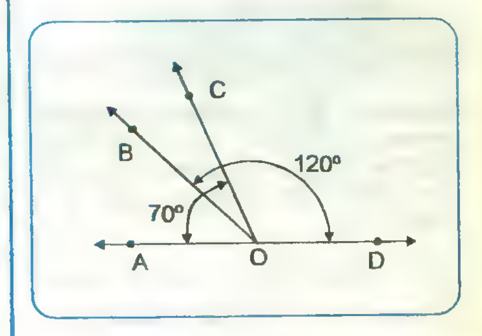
Problema 15: En la figura, $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ∠AOC, luego la medida del ángulo COD, es:



A) $90° - \frac{\alpha}{2}$ **B)** $45° + \frac{\alpha}{2}$ **C)** α

D) 2α **E)** $\frac{\alpha}{2}$

Problema 16: Si: m∠AOC = 70° y m∠BOD = 120°. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOB y COD.

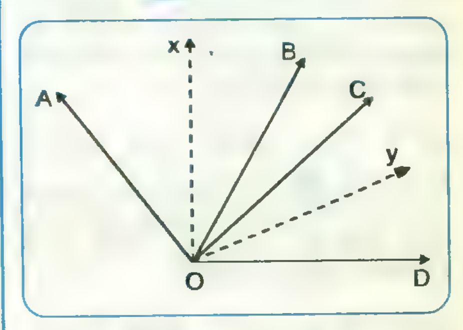


A) 90° **B)** 95° **C)** 100°
D) 120° **E)** 80°

Problema 17: Los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, son tales que: m∠AOC+m∠BOD=140° ; y m∠BOC=30°. Calcular m∠AOD.

A) 40° **B)** 125° **C)** 170°
D) 110° **E)** 120°

Problema 18: En la figura:



m∠AOD = 110°
m∠BOC = 30°
∠AOB ≅ ∠COD

$\overrightarrow{OX}$: bisectriz del ∠AOB

$\overrightarrow{OY}$: bisectriz del ∠COD

Hallar: m∠XOY

A) 30º **B)** 40º **C)** 60º **D)** 70º **E)** 20º

Problema 19: Se tienen los ángulos consecutivos ∠AOB, ∠BOC, ∠COD de modo tal que: $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del ∠AOC y m∠AOD = 95°; Hallar m∠AOB, si m ∠BOD = 55°.

A) 20° **B)** 30° **C)** 40° **D)** 50° **E)** 55°

Problema 20: Siendo los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, tal que m ∠AOB = m ∠BOD = 3m ∠COD. calcular m∠COD, si: m∠AOD = 120°.

A) 20° **B)** 40° **C)** 100° **D)** 80° **E)** 60°

Clave de Respuestas

1. B	6. E	11. C	16. B
2. C	7. C	12. B	17. D
3. C	8. B	13. B	18. D
4. A	9. B	14. A	19. C
5. C	10. C	15. D	20. A

NIVEL II

Problema 1 : Tres ángulos consecutivos suman 130°; el ángulo intermedio mide 20° . Hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices del primero y del tercer ángulo.

A) 45° **B)** 55° **C)** 65° **D)** 60° **E)** 75°

Problema 2 : Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC tal que el ángulo AOC es recto. Hallar la medida del ángulo AOB si dichos ángulos AOB y BOC están en la relación de 4 a 5.

A) 40° **B)** 50° **C)** 30° **D)** 20° **E)** 60°

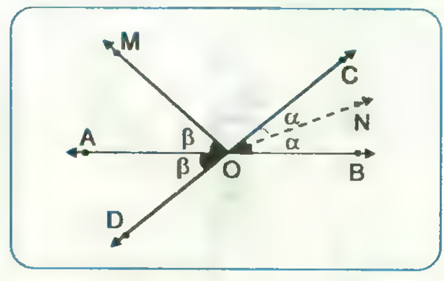
Problema 3 : Se tienen los ángulos consecutivos AOC y COB tal que el ángulo AOB es recto si: m∠AÔC = 7/2 m∠BÔC. Hallar: m∠AOC.

A) 20° **B)** 30° **C)** 40° **D)** 60° **E)** 70°

Problema 4 : Se tiene los ángulos adyacentes AOB y BOC de manera que: m∠AOB + m∠AOC = 80°. Calcular: m ∠AOM; siendo $\overrightarrow{OM}$ bisectriz del ∠BOC.

A) 60º **B)** 40º **C)** 50º **D)** 30º **E)** 20º

Problema 5 : Si: $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{ON}$ son bisectrices del ∠DOM y del ∠BOC, respectivamente.
Calcular: m∠DOB. Si m∠MON = 120°



A) 100° **B)** 110° **C)** 120°
D) 130° **E)** 140°

Problema 6 : Se tiene los ángulos consecutivos AOB y BOC que se diferencian en 38°. Calcular la medida del ángulo formado por la bisectriz del ángulo AOC y el rayo $\overrightarrow{OB}$.

A) 76° B) 38° C) 20° D) 19° E) 24°

Problema 7 : Dos ángulos suman 75° y uno de ellos mide el doble del complemento de esta suma. Determinar la diferencia de estos dos ángulos.

A) 30° B) 45° C) 20° D) 15° E) 25°

Problema 8 : Si el Suplemento de la medida de un ángulo es los 5/2 de su Complemento. Calcular la medida de dicho ángulo.

A) 10° B) 30° C) 80° D) 37° E) 50°

Problema 9 : ¿Cuánto mide un ángulo si la diferencia entre su Suplemento y su Complemento es seis veces el valor de dicho ángulo?

A) 15° B) 18° C) 9° D) 12° E) 21°

Problema 10 : Hallar la medida de un ángulo sabiendo que su Suplemento es igual al triple de su Complemento.

A) 35° B) 55° C) 65° D) 45° E) 75°

Problema 11 : Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD tal que: $m\angle AOB + m\angle COD = 60°$. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 60° E) N.A.

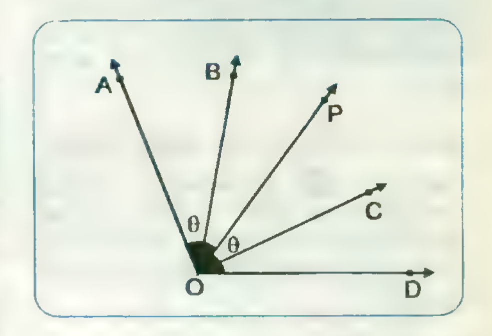
Problema 12 : Sean los ángulos consecutivos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$, si: $m\angle AOC = 40°$ y $m\angle BOD = 80°$. Calcular $m\angle COD - m\angle AOB$.

A) 50° B) 30° C) 60°
D) 20° E) 40°

Problema 13 : En la figura $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del $\angle AOD$.

Si: $m\angle POC - m\angle BOP = 20°$.

Calcular: $m\angle AOB - m\angle COD$.



A) 10° B) 30° C) 20° D) 40° E) 12°

Problema 14: Sean los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$ consecutivos, donde:

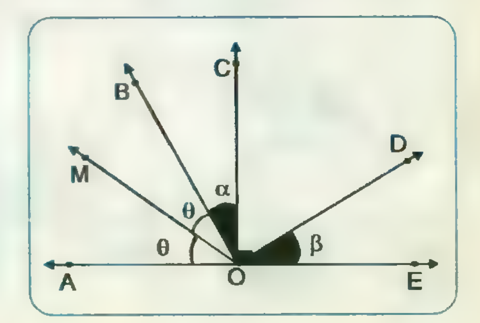
$\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del <AOD

$\overrightarrow{OC}$ es bisectriz del <BOD y

$m\angle AOC - m\angle BOD = 20°$. Calcular $\angle BOC$

A) 15° B) 40° C) 10° D) 20° E) 25°

Problema 15: En la siguiente figura, se cumple que: $\dfrac{m\hat{BOE}}{m\hat{MOD}} = \dfrac{4}{5}$, entonces:



A) $3\alpha + 2\beta = 90°$ **B)** $3\beta + 4\alpha = 100°$
C) $4\beta + 3\alpha = 90°$ **D)** $4\beta + 2\alpha = 90°$
E) $3\beta + 2\alpha = 80°$

Problema 16 : Si al suplemento de un ángulo se le aumenta el doble de su complemento resulta la medida de dicho ángulo pero más 80°. Calcular dicha medida.

A) 50° **B)** 60° **C)** 70° **D)** 80° **E)** 90°

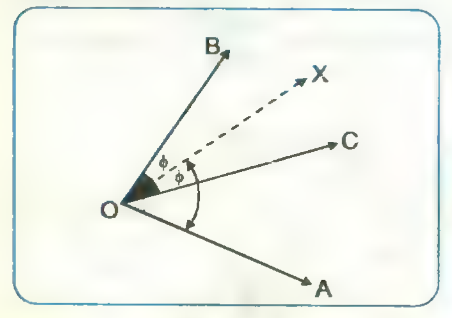
Problema 17 : Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC; si las bisectrices de los ángulos AOB y AOC forman un ángulo de 40°. Calcular m∠BOC.

A) 20° **B)** 40° **C)** 80° **D)** 30° **E)** 10°

Problema 18 : Un ángulo llano es dividido en cinco ángulos parciales en progresión aritmética. Calcular el ángulo menor sabiendo que el cuadrado de su medida es igual al ángulo mayor.

A) 4° **B)** 6° **C)** 8° **D)** 10° **E)** 9°

Problema 19 : Sabiendo que los ángulos AOB y AOC son complementarios, hallar el ángulo AOX, siendo OX bisectriz del ángulo BOC.



A) 30° **B)** 60° **C)** 45°
D) 75° **E)** 63,5°

Problema 20 : Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC en donde se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ de los ángulos AOB y MOC respectivamente. Hallar: $N\hat{O}B$, si: $mA\hat{O}C - 3mA\hat{O}M = 36°$ y $B\hat{O}C > A\hat{O}B$

A) 36° **B)** 9° **C)** 12° **D)** 18° **E)** 24°

Problema 21 : La suma del complemento de un ángulo "α" con el suplemento de su ángulo doble es igual a 2/3 del complemento de un ángulo "β" y además: $\alpha - \beta = 35°$. Calcular el complemento del ángulo "α".

A) 20° **B)** 24° **C)** 30° **D)** 32° **E)** 10°

Problema 22 : Se tienen los ángulos consecutivos AOB; BOC y COD, tal que: m∠COD = 3m∠AOB. Hallar: m∠BOC; si al trazar las bisectrices $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ de los ángulos AOB y COD, se cumple que:

$$2m\angle XOY - m\angle AOD = 30°$$

A) 20° **B)** 15° **C)** 30° **D)** 18° **E)** 60°

Problema 23 : El suplemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es igual al complemento de la diferencia entre el complemento del complemento y el suplemento del mismo ángulo. Calcular dicho ángulo.

A) 30° **B)** 45° **C)** 60° **D)** 75° **E)** 90°

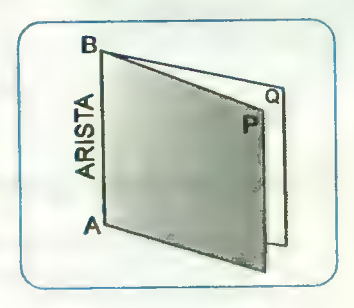
Clave de Respuestas

1. E	7. D	13. C	19. C
2. A	8. B	14. D	20. D
3. E	9. A	15. C	21. E
4. B	10. D	16. C	22. C
5. E	11. B	17. C	23. E
6. D	12. E	18. C	

4.5 ÁNGULOS DIEDROS

ÁNGULO DIEDRO:

Es la reunión de dos semiplanos que tienen como origen una recta común. La recta común se llama **arista** y los semiplanos caras del ángulo diedro. En la figura se tiene el ángulo diedro de arista $\overleftrightarrow{AB}$ y caras P y Q. A este ángulo diedro o simplemento diedro los denotaremos por: ∠P - AB - Q algunas veces es suficiente nombrar dos puntos de la arista. Así diedro AB.



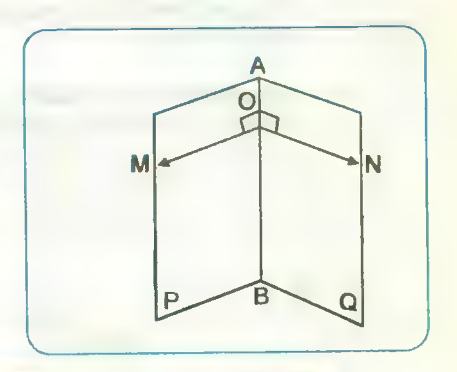
Ejemplos de ángulos Diedros

- Un libro abierto
- El ángulo formado por el suelo y una pared de una habitación.

ÁNGULOS PLANO O RECTILÍNEO DE UN ÁNGULO DIEDRO

Se denomina ángulo plano o rectilíneo de un diedro al ángulo formado por dos rectas perpendiculares a la arista en uno de sus puntos, perteneciendo dichas rectas, una a cada cara del diedro.

En la figura: Si por un punto O cualquiera de la arista AB de un diedro, trazamos perpendiculares a ella (OM y ON) una en cada cara, el ángulo formado MON se llama ángulo plano o ángulo rectilíneo del diedro.



∠MON = ángulo plano del ángulo diedro P-AB-Q

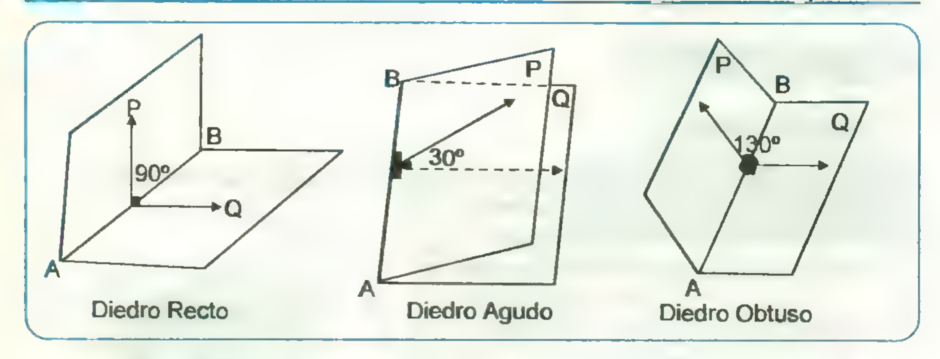
4.5.1. CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS DIEDROS

Los ángulos diedros se clasifican en:

Angulos Diedros Rectos.- Si sus ángulos planos son rectos

Angulos Diedros Agudos.- Si sus ángulos planos son agudos

Angulos Diedros Obtusos.- Si sus ángulos planos son obtusos



Diedro Recto — Diedro Agudo — Diedro Obtuso

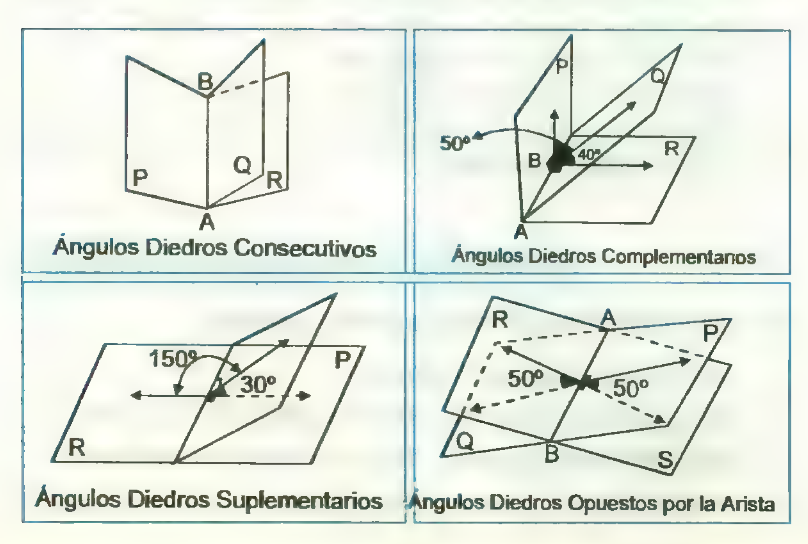
4.5.2. PARES DE ÁNGULOS DIEDROS

- **Ángulos Diedros Consecutivos:** Son dos ángulos diedros que tienen la misma arista y una cara común y las otras dos caras están a uno y otro lado de la cara común.

- **Ángulos Diedros Suplementarios:** Si sus ángulos planos son suplementarios.

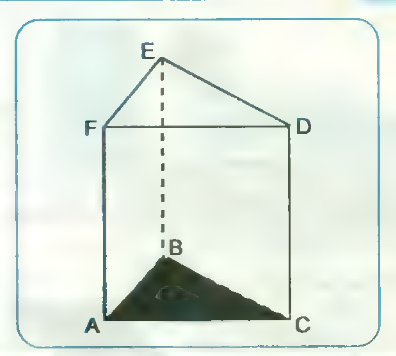
- **Ángulos Diedros Adyacentes Suplementarios:** Si son consecutivos y suplementarios.

- **Angulos Diedros Opuestos po la Arista:** Si tienen una arista común y las caras del uno son semiplanos opuestos de las caras del otro.



Ángulos Diedros Consecutivos — Ángulos Diedros Complementarios

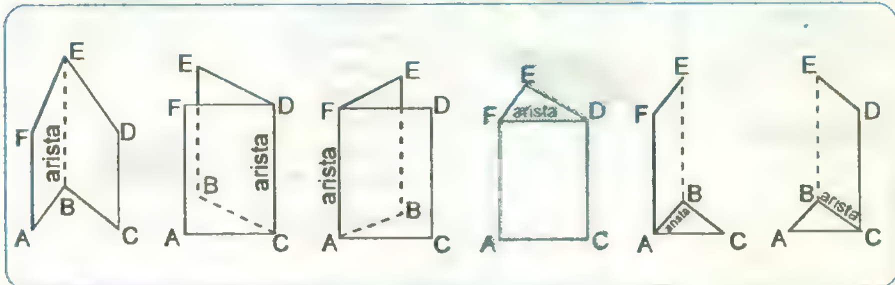
Ángulos Diedros Suplementarios — Ángulos Diedros Opuestos por la Arista



Problema: En la figura mostrada llamado Prisma. ¿Decir cuántos ángulos diedros existen? ¿Dar el número de vértices? ¿Dar el número de caras?

Resolución:

Para saber cuántos ángulos diedros hay en dicha figura, basta saber cuantas aristas de un diedro existen en el prisma. Veamos cada uno de ellos.



Observamos que por cada arista hay un ángulo Diedro.

∴ En la figura mostrada hay 9 ángulos diedros ya que se cuenta con 9 aristas.

Recuerda que:

Cara de un Prisma: es parte de una cara de un ángulo Diedro. Cada arista de un prisma es parte de una arista de un diedro.

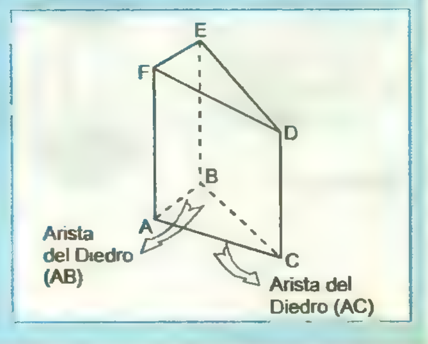
Cada vertice de un prisma es un punto común a tres aristas del prisma.

♣ Las aristas del prismas son : $\overline{FE}$, $\overline{ED}$, $\overline{DF}$, $\overline{EB}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AF}$.

Luego:

♣ El número de vértices son 6, siendo estos: A,B,C,D,E, y F

♣ El número de caras son 5, siendo es tos: ABC, BCDE, BEFA, FED, AFDC.

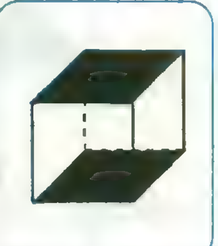


Nota: *También, podemos decir que ángulos diedros son los formados por cada dos caras consecutivas.*

TALLER DE EJERCICIOS Nº 18

Ejercicio 1 : La figura mostrada es un prisma, Calcular:

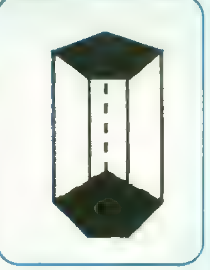
a) Número de caras
b) Número de vértices
c) Número de ángulos diedros.



Resolución:

Ejercicio 2 : La figura mostrada es un prisma, Calcular:

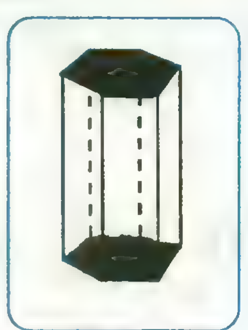
a) Número de caras
b) Número de aristas del prisma.
c) Número de ángulos diedros.



Resolución:

Ejercicios 3 : La figura mostrada es un prisma, Calcular:

a) Número de caras
b) Número de vértices
c) Número de aristas del prisma
d) Número de aristas de los diedros



Resolución:

Ejercicio 4 : Las hojas de una puerta giratoria forman entre si 5 diedros iguales. ¿Cuánto mide cada uno?

Resolución:

Rpta.: 72

Ejercicio 5 : ¿Cuánto medirá un diedro cuyo suplemento es los 2/3 de la diferencia entre los que miden 53º 18' y 42° 54'?

Resolución:

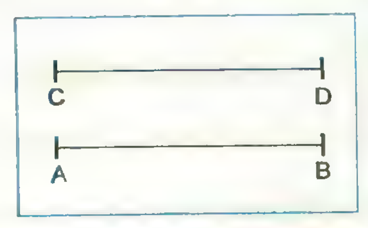
Rpta.: 173°4'

4.6 CONGRUENCIA.

Dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

- Dos figuras son congruentes cuando al superponerlas coinciden exactamenteentodos sus puntos.

4.6.1 CONGRUENCIA DE SEGMENTOS.



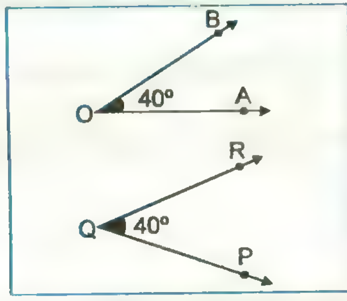
- Dos segmentos son **congruentes** si tienen igual medida .

Así tenemos que:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$; se lee el segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{CD}$.

Luego: ➡ $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$

4.6.2 CONGRUENCIA DE ÁNGULOS.



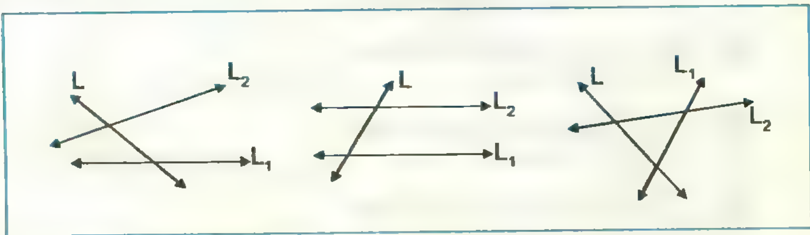
- Dos ángulos son **congruentes** si tienen igual medida.

Así tenemos que:

$AOB \cong \angle PQR \Leftrightarrow m(\angle AOB) = m(\angle PQR)$

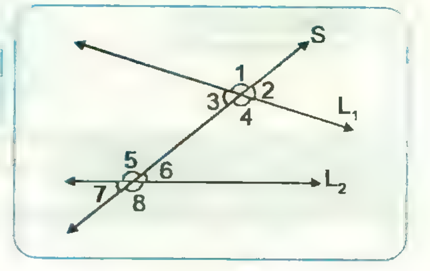
4.6.3. ANGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS CORTADAS POR UNA SECANTE.

Se dice que una recta es secante a otras dos si los intersecta en puntos distintos. Así, la recta L es secante a las rectas L_1 y L_2. (Ver figuras)



- Dos rectas cortadas por una secante dan origen a ocho ángulos diferentes.

En la figura:



S es secante a L_1 y L_2 y determinan los ángulos denotados del 1 al 8 *(Ver figura)*

- A los ángulos 1,2,7 y 8 se les llama **ángulos externos.**
- A los ángulos 3,4,5 y 6 se les llama **ángulos internos.**
- A los pares de ángulos 3 y 6; 4 y 5 se les denomina **ángulos alternos internos.**
- A los pares de ángulos 1 y 8; 2 y 7 se les denomina **ángulos alternos externos.**
- A los pares de ángulos 3 y 5; 4 y 6 se les denomina **ángulos conjugados internos.**
- A los pares de ángulos 1 y 7; 2 y 8 se les denomina **ángulos conjugados externos.**
- A los pares de ángulos 1 y 5; 2 y 6; 3 y 7; 4 y 8 se les denomina **ángulos correspondientes.**

4.6.4. ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE.

Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas y están cortadas por la secante S, se cumple las siguientes propiedades:

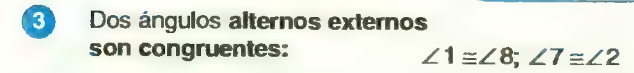
1. Los ángulos **correspondientes son congruentes:**

   $\angle 1 \cong \angle 5;\ \angle 6 \cong \angle 2$

   $\angle 7 \cong \angle 3;\ \angle 8 \cong \angle 4$

2. Los ángulos **alternos internos son congruentes:**

   $\angle 3 \cong \angle 6; \cong \angle 5 \cong \angle 4$



3. Dos ángulos **alternos externos son congruentes:** $\angle 1 \cong \angle 8;\ \angle 7 \cong \angle 2$

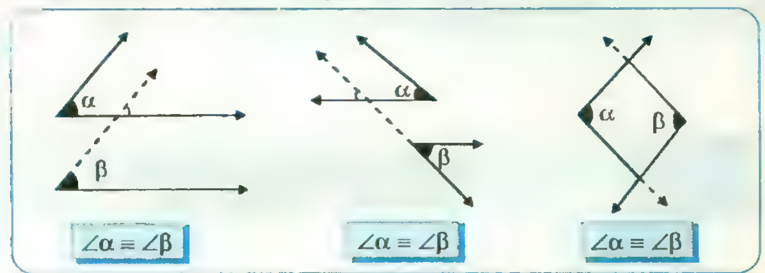
4. Dos ángulos **conjugados externos son suplementarios:** $m\angle 1 + m\angle 7 = 180^{\circ};\ m\angle 2 + m\angle 8 = 180^{\circ}$

5. Dos ángulos **conjugados internos son suplementarios:** $m\angle 5 + m\angle 3 = 180^{\circ},\ m\angle 4 + m\angle 6 = 180^{\circ}$

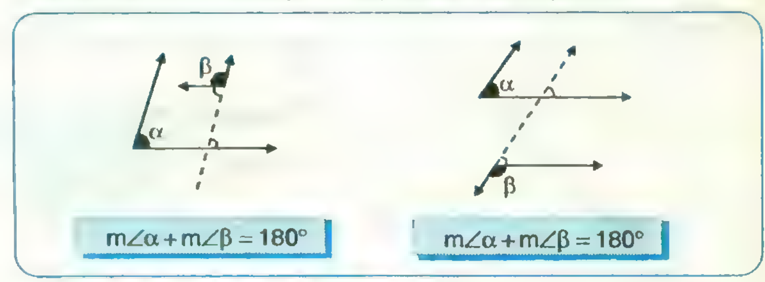
4.6.5. ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS:

Si dos ángulos en un plano tienen sus lados respectivamente paralelos, son congruentes o suplementarios.

Son Congruentes: Si sus lados correspondientes están dirigidos en el mismo sentido o en sentido opuesto.



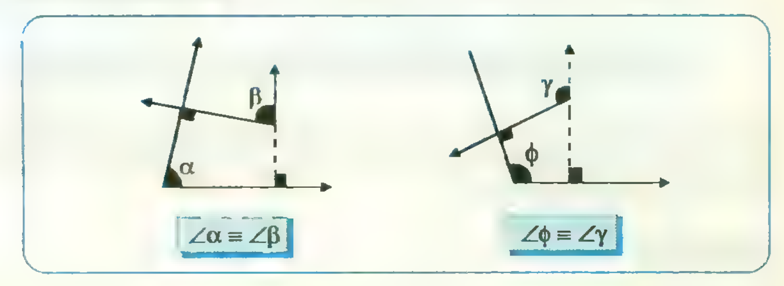
Son Suplementarios: Si un par de lados correspondientes están dirigidos en un mismo sentido y el otro par en sentido opuesto.



4.6.6. ANGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

Si los lados de un ángulo son respectivamente perpendiculares a los lados de otro ángulo, entonces:

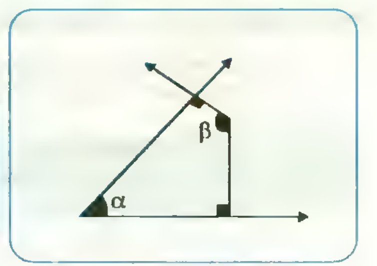
Los ángulos son **congruentes** cuando los dos ángulos son agudos o los dos son obtusos.



2 Los ángulos son **suplementarios** cuando uno de los ángulos es agudo y el otro es obtuso.

$$m\angle\alpha + m\angle\beta = 180°$$

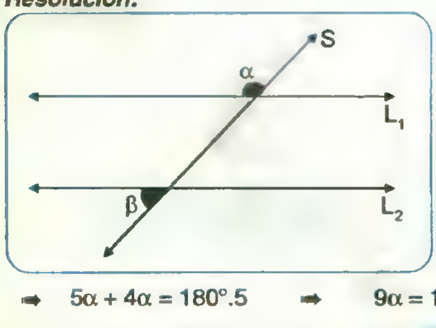
$$m\angle\alpha + m\angle\beta = \pi \text{ rad.}$$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE ÁNGULOS EN PARALELAS

Ejercicio 1 : De dos ángulos conjugados externos entre paralelas uno es los 4/5 del otro. La diferencia de las medidas de los ángulos es de:

Resolución:



Sean: α y β los ángulos conjugados externos:

Por propiedad: $\alpha + \beta = 180°$ ...**(1)**

Por dato: $\beta = \frac{4}{5}\alpha$ ...**(2)**

Reemplazamos **(2)** en **(1)**

$$\alpha + \frac{4}{5}\alpha = 180°$$

➡ $5\alpha + 4\alpha = 180°.5$ ➡ $9\alpha = 180°.5$

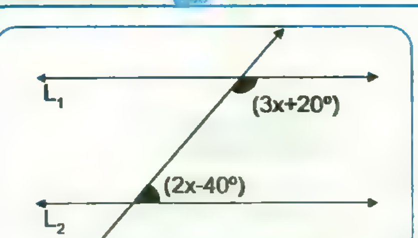
$\alpha = 20°\ .\ 5$ ➡ ∴ $\alpha = 100°$

Reemplazamos el valor de "α" en **(2)** ➡ $\beta = \frac{4}{5}(100°)$ ➡ $\beta = 80°$

La diferencia de las medidas de los ángulos es: 100° - 80° = 20° **Rpta.**

Ejercicio 2 : Dos rectas paralelas al ser intersectadas por una secante forman dos ángulos conjugados internos, cuyos valores se expresan por: 3x+20°; 2x-40°. ¿Cuánto mide el mayor de ellos?

Resolución:



- Por propiedad:

$(3x + 20°) + (2x - 40°) = 180°$

$5x - 20° = 180°$

$5x = 180° + 20°$

$5x = 200°$ ⇒ ∴ $x = 40°$

- El ángulo mayor mide: $3x + 20° = 3(40°) + 20° = 140°$

∴ El ángulo mayor mide 140° **Rpta.**

Ejercicio 3 : En la figura mostrada: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular el ángulo "x".

Resolución:

De la figura:

$(5k + 15°) + (3k + 5°) = 180°$

$8k + 20° = 180°$

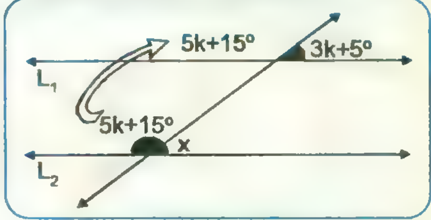
$8k = 160°$ ⇒ $k = 20°$

- Por ser adyacentes suplementarios:

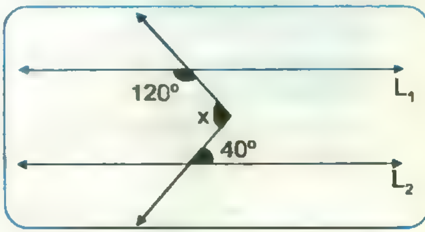
$x + (5k + 15°) = 180°$

$x + (5.20° + 15°) = 180°$

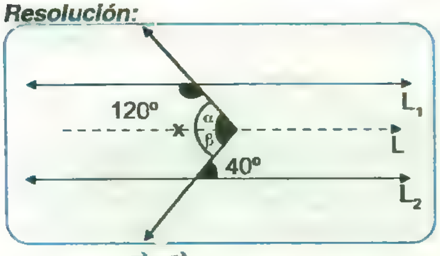
$x + 115° = 180°$ ⇒ $x = 65°$ **Rpta.**



Ejercicio 4 : En la figura mostrada: $L_1 // L_2$. Calcular el ángulo "x".



Resolución:



- Trazo: $\vec{L} // \vec{L_2}$ Donde: $\hat{x} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$ ...(1)
- $\hat{\beta} = 40°$ ... por ser ángulos alternos internos.
  $\hat{\alpha}$ y 120° ... son ángulos conjugados internos luego son suplementarios.

Es decir: Es decir: $\hat{\alpha} + 120° = 180°$

$\hat{\alpha} = 60°$

Luego, reemplazamos el valor de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ en (1) :

$\hat{x} = 60° + 40°$

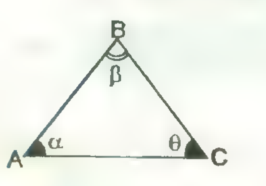
∴ $\hat{x} = 100°$ **Rpta.**

PROPIEDADES IMPORTANTES:

Propiedad I

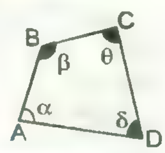
La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180° .

$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$



Propiedad II

La suma de los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera es 360°.



$$\alpha + \beta + \theta + \delta = 360°$$

Propiedad III

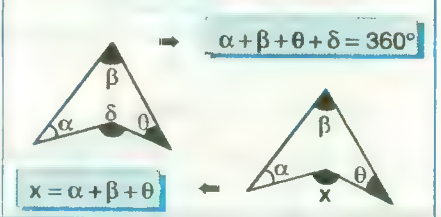
En todo triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de dos ángulos interiores no adyacentes.
(teorema del ángulo exterior)

$$x° = \alpha + \beta$$

B
β
α
θ
x°
A
C

Propiedad IV

En todo cuadrilátero cóncavo se cumplen las siguientes propiedades:

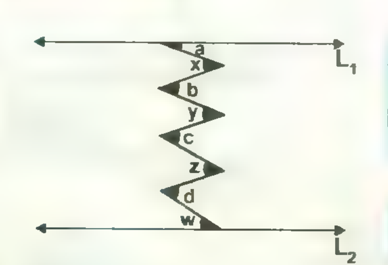


$$\alpha + \beta + \theta + \delta = 360°$$

$$x = \alpha + \beta + \theta$$

Propiedad V

Si entre dos paralelas se traza varios ángulos como muestra la siguiente figura, se cumple:



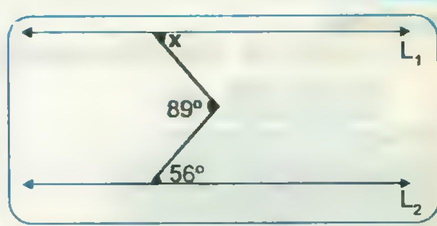
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$; entonces:

(Suma de ángulos dirigidos a la izquierda) = (Suma de ángulos dirigidos a la derecha)

o sea:

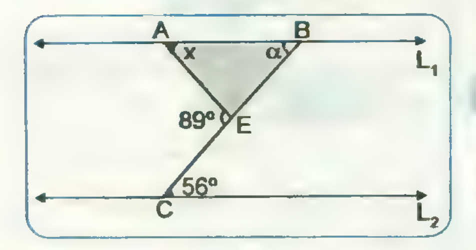
$$x° + y° + z° + w° = a° + b° + c° + d°$$

Ejercicio 5 : En la figura mostrada: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$. Calcular: "x".



Resolución:

$\alpha = 56°$ .... por ser ángulos alternos internos.



En el Δ BAE:

$\alpha + x = 89°$ ... por ángulo externo de un triángulo.

Reemplazamos el valor de "α" en está última expresión:

$56° + x = 89°$ ➡ $x = 33°$ **Rpta.**

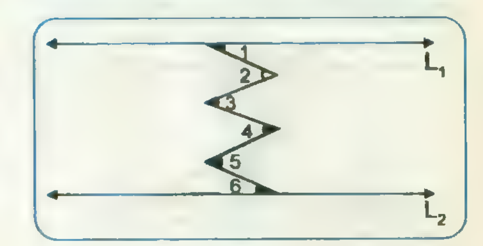
Otra Forma

En este tipo de problema se puede aplicar en forma directa la propiedad V; O sea, la suma de los dos ángulos de la derecha es igual al ángulo de la izquierda.

➡ $x + 56° = 89°$ ➡ $x = 33°$

Ejercicio 6 : En la figura mostrada:
$\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$

$\angle 1 = 2x + 5°$
$\angle 2 = 2x + 10°$
$\angle 3 = 2x + 15°$
$\angle 4 = 3x + 12°$
$\angle 5 = 4x + 15°$
$\angle 6 = 2x + 18°$ Hallar "x"



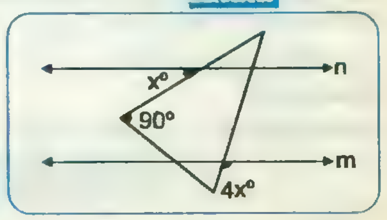
Resolución:

Aplicando la Propiedad **(v)**: $\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}=\hat{2}+\hat{4}+\hat{6}$

Donde: $(2x + 5°) + (2x + 15°) + (4x + 15°) + (2x + 10°) = (3x + 12°) + (2x + 18°)$

➡ $8x + 35° = 7x + 40°$ ➡ $\therefore$ $x = 5°$ **Rpta.**

Ejercicio 7 : Si el triángulo rectángulo es isósceles y m // n; Halle el valor de "x".



Resolución:

Recuerda

En un triángulo rectángulo isósceles sus ángulos agudos miden 45° cada uno.

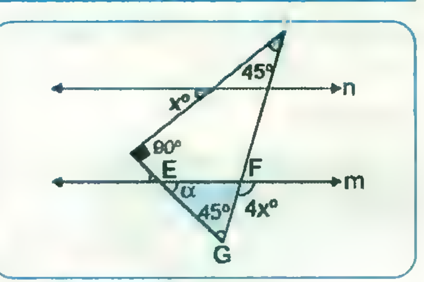
En el ΔEFG:

$\alpha + 45° = 4x$ (Por ángulo exterior)

$\alpha = 4x° - 45°$ ....(1)

Aplicando la propiedad (V)

$x° + \alpha = 90°$ ....(2)



Reemplazamos **(1)** en **(2)**

$x° + 4x° - 45° = 90°$ ➡ $5x = 135°$ ➡ $5x° = 27°$ **Rpta.**

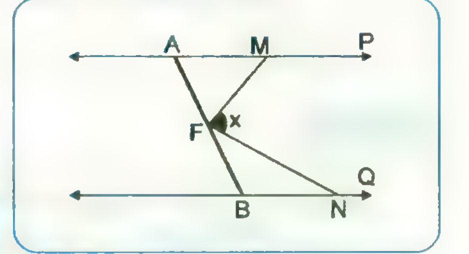
Ejercicio ⑧ : Según la figura: P//Q
AM = AF y BF = BN

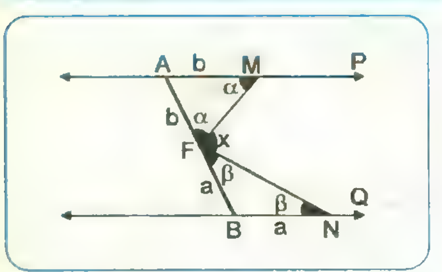
- Halle la $m\angle MFN$

Resolución:

Recuerda que:

En un triángulo isósceles dos de sus lados son congruentes y la medida de sus ángulos opuestos respectivos son iguales.





Δ AMF es isósceles siendo:

AM = AF = b

También el Δ FBN es isósceles, siendo

BF = BN = a

Aplicando la propiedad **(V)**:

$x = \alpha + \beta$ ...(1)

De la figura: ➡ $\alpha + x + \beta = 180°$

$(\alpha + \beta) + x = 180°$ ...(2)

Reemplazamos (1) en (2): $x + x = 180°$

➡ $2x = 180°$ ➡ $x = 90°$ ➡ $m\angle MFN = 90°$ **Rpta.**

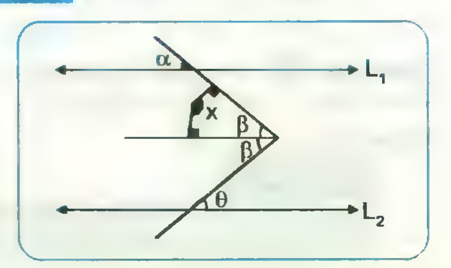
Ejercicio ⑨ : Según la figura el suplemento de $(\alpha + \theta)$ es 80 y $L_1 // L_2$

- Hallar el ángulo "x"

Resolución:

Del enunciado: $180° - (\alpha + \theta) = 80°$

$\therefore$ $(\alpha + \theta) = 100°$ ...(1)



Aplicando la propiedad **(V)**, obtenemos:

$$2\beta = \alpha + \theta \qquad ....(2)$$

Reemplazamos **(1)** en **(2)**:

$$2\beta = 100° \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 50°}$$

En el cuadrilátero Achurado:

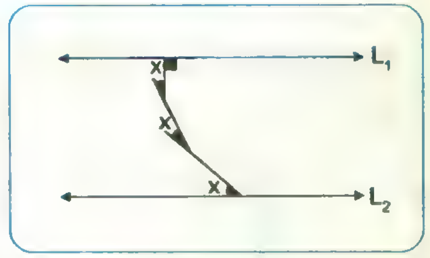
Por la propiedad (II):

$$90° + x + 90° + \beta = 360° \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + \beta = 180°} \qquad ....(3)$$

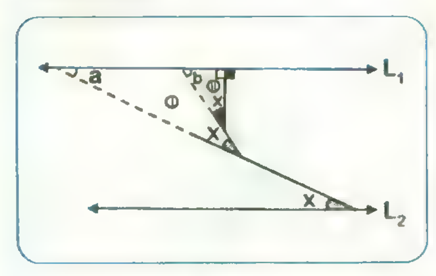
Reemplazamos el valor de "β" en (3):

$$\Rightarrow \quad x + 50° = 180° \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 130°}$$ **Rpta.:**

Ejercicio (10): En la siguiente figura: $L_1 // L_2$. Hallar x



Resolución:



- Luego de realizar las prolongaciones indicadas, tenemos que:

$$\boxed{a = x}$$

(por ser ángulos alternos internos)

- En el Δ (I) por el teorema del ángulo exterior: $b = a + x$

$$\Rightarrow \quad b = x + x \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 2x}$$

- En el ◺ (II), los tres ángulo deben de sumar 180°: $b + x + 90° = 180°$

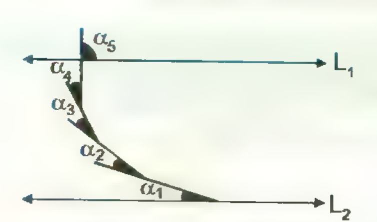
Pero b = 2x, entonces: $2x + x + 90° = 180°$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 30°}$$

Rpta.

REGLA PRÁCTICA

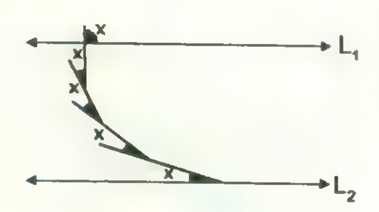
En este tipo de problema siempre se cumple que; si $L_1 // L_2$:



$$\alpha°_1 + \alpha°_2 + \alpha°_3 + \ldots\ldots \alpha°_n = 180°$$

Ejemplos: Hallar "x": si $L_1 // L_2$

A)



Resolución

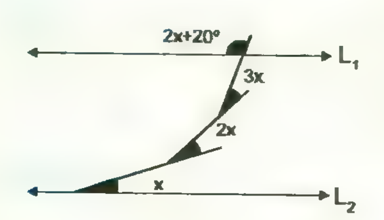
$$x + x + x + x + x = 180°$$

$$5x = 180°$$

$$x = 36°$$

Rpta.

B)



Resolución

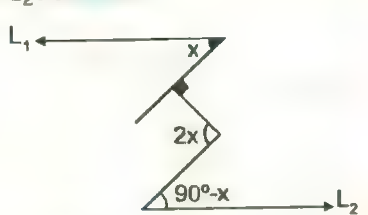
$$x + 2x + 3x + (2x + 20) = 180°$$

$$8x = 180° - 20°$$

$$x = 20°$$ **Rpta.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 19

Ejercicio 1 : En la figura mostrada $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$. Calcular "x"



Resolución:

Según la propiedad V:

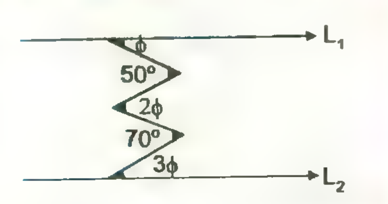
$x + 2x = 90^\circ + (90^\circ - x)$

$\Rightarrow 3x = 180^\circ - x$

$\Rightarrow 4x = 180^\circ$

Rpta. $\therefore$ $x = 45^\circ$

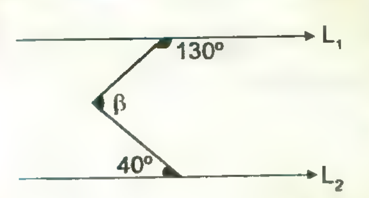
Ejercicio 2 : Siendo $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$, calcular "$\phi$"



Resolución:

Rpta. $\therefore$ $\phi = 20^\circ$

Ejercicio 3 : Siendo $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$. Calcular "$\beta$".



Resolución:

Rpta. $\therefore$ $\beta = 90^\circ$

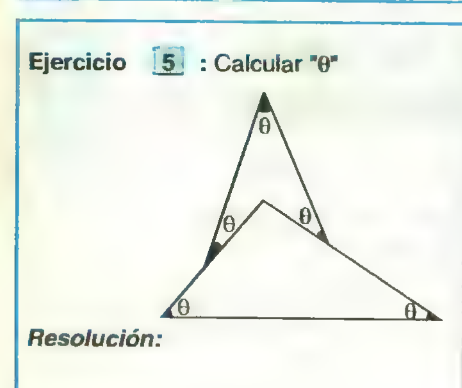
Ejercicio 4 : En el gráfico adjunto, Calcular "α"

B
φ φ
60º α 80º
A D C

Resolución:

Rpta. $\therefore$ $\alpha = 80^\circ$

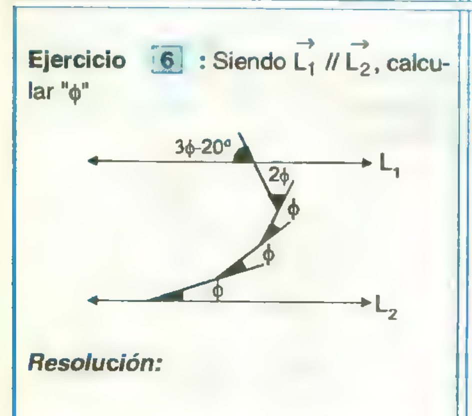
Ejercicio 5 : Calcular "θ"



Resolución:

Rpta. $\therefore$ $\theta = 36^{\circ}$

Ejercicio 6 : Siendo $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular "$\phi$"



Resolución:

Rpta. $\therefore$ $\phi = 25^{\circ}$

Ejercicios 7 : En la figura, $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ y $\overrightarrow{L_3} // \overrightarrow{L_4}$. Calcular el valor de "$\alpha$"

Resolución:

Rpta. $\therefore$ $\alpha = 12^{\circ}$

Ejercicio 8 : Según el gráfico: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$; $\alpha + \beta + \theta + \gamma = 140^{\circ}$. Calcular el valor de x°

Resolución:

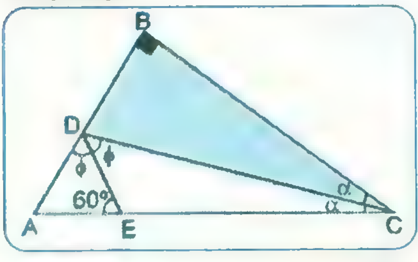
Rpta. $\therefore$ $x = 130^{\circ}$

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO IBM

Problema 1 : En el triángulo rectángulo ABC, hallar "ϕ".

A) 30° **B)** 40° **C)** 50°
D) 60° **E)** 70°

Resolución:



- Aplicamos el teorema del ángulo exterior:

En el Δ DBC: $2\phi = 90° + \alpha$
En el Δ EDC: $\alpha + \phi = 60°$

Σ MAM $\quad \cancel{\alpha} + 3\phi = 150° + \cancel{\alpha}$

$3\phi = 150° \quad \therefore \quad \boxed{\phi = 50°}$ **Rpta.:C**

Problema 2 : En la figura $\overrightarrow{L_1} \,//\, \overrightarrow{L_2}$ Hallar "α"

A) 6° **B)** 7° **C)** 8° **D)** 10° **E)** 15°

Resolución:

- Aplicando la propiedad de ángulos entre paralelas:

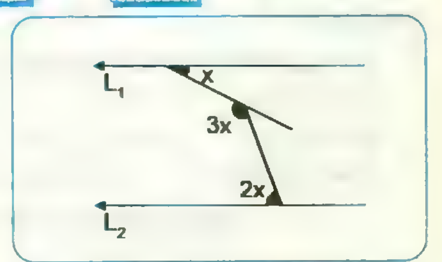
Σ de ángulos dirigidos a un lado = Σ de ángulos dirigidos al otro lado

Tenemos lo siguiente: $5\alpha + 4\alpha + 3\alpha + 2\alpha + \alpha = 45° + 30° + 20° + 10°$

$\boxed{15\alpha = 105°} \rightarrow$ $\boxed{\alpha = 7°}$ **Rpta.B**

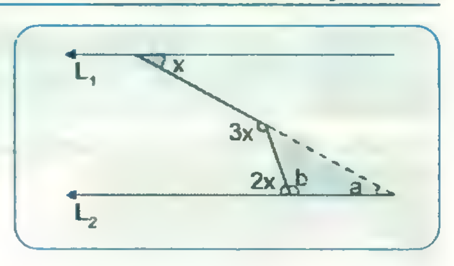
Problema 3 : En la figura: Calcular "x" sabiendo que $\overrightarrow{L_1} \,//\, \overrightarrow{L_2}$.

A) 15° **B)** 30° **C)** 45°
D) 50° **E)** 53°



Resolución

- Debemos prolongar líneas para formar triángulos. En el triángulo ABC.



$a = x$ ... Por ser ∠s alternos internos

➡ $2x + b = 180°$

$b = 180° - 2x$ ... ángulos adyacentes suplementarios

- Pero por la propiedad del ángulo exterior:

$3x = b + a$

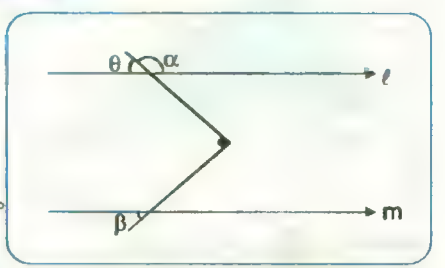
Sustituyendo $a = x$ y $b = 180 - 2x$, tenemos:

➡ $3x = 180° - 2x + x$ ➡ $4x = 180°$ ➡ $x = 45°$ **Rpta. C**

Problema 4 En la figura $\alpha + \beta = 150°$

$\vec{\ell} // \vec{m}$ θ"

A) 60° **B)** 40° **C)** 45° **D)** 30° **E)** 37°



Resolución:

- De la figura se deduce que: $\theta + \beta = 90°$

Por la propiedad de ∠s entre paralelas:

"Suma de ángulos a la izquierda" = "Suma de ángulos a la derecha"

- Por ser θ y α ángulos suplementarios:

$\theta + \alpha = 180^{\circ}$

- Resolviendo:

$$\begin{cases} \theta + \beta = 90^{\circ} & ...(I) \\ \theta + \alpha = 180^{\circ} & ...(II) \end{cases}$$

Como por dato sabemos que $\alpha + \beta = 150°$, entonces nos conviene sumar miembro a miembro las ecuaciones **I** y **II**.

Σ MAM: **I** + **II**: $\underbrace{\theta + \theta} + \underbrace{\alpha + \beta} = 90° + 180°$

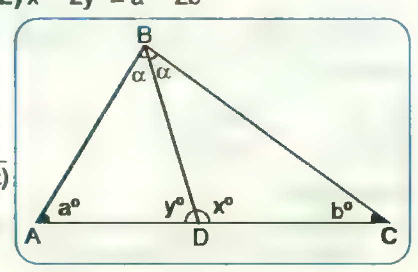
$2\theta + 150° = 270°$

$2\theta = 120°$

$\theta = 60°$ **Rpta.: A**

Problema 5 : En la figura, indicar la propiedad que se cumple:

A) $x° + y° = a° + b°$ **B)** $x° - y° = b° - a°$
C) $x° - y° = a° + b°$ **D)** $x° - y° = a° - b°$
E) $x° - 2y° = a° - 2b°$



Resolución:

- Por la propiedad del ángulo exterior:

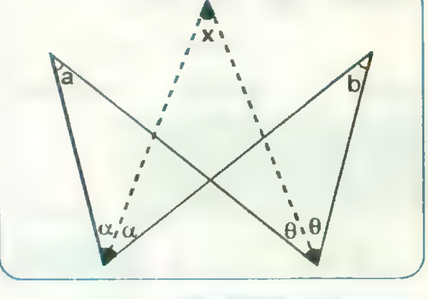
En el Δ ABD: $x° = a° + \alpha$ (I)

En el Δ DBC: $y° = b° + \alpha$ (II)

Restando M.A.M: $x° - y° = (a + \alpha) - (b + \alpha)$

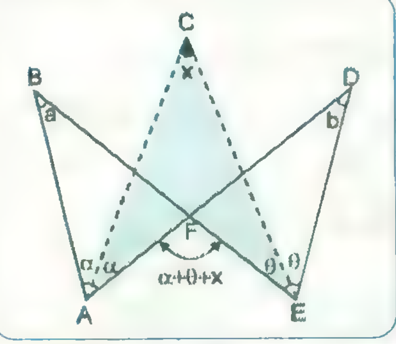
∴ $x° - y° = a° - b°$ **Rpta. D**

Problema 6 : Deducir una fórmula para calcular "x" en términos de los ángulos "a" y "b".



A) $x = a° + b°$ **B)** $x = (a°+b°)/2$
C) $x = (a° + b°)/3$ **D)** $x = (a° + b°)/4$
E) $x = 90° - (a° + b°)$

Resolución:



- En el ⊿ACEF: $m\angle AFE = \alpha + \theta + x$
- Por la propiedad del ángulo exterior:

En el Δ ABF: $\alpha + \theta + x = 2\alpha + a$ **(1)**

En el Δ FDE: $\alpha + \theta + x = 2\theta + b$ **(2)**

- Sumando miembro a miembro **(1) + (2)**

$$2\alpha + 2\theta + 2x = 2\alpha + 2\theta + a + b$$

Cancelando nos queda:

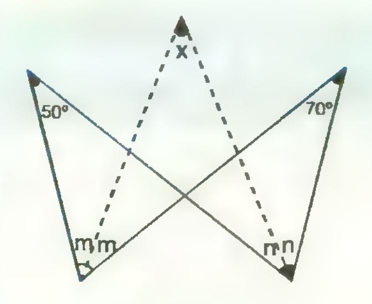
$$2x = a° + b°$$

$$\therefore \; x = \frac{a° + b°}{2}$$ **Rpta. B** ***(Fórmula)***

Observación:

Con esta fórmula podemos resolver directamente ejercicios similares al problema 6. Veamos:

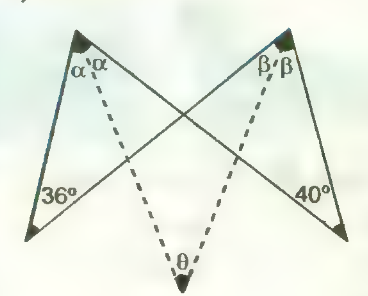
A) Calcular "x"



Resolución:

$$x = \frac{50° + 70°}{2} = 60°$$ **Rpta.**

B) Calcular "θ"



Resolución:

$$\theta = \frac{36° + 40°}{2} = 38°$$ **Rpta.**

Problema 7 : Si: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$

Hallar : $x + y + z$

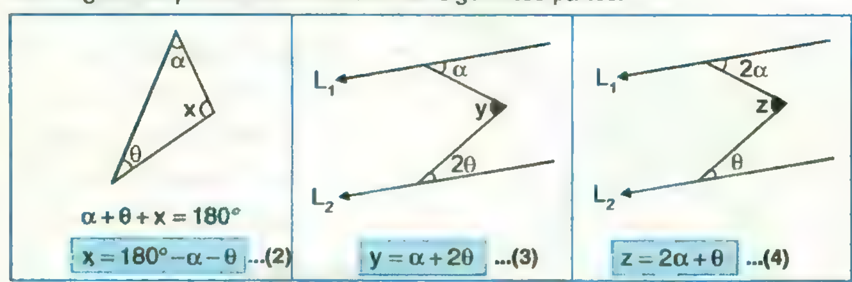
A) 200° B) 250° C) 300°
D) 350° E) 400°

Resolución:

♣ Por ángulos conjugados internos:

$3\alpha + 3\theta = 180°$ ➡ $\boxed{\alpha + \theta = 60°}$ ...(1)

♣ De la figura del problema extraemos las siguientes partes:



$\alpha + \theta + x = 180°$

$\boxed{x = 180° - \alpha - \theta}$ ...(2) $\boxed{y = \alpha + 2\theta}$ ...(3) $\boxed{z = 2\alpha + \theta}$ ...(4)

♣ **$\sum$ M.A.M: (2) + (3) + (4), tenemos:** $x + y + z = (180° - \alpha - \theta) + (\alpha + 2\theta)\ (2\alpha + \theta)$

$$x + y + z = 180° + 2(\alpha + \theta)$$

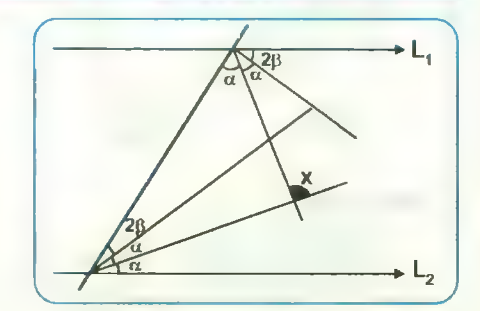
Reemplazando (1) : $\alpha + \theta = 60°$, nos queda: $x + y + z = 180° + 2(60°)$

Finalmente: $\boxed{x + y + z = 300°}$ **Rpta. C**

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA
Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Problema 1 : Si $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$, calcular "x"

A) 90° B) 72°
C) 60° D) 100°
E) 120°



Resolución:

- En el Δ ABC, por el teorema del ángulo exterior:

  ➠ $x = 2(\alpha + \beta)$ ...(1)

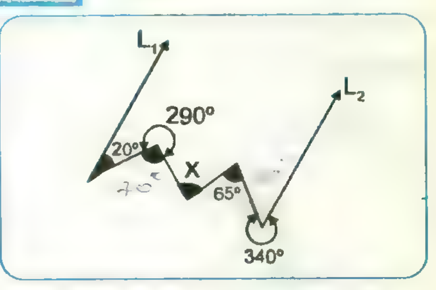
- Por ángulos conjugados internos:

  $(2\alpha + 2\beta) + (2\alpha + 2\beta) = 180°$

  ➠ $\alpha + \beta = 45°$ ...(2)

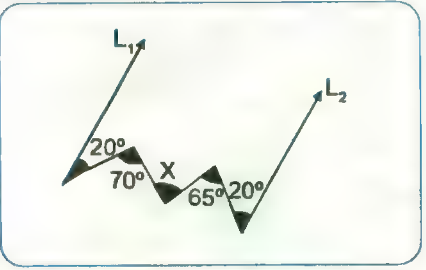
♣ **Reemplazando (2) en (1)** $x = 2(45°) = 90°$ **Rpta. A**

Problema 2 : En la figura: $\overrightarrow{L_1} \,//\, \overrightarrow{L_2}$ calcular "x"



A) 60° B) 75° C) 85° D) 95° E) 105°

Resolución:

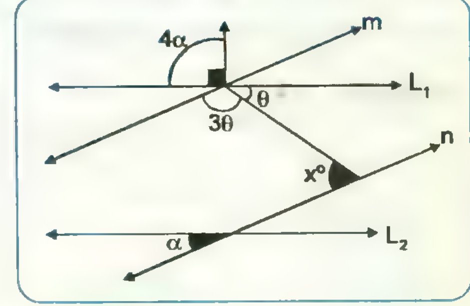


- Por propiedad.

  $20° + x + 20° = 70° + 65°$

  $\therefore$ $x = 95°$ **Rpta. D**

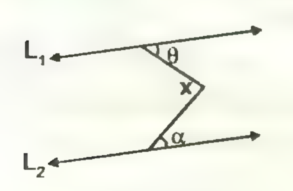
Problema 3 : En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{n}$. Calcular x.

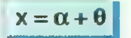


A) 62,5° B) 67,5° C) 43,5°
D) 45° E) 80°

Resolución:

- Por propiedad.



➠  $x = \alpha + \theta$ ...(1)

- Por propiedad de los ángulos de lados paralelos

  $4\alpha - 90° = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 30°}$ ...(2)

- *Por ángulo llano:*

  $(4\alpha - 90°) + 3\theta + \theta = 180°$

  $4(30°) - 90° + 40\theta = 180°$

  $\Rightarrow \boxed{\theta = 37{,}5°}$ ...(3)

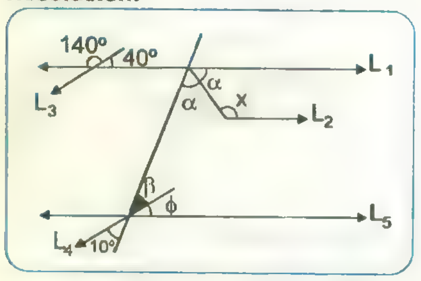
Finalmente reemplazamos (2) y (3) en (1)

$x = 30° + 37{,}5° \Rightarrow \boxed{x = 67{,}5°}$ **Rpta.: B**

Problema 4 : Si: $\overrightarrow{L_1} \,//\, \overrightarrow{L_2} \,//\, \overrightarrow{L_5}$ y $\overrightarrow{L_3} \,//\, \overrightarrow{L_4}$, Calcular "x"

A) 140° **B)** 115° **C)** 130° **D)** 100° **E)** 90°

Resolución:



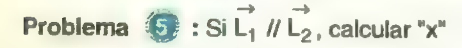
- Por ∠s opuestos por el vértice: $\boxed{\beta = 10°}$

  Por ∠s de lados paralelos $\boxed{\phi = 40°}$

- Por ∠s conjugados internos:

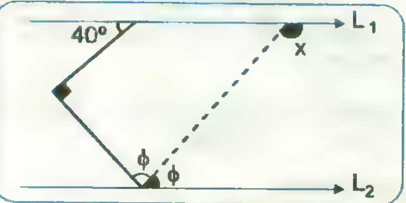
- $2\alpha + \beta + \phi = 180° \Rightarrow 2\alpha + 10° + 40° = 180° \Rightarrow \boxed{\alpha = 65°}$

•• $\alpha + x = 180° \Rightarrow 65° + x = 180° \Rightarrow \boxed{x = 115°}$ **Rpta.: B**

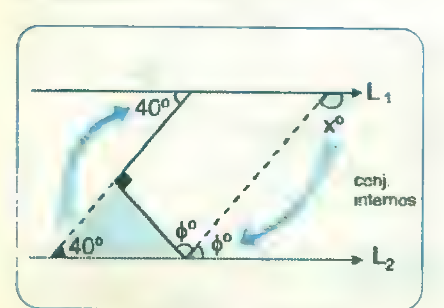


Problema 5 : Si $\overrightarrow{L_1} \,//\, \overrightarrow{L_2}$, calcular "x"

A) 65° **B)** 130° **C)** 115° **D)** 120° **E)** 160°



Resolución:



Primero debemos de calcular "φ", por el teorema del ∠exterior en el Δ sombreado

$2\phi = 90° + 40° \Rightarrow \boxed{\phi = 65°}$

Por ángulos conjugados internos:

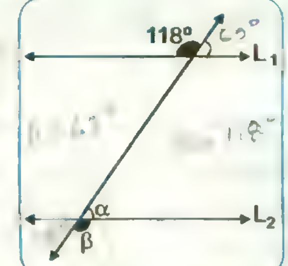
$x + \phi = 180° \Rightarrow x + 65° = 180°$

$\Rightarrow \boxed{x = 115°}$ **Rpta. C**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE

NIVEL I

Ejercicio 1 : En la figura $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ Hallar el valor de "α" y "β"

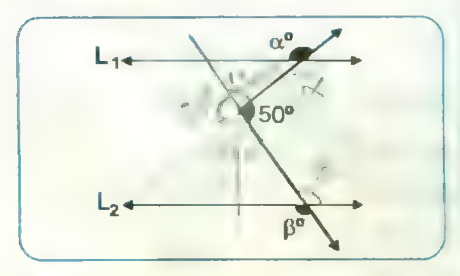


A) 62° y 108°
B) 72° y 108°
C) 52° y 138°
D) 62° y 118°
E) 52° y 118°

Ejercicio 2 : Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante, el mayor de los ángulos conjugados mide 5 veces el menor. ¿Cuánto mide el mayor ángulo correspondiente?

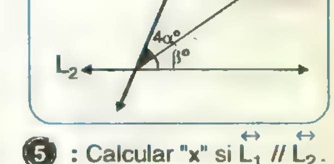
A) 120° B) 140° C) 150°
D) 130° E) 110°

Ejercicio 3 : En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar (α + β)



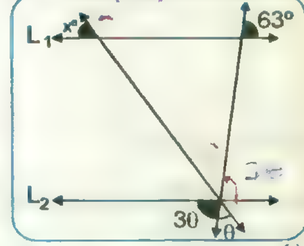
A) 300° B) 310° C) 320°
D) 290° E) 280°

Ejercicio 4 : En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular el valor del ángulo "x".



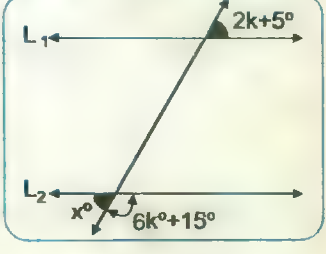
A) 45°
B) 15°
C) 36°
D) 22°
E) 20°

Ejercicio 5 : Calcular "x" si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



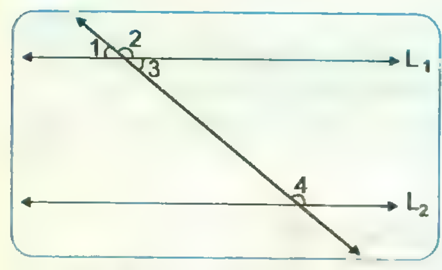
A) 84°
B) 96°
C) 104°
D) 106°
E) 95°

Ejercicio 6 : Calcular "x", siendo $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



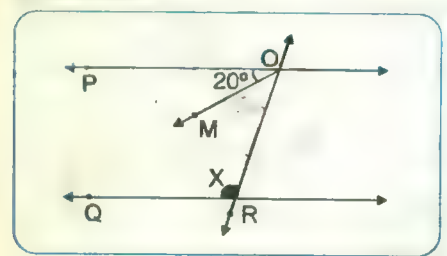
A) 22,5°
B) 30°
C) 45°
D) 36°
E) 60°

Ejercicio 7 : En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, si: El ángulo 1 mide 5α y el ángulo 4, mide 13α. Hallar las medidas de los ángulos 2 y 3.



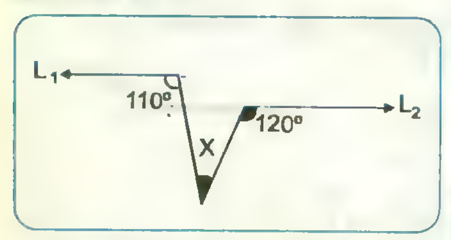
A) 130° y 50°
B) 140° y 40°
C) 150° y 30°
D) 120° y 60°
E) 110° y 70°

Ejercicio 8 : En la figura: $\overleftrightarrow{P} // \overleftrightarrow{Q}$, $\overrightarrow{OM}$ Es bisectriz del: ∠POR. Hallar "x" si $m\hat{POM} = 20°$



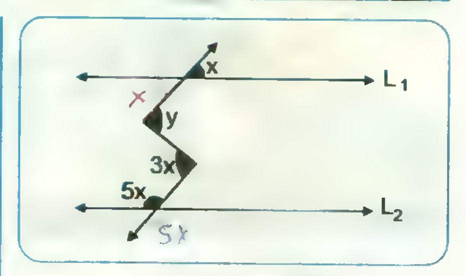
A) 160°
B) 150°
C) 130°
D) 140°
E) 120°

Ejercicio 9 : En la figura $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar el valor de "x".



A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

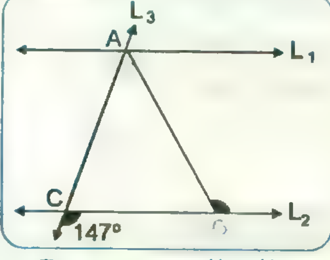
Ejercicio 10 : En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar el valor de "x"; Si 3x + y = 180°



A) 20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 36°

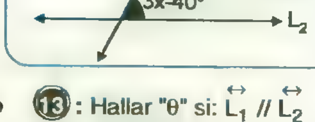
Ejercicio 11 : Siendo: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y AB ⊥ $\overleftrightarrow{L_3}$ el ángulo "x" mide:

A) 103°
B) 157°
C) 143°
D) 133°
E) 123°



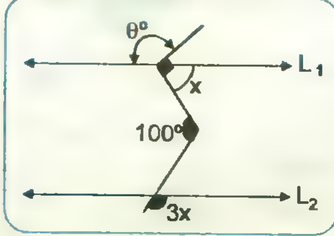
Ejercicio 12 : En la figura $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, entonces el valor de "y" es:

A) 72°
B) 85°
C) 92°
D) 80°
E) 73°

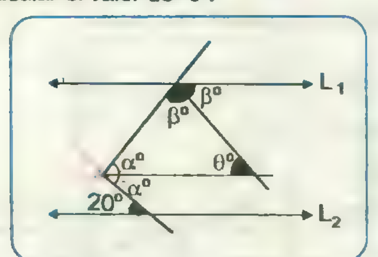


Ejercicio 13 : Hallar "θ" si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

A) 130°
B) 140°
C) 120°
D) 100°
E) 110°



Ejercicio 14: En la figura $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular el valor de "θ".



A) 130° B) 80° C) 120°
D) 100° E) 110°

Ejercicio 15: Calcular "x", Si $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ángulo AOB; $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{L_1}$

A) 80° B) 90° C) 100°
D) 110° E) 120°

Clave de Respuestas

1. D	5. B	9. D	13. A
2. C	6. C	10. C	14. B
3. B	7. A	11. E	15. C
4. C	8. D	12. D	

NIVEL II

Ejercicio 1: De dos ángulos conjugados externos entre paralelas uno de ellos excede al otro en 50°, uno de dichos ángulos mide:

A) 55° B) 65° C) 50° D) 105° E) 75°

Ejercicio 2: Dos rectas paralelas al ser intersectadas por una secante forman dos ángulos conjugados internos cuyos valores se expresan por: 2x - 10° y 4x - 20°. ¿Cuánto mide el menor de ellos?

A) 120° B) 60° C) 80° D) 40° E) 50°

Ejercicio 3: Los ángulos E y F son conjugados externos entre paralelas. Sus medidas en grados son: E = 2x + 18°; F = x + 12°. Por lo tanto: E - 2F + 4x es:

A) 118° B) 62° C) 149°
D) 194° E) 200°

Ejercicio 4: Dos rectas paralelas son intersectadas por una secante, dos ángulos conjugados externos son entre sí como: 7 es a 11. ¿Cuánto mide el ángulo conjugado menor?

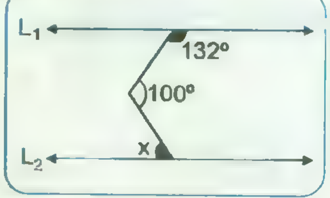
A) 30° B) 60° C) 70°
D) 90° E) 110°

Ejercicio 5: Dos ángulos conjugados internos entre rectas paralelas son tales que si al menor se le disminuyen en 12° para agregarle al mayor, este último ángulo mide el doble de lo que queda del menor. La medida en radianes del ángulo mayor es:

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2}{3}\pi$ C) $\frac{3}{5}\pi$ D) $\frac{4}{9}\pi$ E) $\frac{2}{9}\pi$

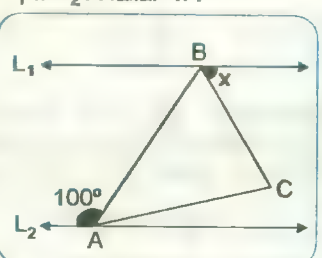
Ejercicio 6 : En la figura mostrada: $\overrightarrow{ON} // \overrightarrow{AM}$. Halle el valor de "x".

A) 110°
B) 117°
C) 144°
D) 126°
E) 135°



Ejercicio 7 : En la figura mostrada: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$. Hallar "x".

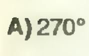
A) 32°
B) 52°
C) 48°
D) 62°
E) 78°



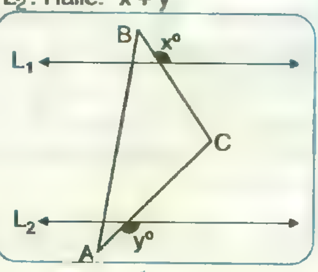
Ejercicio 8 : El triángulo ABC, es equilátero; $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$. Hallar "x".

A) 30°
B) 40°
C) 20°
D) 60°
E) 50°

Ejercicio 9 : Siendo el Δ ABC equilátero y $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$. Halle: "x + y"

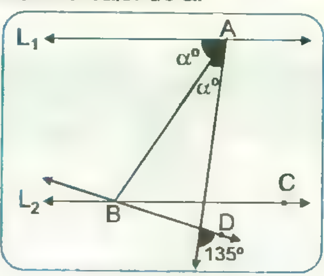


A) 270°
B) 300°
C) 220°
D) 320°
E) 400°



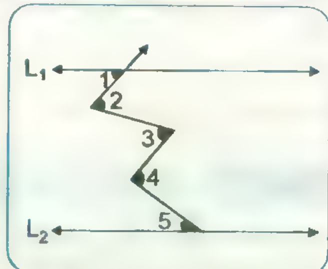
Ejercicio 10: Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, $m\angle ABC = m\angle CBD$. Calcular el valor de α.

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 5°

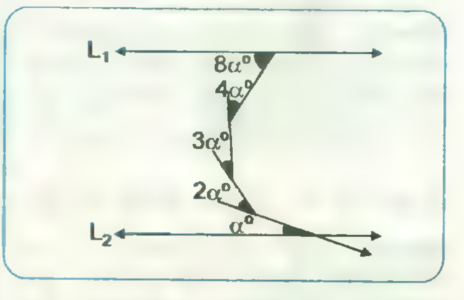


Ejercicio 11: En la figura mostrada: La disposición de los ángulos: 1,2,3,4 están en progresión aritmética de razón 20º. Calcular la medida del ángulo 5. Si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 80°

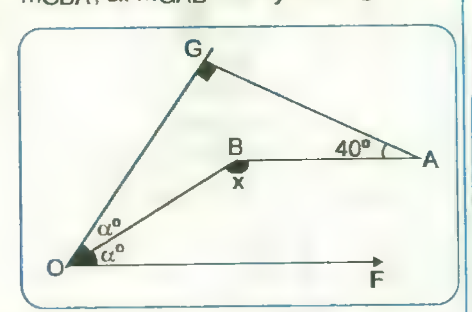


Ejercicio 12: En la figura. Calcular el valor de "α". Si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.



A) 5° B) 10° C) 12° D) 15° E) 18°

Ejercicio 13: En la figura. Hallar: $m\angle OBA$, si: $m\angle GAB = 40°$ y $\overline{BA} \parallel \overrightarrow{OF}$



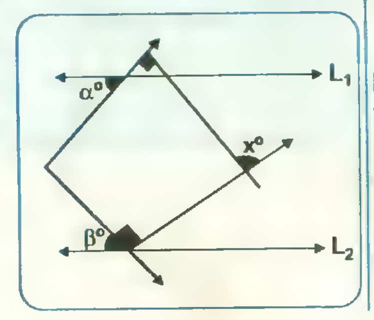
A) 130° B) 160° C) 155°
D) 140° E) 145°

Ejercicio 14: En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\vec{m} \parallel \vec{n}$. Hallar x.

A) 120°
B) 60°
C) 90°
D) 30°
E) 75°

Ejercicio 15: En la figura mostrada: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; $\alpha + \beta = 80°$. Hallar x

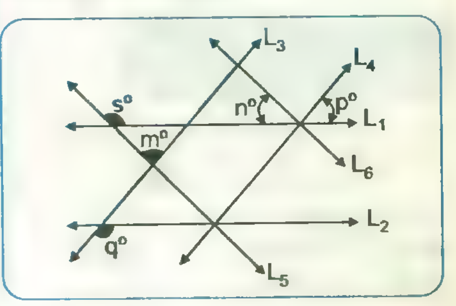
A) 50°
B) 60°
C) 80°
D) 90°
E) 75°



Ejercicio 16: En la figura:

$$\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} : \overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4} : \overleftrightarrow{L_5} \parallel \overleftrightarrow{L_6}$$

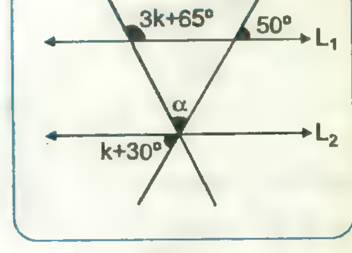
Entonces se cumple:



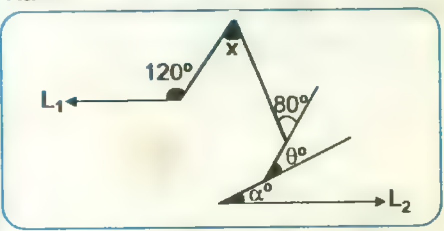
A) $m° + p° = 180°$ B) $m° + p° + n° = 180°$
C) $n° = p°$ D) $s° + p° = 180°$
E) $q° + n° = 180°$

Ejercicio 17: Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar: α

A) 65°
B) 75°
C) 60°
D) 50°
E) 80°

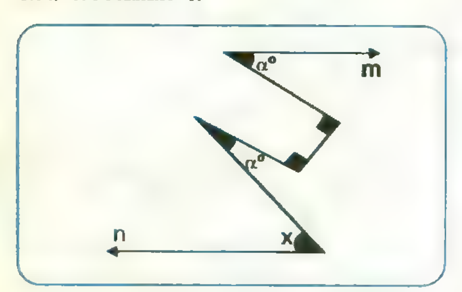


Ejercicio 18: Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\alpha + \theta = 50°$. Hallar x.



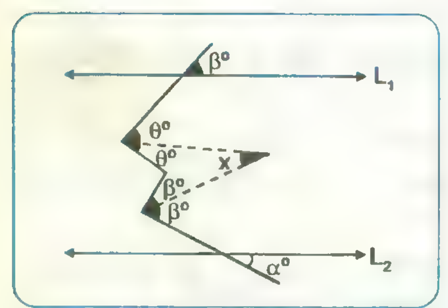
A) 40° B) 50° C) 70° D) 60° E) 65°

Ejercicio 19 : En el gráfico mostrado $\vec{m} \parallel \vec{n}$. Hallar: "x"



A) α B) 2α C) 90° - α
D) 90° - 2α E) 90°

Ejercicio 20 : En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular "x"

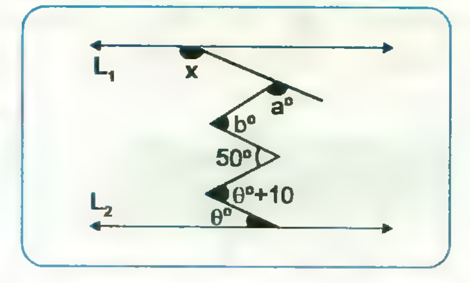


A) θ° - α° B) α° - θ° C) α° + θ°

D) $\dfrac{\alpha° + \theta°}{2}$ E) $\dfrac{\theta° - \alpha°}{2}$

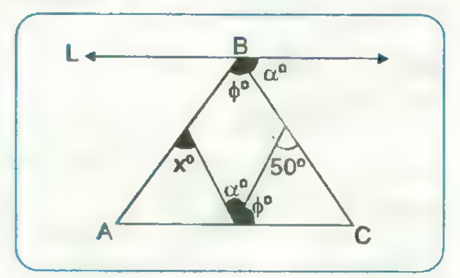
Ejercicio 21 : Calcular "x" si:

$a° + b° = 170°$ y $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



A) 120° B) 130° C) 140°
D) 150° E) 160°

Ejercicio 22 : En la figura: $\vec{L} \parallel \overline{AC}$. Calcular: "x"



A) 110° B) 120° C) 50°
D) 80° E) 100°

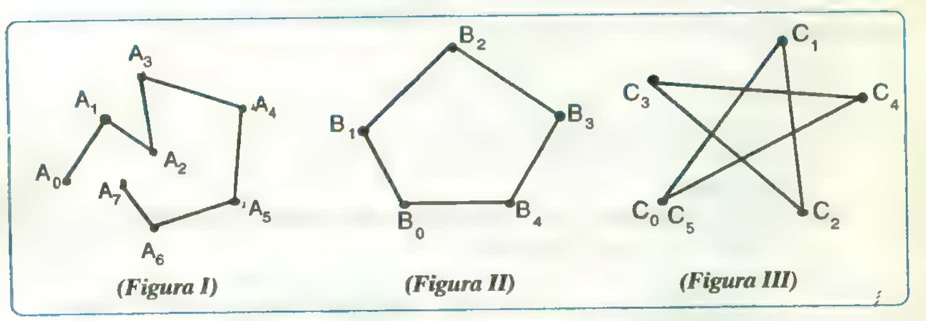
Clave de Respuestas

1. B	7. B	13. C	19. B
2. B	8. B	14. A	20. A
3. D	9. B	15. C	21. B
4. C	10. B	16. B	22. D
5. C	11. C	17. B	
6. C	12. B	18. C	

Polígonos

5.1 LÍNEA QUEBRADA:

Es la unión de segmentos no colineales, en la cual el extremo de cada segmento es el comienzo del siguiente.



(Figura I) (Figura II) (Figura III)

Los segmentos que forman la *línea quebrada* se llaman lados de la misma. Una línea quebrada es cerrada si el extremo de su último lado coincide con el origen de su primer lado. (Figuras II y III).

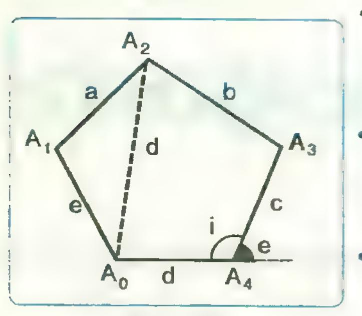
Una línea quebrada es simple si cada uno de sus lados tiene sólo un punto común con el otro lado (Figuras I y II).

5.2 POLÍGONO:

Se llama así a una línea quebrada cerrada simple (situada toda ella en un plano). (Figura II).

- La línea quebrada se denomina **frontera** del polígono.
- Los lados de la frontera se llaman **lados** del polígono.
- Los puntos de intersección de los lados son los **vértices** del polígono.

Por otra parte; el número de lados de un polígono es igual al número de sus vértices. (figura IV).



(Figura IV)

Diagonal: $\overline{A_0A_2} = d$
Perímetro(2P): a + b + c + d + e

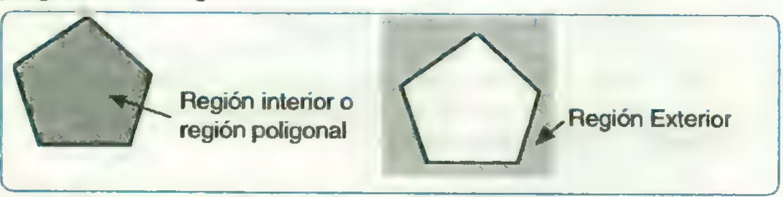
- ***Diagonal (d)***, de un polígono, es el segmento que une dos vértices no contiguos del mismo.
(contiguos: significa lados consecutivos).
- ***Perímetro (P)***, de un polígono es la suma de las longitudes de todos los lados del mismo es decir, la longitud de la frontera del polígono.
- **Ángulo interior o interno** (∠ i), de un polígono, es el ángulo convexo formado por dos lados contiguos de dicho polígono.
- **Ángulo exterior o externo** (∠ e), de un polígono. Es el ángulo adyacente suplementario a un ángulo interior del mismo polígono.

5.2.1 REGIONES DE UN POLÍGONO:

Un polígono divide al plano en dos regiones:

a) **Región interior.-** Es el conjunto de puntos pertenecientes al interior del polígono. A esta región interior de un polígono se le denomina **Región Poligonal.**

b) **Región exterior.-** Es el conjunto de puntos del plano que no pertenecen al polígono ni a su región interior.



5.2.2 CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS:

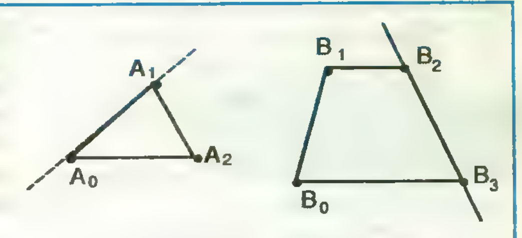
1. **Por el número de ángulos (o de lados):**

Nombre	Lados	Nombre	Lados
Triángulo	3	Eneágono	9
Cuadrilátero	4	Decágono	10
Pentágono	5	Undecágono	11
Hexágono	6	Dodecágono	12
Heptágono	7	Pentadecágono	15
Octógono	8	Icoságono	20

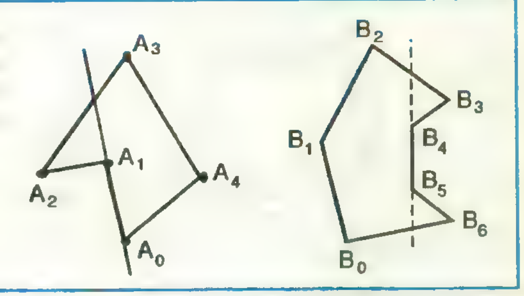
Nota: *A los otros polígonos se nombran diciendo polígono de 13 lados, polígono de 14 lados, polígono de 16 lados, etc.*

2. **Por su convexidad:**

- **Polígono convexo:** Es aquel que al prolongar cualquiera de sus lados, todo el polígono se encuentra hacia un mismo lado de la recta, en lo sucesivo sólo nos referiremos a polígonos convexos.

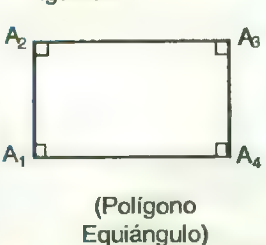


- **Polígono no convexo o cóncavo:** Es aquel que al prolongar uno de sus lados el polígono es dividido en dos partes.



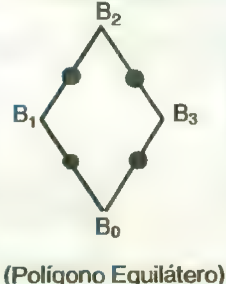
3. **Por la igualdad de sus ángulos (o lados):**

- **Polígono Equiángulo:** Es aquel que tiene todos sus ángulos iguales.



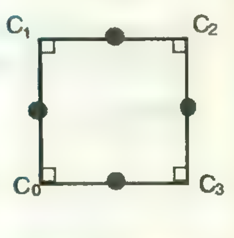
(Polígono Equiángulo)

- **Polígono Equilátero:** Es aquel que tiene todos sus lados iguales.



(Polígono Equilátero)

- **Polígono Regular:** Es aquel que es equilátero y equiángulo a la vez.



(Polígono Regular)

Nota: *Un polígono es* ***irregular****, cuando no es regular.*

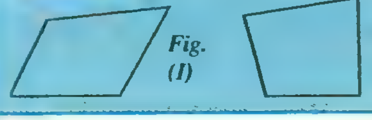


Fig. (I)

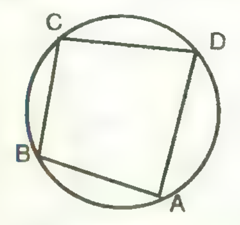
Fig. (II)

Fig. (III)

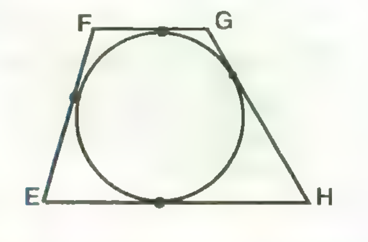
(Las figuras I, II y III son polígonos irregulares).

4. **Por su relación con la circunferencia:**

- **Polígono inscrito:** Es aquel en que todos sus vértices pertenecen a la misma circunferencia; y la circunferencia se llama circunscrita al polígono.
  - Polígono ABCD, inscrito en la circunferencia o
  - Circunferencia circunscrita al polígono ABCD.



- **Polígono circunscrito:** Es aquel que tiene todos sus lados tangentes a la misma circunferencia y la circunferencia se denomina inscrita en el polígono.
  - Polígono EFGH, circunscrito a la circunferencia y circunferencia inscrita en el polígono EFGH.



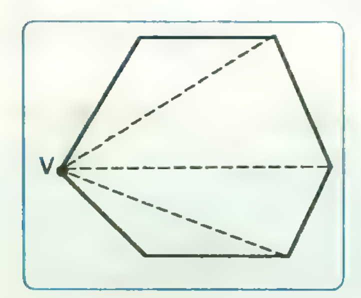
5.2.3 PROPIEDADES:

PROPIEDAD I : Desde un vértice de un polígono de n lados, se trazan (n - 3) diagonales.

(Fórmula) $d = n - 3$ **Donde:** "n" representa el número de lados del polígono.

Ejemplo 1 : Calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un hexágono.

Resolución:



Como se observará del vértice "V" se han podido trazar 3 diagonales.

Si aplico la fórmula; resultará:

$$d = n - 3 \rightarrow d = 6 - 3 = 3$$

Rpta: # de diagonales trazadas desde un vértice de un hexágono es 3.

Ejemplo 2 : Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 8 diagonales desde un vértice:

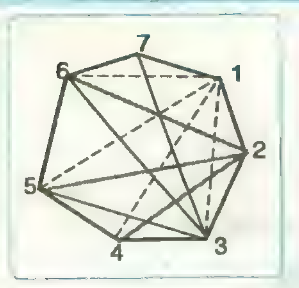
Resolución:

En la fórmula: $d = n - 3$, reemplazamos el valor de $d = 8$.

$$8 = n - 3 \rightarrow n = 11$$

Rpta: El polígono de 11 lados llamado undecágono.

PROPIEDAD II : En todo polígono el número de diagonales que se pueden trazar independientemente, de cada vértice, es el siguiente:



- del primer vértice se trazan → $(n-3)$ diagonales.
- del segundo vértice se trazan → $(n-3)$ diagonales.
- del tercer vértice se trazan → $(n-4)$ diagonales.
- del cuarto vértice se trazan → $(n-5)$ diagonales.
- del quinto vértice se trazan → $(n-6)$ diagonales.

⋮

y así sucesivamente:

"El número de diagonales que se pueden trazar desde "v" vértices consecutivos de un polígono de "n" lados, es:

$$d = n.v - \frac{1}{2}(v+1)(v+2)$$

(Fórmula)

Donde: d = diagonales parciales ;
v = vértices parciales
n = número de lados del polígono.

Ejemplo 3 : De cuatro vértices consecutivos de cierto polígono se han trazado 21 diagonales. Cuántos lados tiene el polígono?

Resolución:

- del primer vértice se trazan: $(n - 3)$ diagonales.
- del segundo vértice se trazan: $(n - 3)$ diagonales.
- del tercer vértice se trazan: $(n - 4)$ diagonales.
- del cuarto vértice se trazan: $(n - 5)$ diagonales.

Sumando se obtiene: $(n - 3) + (n - 3) + (n - 4) + (n - 5) = 21$

$$4n - 15 = 21$$

$$4n = 36 \quad \therefore \quad n = 9$$

Rpta: El polígono tiene 9 lados.

Otra forma:

Aplicando la fórmula: $d = n.v - \frac{1}{2}(v+1)(v+2)$

Donde: $d = 21$; $v = 4$; $n = ?$

Reemplazando valores en la fórmula se obtiene:

$$21 = n.4 - \frac{1}{2}(4+1)(4+2)$$

$$21 = 4n - 15 \rightarrow 4n = 36 \rightarrow \therefore \boxed{n = 9}$$ **Rpta.**

Ejemplo 4 : De 3 vértices consecutivos de cierto polígono convexo se han trazado 20 diagonales. Cuántos lados tiene el polígono?

Resolución:

Aplicando la fórmula: $d = n.v - \frac{1}{2}(v+1)(v+2)$

Donde: $d = 20$; $v = 3$; $n = ?$

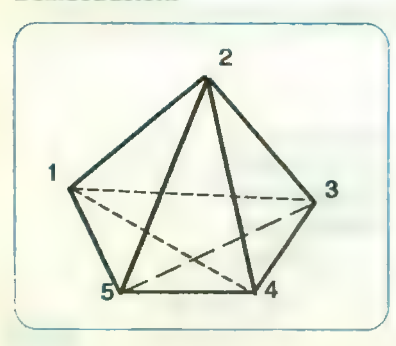
Reemplazando valores obtenemos: $20 = n.3 - \frac{1}{2}(3+1)(3+2)$

$$20 = 3n - 10 \Rightarrow 30 = 3n \quad \therefore \quad \boxed{n = 10}$$

Rpta.: El polígono tiene 10 lados.

PROPIEDAD III: El número total de diagonales de un polígono de "n" lados es: $N_D = \frac{n(n-3)}{2}$ ***(Fórmula)***

Demostración:

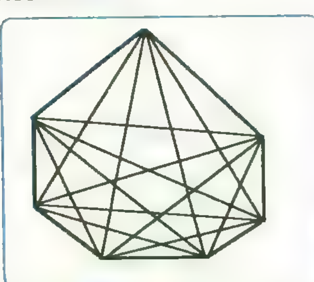


1) De cada vértice se pueden trazar (n - 3) diagonales, siendo "n" el número de vértices.
2) El número total de diagonales, será entonces: n(n - 3)
3) Pero, como cada diagonal se ha contado dos veces, el número real de diagonales será:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$ L.q.q.d

Ejemplo 5 : Calcular el número de diagonales que se pueden trazar de un heptágono.

Resolución:



De la fórmula: $N_D = \dfrac{n(n-3)}{2}$ Donde: n = 7

Reemplazando el valor de "n" en la fórmula, se tiene:

$$N_D = \frac{7(7-3)}{2} = \frac{7(4)}{2} = 14$$

Rpta.: El número de diagonales que se pueden trazar en un heptágono es 14.

Ejemplo 6 : Cuál es el polígono convexo en el que el número de diagonales es mayor en 88 que el número de lados.

Resolución:

Del enunciado: # de diagonales − # de lados = 88

$$\frac{n(n-3)}{2} - n = 88 \Rightarrow (n^2 - 3n) - 2n = 176$$

$$n^2 - 5n - 176 = 0$$

$$\begin{array}{ll} n & -16 \\ n & +11 \end{array}$$

$(n - 16)(n + 11) = 0$ **Donde:** i) $n - 16 = 0 \rightarrow n = 16$

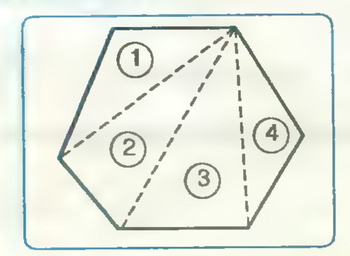
ii) $n + 11 = 0 \rightarrow n = -11$

- De los valores que toma "n" sólo tomamos el valor positivo ya que el número de lados de un polígono no puede ser negativo.

Rpta: Polígono de 16 lados

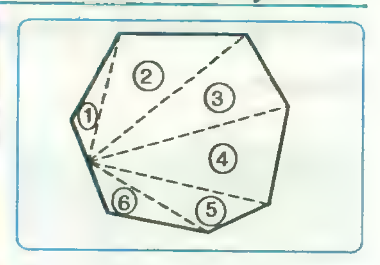
PROPIEDAD IV : Si trazamos diagonales a partir de un vértice, el polígono queda dividido en tantos triángulos como lados menos dos tenga el mismo.

de triángulos = n - 2



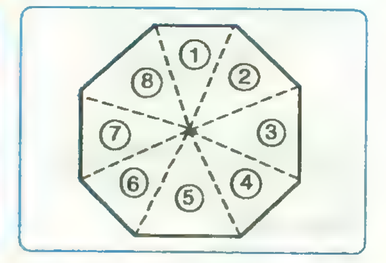
PROPIEDAD V : Al unir un punto cualquiera, perteneciente a uno de los lados del polígono, con los vértices del mismo, la figura queda dividida en tantos triángulos como lados menos uno tenga el polígono.

de triángulos = n - 1



PROPIEDAD VI : Al unir un punto interior de un polígono, con los vértices del mismo se forman tantos triángulos como lados tenga el polígono.

de triángulos = n



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE POLÍGONOS

Problema 1: Si el número de lados de un polígono disminuye en 3 el número de diagonales disminuye en 12. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Resolución:

Sea: n = # de lados del polígono inicial.

$$\# \text{ de diagonales} = \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{... (1)}$$

Si el número de lados del polígono disminuye en 3; este nuevo polígono tendrá: (n - 3) lados.

Luego: $$\# \text{ de diagonales} = \frac{(n-3)\left[(n-3)-3\right]}{2} = \frac{(n-3)(n-6)}{2} \quad \text{... (2)}$$

Del enunciado; planteamos la siguiente ecuación:

$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-3)(n-6)}{2} = 12$$

$$\frac{n(n-3)-(n-3)(n-6)}{2}=12$$

$$(n^2-3n)-(n^2-9n+18)=24$$

$$6n-18=24 \rightarrow 6n=42 \quad \therefore \quad \boxed{n=7}$$

Rpta: El polígono tiene 7 lados.

Problema 2: Determinar el número total de diagonales de un polígono, si de 3 vértices consecutivos, sólo pueden trazarse 26 diagonales.

Resolución:

Datos: $v=3$ y $d=26$

a) Aplicando la fórmula: $\boxed{d=v.n-\frac{(v+1)(v+2)}{2}}$; obtenemos:

$$26=3.n-\frac{(3+1)(3+2)}{2} \Rightarrow 26=3n-10$$

$$36=3n \quad \therefore \quad \boxed{n=12}$$

b) Calculamos el número total de diagonales; aplicando la fórmula:

$$N_D=\frac{n(n-3)}{2} \rightarrow N_D=\frac{12(12-3)}{2}=6(9)=54$$

$$\therefore \quad \boxed{N_D=54}$$

Rpta: El número total de diagonales del polígono de 12 lados es 54.

Problema 3: Hallar el número de lados de un polígono, sabiendo que en él se pueden trazar 104 diagonales.

Resolución:

En la fórmula: $\boxed{N_D=\frac{n(n-3)}{2}}$; Reemplazamos el valor de $N_D=104$

$$104=\frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 208=n(n-3)$$

$$208=n^2-3n$$

$$0=n^2-3n-208$$

$$\begin{array}{ll} n & -16 \\ n & +13 \end{array}$$

Descomponemos 208 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} 208 & 2 \\ 104 & 2 \\ 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \Rightarrow \boxed{208=16.13}$

Donde: $(n - 16)(n + 13) = 0$

i) $n - 16 = 0 \rightarrow$ $\boxed{n = 16}$ ii) $n + 13 = 0 \rightarrow$ $\boxed{n = -13}$

Rpta. El número de lados del polígono es 16.

Problema 4: En un polígono convexo, el número de diagonales es igual al cuádruple del número de ángulos interiores, menos 5. En cuántos triángulos puede descomponerse este polígono al unir un vértice con el resto de los vértices.

Resolución:

Recuerda Que: *El número de ángulos interiores de un polígono es igual al número de lados de dicho polígono.*

Sea:

n = número de lados del polígono; número de ángulos interiores = n

Del enunciado:

\# de diagonales es igual al cuadruple del # de ángulos interiores, menos 5

$$\frac{n(n-3)}{2} = 4n - 5$$

$$n^2 - 3n = 8n - 10 \Rightarrow n^2 - 11n + 10 = 0$$

n ⟶ -10

n ⟶ -1

Donde:

$(n - 10)(n - 1) = 0$

i) $n - 10 = 0 \rightarrow$ $\boxed{n = 10}$

ii) $n - 1 = 0 \rightarrow$ $\boxed{n = 1}$

En este caso "n" toma 2 valores positivos de las cuales sólo se cumple cuando n = 10 y no cuando n = 1, pues no hay polígono que tenga 1 lado.

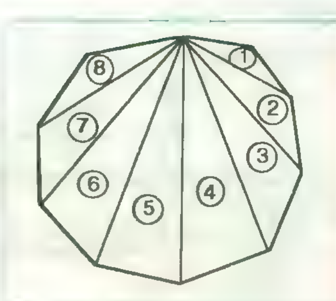
∴ El polígono tiene 10 lados.

POR PROPIEDAD:

El polígono de 10 lados puede descomponerse en: (n - 2) triángulos.

Luego: n - 2 = 10 - 2 = 8 Triángulos.

Rpta. El número de triángulos que puede descomponerse el polígono al unir un vértice con el resto de los vértices es de 8 triángulos.



Problema 5: La diferencia de los números de los lados de dos polígonos es igual a 4 y la de su número de diagonales igual a 22. Calcular la suma de los números de lados.

Sea: n = # de lados de uno de los polígonos, # de diagonales = $\dfrac{n(n-3)}{2}$

N = # de lados del otro polígono, # de diagonales = $\dfrac{N(N-3)}{2}$

Del enunciado; planteamos las siguientes ecuaciones:

i) $n - N = 4 \rightarrow \boxed{n - 4 = N}$ .....(1) ii) $\dfrac{n(n-3)}{2} - \dfrac{N(N-3)}{2} = 22$

Reemplazamos (1) en (ii): $\dfrac{n(n-3)}{2} - \dfrac{(n-4)[(n-4)-3]}{2} = 22$

$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-4)(n-7)}{2} = 22 \rightarrow \frac{(n^2-3n)-(n^2-11n+28)}{2} = 22$$

$$8n - 28 = 44 \Rightarrow 8n = 72 \Rightarrow \therefore \boxed{n = 9}$$

Luego, reemplazamos el valor de $n = 9$ en la expresión (1):

$$n - 4 = N \Rightarrow 9 - 4 = N \Rightarrow \therefore \boxed{N = 5}$$

Rpta. La suma de los números de lados de dichos polígonos es: $n + N = 9 + 5 = 14$.

Problema : Hallar el número de lados del polígono, tal que si reducimos a la mitad el número de lados, las diagonales se reducen a 1/7 del número inicial.

Resolución:

Sea: n = número de lados del polígono inicial.

- El número de diagonales es: $\dfrac{n(n-3)}{2}$

- Si reducimos a la mitad el número de lados, el número de diagonales sería: $\dfrac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-3\right)}{2}$

Del enunciado, planteamos la siguiente ecuación:

$$\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-3\right)}{2} = \frac{1}{7}\left[\frac{n(n-3)}{2}\right] \Rightarrow \frac{n}{4}\left(\frac{n-6}{2}\right) = \frac{n(n-3)}{14} \Rightarrow \frac{n^2-6n}{4} = \frac{n^2-3n}{7}$$

$7(n^2 - 6n) = 4(n^2 - 3n)$

$7n^2 - 42n = 4n^2 - 12n$

$3n^2 - 30n = 0$; sacamos factor común "3n"

$3n(n - 10) = 0$

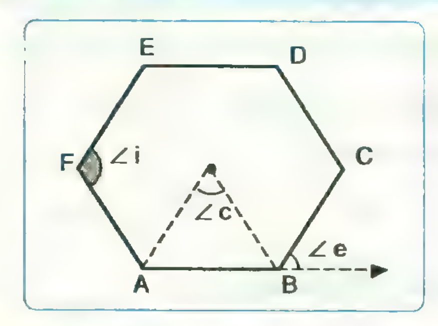
Donde:

i) $3n = 0 \Rightarrow n = 0$

ii) $n - 10 = 0 \Rightarrow n = 10$

Rpta. El polígono tiene 10 lados.

5.3 ÁNGULOS INTERNOS Y EXTERNOS DE UN POLIGONO



De la figura:

i = ángulo interior

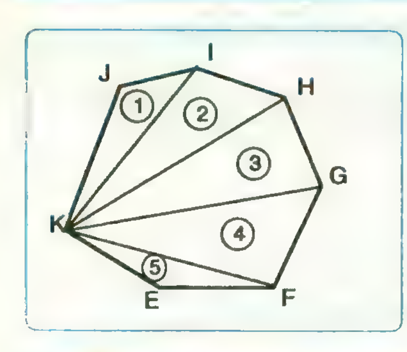
e = ángulo exterior

c = ángulo central

5.3.1 PROPIEDADES:

PROPIEDAD VII : La suma de los ángulos interiores (Si), de un polígono cóncavo ó convexo. Es igual a (n - 2) ángulos llanos.

$S_i = 180°(n - 2)$ Siendo "n" el número de lados del polígono.



Demostración:

1) Trazamos todas las diagonales posibles desde 1 sólo vértice del polígono.
2) Se forman siempre (n - 2) triángulos.
3) Por lo tanto: $S_i = \underbrace{180° + 180° + \ldots + 180°}_{(n-2)}$

$$S_i = 180°(n - 2)$$

Nota: *Esta fórmula, también se acostumbra expresarla en función de ángulos rectos (90°); veamos:*

$$S_i = 180°(n - 2) = 2.\underbrace{90°}_{\text{ángulo recto}}(n - 2)$$

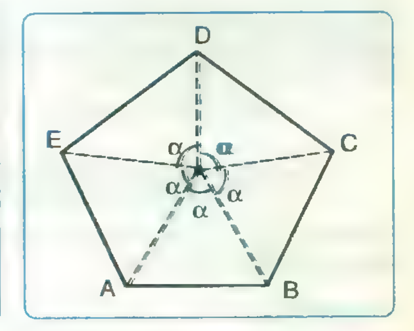
Es decir: $S_i = 2(n - 2)$ ángulos rectos

PROPIEDAD VIII : El ángulo interno de un polígono regular o de un polígono equiángulo. Es igual a:

$$\frac{180°(n-2)}{n}$$

PROPIEDAD IX : Ángulo central de un polígono regular: Es el ángulo convexo "α" formado al unir el centro del polígono con dos vértices consecutivos.
Siendo todos los ángulos centrales iguales, la medida de uno de ellos, será:

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$



Demostración:

1) La suma de todos los ángulos centrales que se forman es:

$$Sc = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha$$

2) Como el polígono tiene "n" lados, habrán "n" ángulos centrales, siendo su suma:

$$Sc = \alpha . n$$

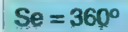
3) Como se podrá observar los ángulos centrales se hallan alrededor del mismo punto "O", Siendo su suma 360º, entonces:

$\alpha . n = 360°$ Donde: $\alpha = \dfrac{360°}{n}$

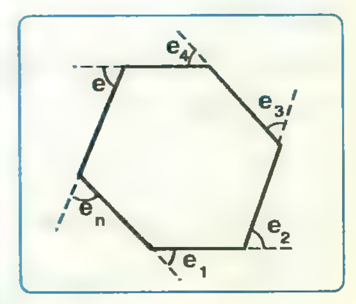
PROPIEDAD X : La suma de todos los ángulos exteriores (uno por vértice) de un polígono convexo es 360º.

De la figura:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + \ldots\ldots + e_n = 360°$$



$$\therefore \quad Se = 360°$$



Problema 7 : Hallar la suma de los ángulos internos de un Eneágono.

Resolución:

Por fórmula: $S\angle i = 180°(n-2)$; como el polígono es un eneágono, el número de lados es 9 o sea: n = 9

Reemplazando el valor de "n" en la fórmula, se obtiene:

$$S\angle i = 180°(9-2) = 180°(7) = 1\,260° \Rightarrow S\angle i = 1\,260°$$

Rpta. La suma de los ángulos internos del eneágono es 1 260°

Problema 8: Hallar el número de diagonales de un polígono regular cuyos ángulos internos suman 1 080°.

Resolución:

Sabemos que: $S\angle i = 1\,080°$; por fórmula: $S\angle i = 180°(n-2)$

$$180°(n-2) = 1\,080° \Rightarrow n-2=6$$

$$\therefore \; n = 8 \quad \text{(polígono de 8 lados)}$$

Luego, el número de diagonales será: $N_D = \frac{n(n-3)}{2}$ ***(Fórmula)***

Reemplazando el valor "n" obtenemos: $N_D = \frac{8(8-3)}{2} = 4(5) = 20 \Rightarrow N_D = 20$

Rpta: El número de diagonales del Polígono es 20

Problema 9 : ¿Cuántos lados tiene el polígono regular, si la suma total de sus ángulos internos y Externos es 1 440°?

Resolución:

Sea: n = Número de lados del polígono.

Del enunciado: $S\angle i + S\angle e = 1\,440°$

$$180°(n-2) + 360° = 1\,440°$$

$$180°n - 360° + 360° = 1\,440° \Rightarrow 180°n = 1\,440° \Rightarrow \therefore \; n = 8$$

Rpta: El polígono regular tiene 8 lados.

TALLER DE PROBLEMAS Nº 20

Problema 1 : En un polígono, su número de diagonales es igual a 5 veces su número de lados. ¿Cuántos lados tiene dicho polígono?

Resolución:

Rpta. 13 lados

Problema 2 : ¿Cómo se llama el polígono en el cual desde tres vértices consecutivos se pueden trazar 14 diagonales?

Resolución:

Rpta. Octógono

Problema 3 : Averiguar el número de lados de un polígono en el cual se cumple que, al aumentarle un lado su número de diagonales aumenta en 5.

Resolución:

Rpta. 6 lados

Problema 4 : En cierto polígono se trazan todas las diagonales desde un vértice y queda dividido en 18 triángulos. ¿Cuántas diagonales en total tiene aquel polígono?

Resolución:

Rpta. 170

Problema 5 : ¿Cuántos lados tiene el polígono en el cual la suma de ángulos internos más la suma de ángulos externos es 2 160°?

Resolución:

Rpta. 12

Problema 6 : La diferencia entre un ángulo interno y un ángulo externo de un polígono regular es 36°. Hallar el número de lados del polígono.

Resolución:

Rpta. 5

Problema 7 : En un polígono regular un ángulo central mide 10°, y cada lado mide 5 cm. Calcular el perímetro.

Resolución:

Rpta. 180 cm.

Problema 8 : En un polígono equiángulo cada ángulo exterior mide 11°15'. Hallar el número de lados.

Resolución:

Rpta. 32

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE POLÍGONOS

NIVEL I

Problema 1: ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 6 diagonales desde un vértice?

A) Hexágono B) Pentágono
C) Nonágono D) Octógono
E) Heptágono.

Problema 2 : De 6 vértices consecutivos de cierto polígono se han trazado 20 diagonales. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

Problema 3 : Hallar el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 18 lados.

A) 145 B) 135 C) 315 D) 189 E) 165

Problema 4 : ¿De cuántos lados es el polígono de 54 diagonales?

A) 12 B) 14 C) 10 D) 8 E) 13

Problema 5 : N es el número total de diagonales de un undecágono, y M es el número de lados de otro polígono en el que se puede trazar 65 diagonales como máximo. Hallar el valor de: 3N - 2M

A) 109 B) 49 C) 160 D) 106 E) N.A

Problema 6 : ¿Cuántos lados tiene el polígono en el cual al aumentar su número de lados en tres, su número de diagonales aumenta en 15?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 5 E) 10

Problema 7 : ¿Cuántos lados tiene el polígono cuyo número de diagonales excede en 133 al número de lados?

A) 19 B) 17 C) 15 D) 20 E) 23

Problema 8 : Dos números consecutivos representan el número de lados de dos polígonos. La diferencia entre sus números de diagonales es 3. Hallar el polígono mayor.

A) Hexágono B) Pentágono C) Octógono
D) Eneágono E) Dodecágono

Problema 9 : ¿Cuántos lados tiene el polígono en el cual su número de diagonales aumenta en cinco, al aumentar en uno el número de lados?

A) 5 B) 6 C) 3 D) 4 E) 7

Problema 10 : La diferencia de los números de lados de dos polígonos es igual a 6 y la de su número de diagonales igual a 81. Calcular la suma de los números de lados.

A) 18 B) 30 C) 40 D) 32 E) 38

Problema 11 : El número de lados de un polígono es igual a la mitad del número de diagonales. Calcular el número de lados.

A) 7 B) 8 C) 6 D) 5 E) 9

Problema 12 : Hallar el número de la-

dos de un polígono, sabiendo que en él se pueden trazar 152 diagonales.

A) 16 B) 18 C) 19 D) 21 E) 20

Problema 13 : Hallar el número de lados de un polígono regular de lado igual a 6 dm. Si el número de diagonales es 3 veces su perímetro expresado en decímetros.

A) 36 B) 39 C) 32 D) 28 E) 30

Problema 14 : ¿Cuál es el polígono convexo, cuyo número de diagonales excede al número de vértices en 25?

A) Octógono B) Pentadecágono
C) Decágono D) Eneágono
E) Undecágono

Problema 15 : Determinar el número de diagonales de un polígono, si de 6 vértices consecutivos, sólo se pueden trazar 44 diagonales.

A) 68 B) 44 C) 54 D) 45 E) 77

Clave de Respuestas

1. C	2. C	3. B	4. A	5. D
6. D	7. A	8. B	9. B	10. B
11. A	12. C	13. B	14. C	15. C

NIVEL II

Problema 1 : Hallar la suma de los ángulos internos de un Dodecágono.

A) 1 440º B) 1 800º C) 1 840º
D) 1 680º E) 1 890º

Problema 2 : Hallar el número de diagonales de un polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1 620º

A) 48 B) 55 C) 44 D) 42 E) N.A

Problema 3 : Hallar el número de diagonales de un polígono regular, cuyo ángulo central mide 2/3 de recto.

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 24

Problema 4 : ¿Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son falsas?

I) En todo polígono regular los ángulos central y exterior siempre son iguales.
II) Todo polígono convexo tiene diagonales.
III) Los polígonos equiángulos pueden ser cóncavos.

A) II B) III C) I y II
D) I y III E) II y III

Problema 5 : Si a un polígono regular le duplicamos el número de lados entonces su ángulo exterior disminuye en 9º, de qué polígono se trata.

A) Dodecágono B) Decágono
C) Icoságono D) Octógono
E) Pentadecágono.

Problema 6 : Cuál o cuáles de las afirmaciones son correctas: ("n": número de lados del polígono).

I) La suma de los ángulos internos de un polígono estrellado es 180º(n - 3).

II) La suma de ángulos internos de un exágono convexo es 720º.

III) Cuando el número de lados de un polígono convexo sea igual al número de diagonales entonces este es un pentágono.

IV) El ángulo exterior de un octógono convexo mide 45º

A) II y IV **B)** II y III **C)** I, II y III
D) I, II y IV **E)** II, III y IV

Problema 7: Si la suma de los ángulos internos y de los ángulos externos de un polígono estrellado es igual a 720º dicho polígono tiene:

A) 6 vértices **B)** 8 vértices **C)** 10 vértices
D) 4 vértices **E)** No existe tal polígono

Problema 8: En un polígono regular la razón entre el número de sus diagonales y el número de ángulos rectos que suman sus ángulos internos, es 27:10, entonces el polígono tiene ....lados.

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 27

Problema 9: Encontrar el número de diagonales de un polígono regular si su ángulo interior mide el triple de uno de sus ángulos exteriores.

A) 16 **B)** 15 **C)** 24 **D)** 20 **E)** 18

Problema 10: Si el ángulo interior de un polígono regular se le disminuye 36' resulta otro polígono regular con un lado menos. Cuál es el número de lados del polígono inicial.

A) 20 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 28 **E)** 32

Problema 11: ¿En qué polígono regular el ángulo interior excede al exterior en 132º?

A) En el decágono
B) En el icoságono
C) En el pentadecágono.
D) En el polígono de 30 lados.
E) En ninguna.

Problema 12: Los ángulos interiores de 2 polígonos regulares difieren en 20º y sus ángulos exteriores suman 100º. ¿Qué polígonos son?

A) Cuadrado y exágono
B) Exágono y octógono
C) Eneágono y dodecágono
D) Exágono y eneágono
E) Octógono y eneágono.

Problema 13: Tres veces el ángulo exterior de un polígono regular es igual a dos veces un ángulo interior. ¿Cuál es ese polígono?

A) Es un cuadrado **B)** Es un pentágono
C) Es un exágono **D)** Es un Nonágono
E) Es un decágono.

Problema 14: Los ángulos de un exágono convexo están en progresión aritmética de razón 10º. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

A) 95º **B)** 125º **C)** 135º
D) 145º **E)** 165º

Problema 15: La suma de los ángulos internos de un polígono convexo es a su número de diagonales como 64:3. Calcular su número de lados.

A) 15 **B)** 13 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 16

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. C	4. E	5. C
6. B	7. E	8. B	9. D	10. B
11. C	12. D	13. B	14. D	15. C

NIVEL III

Problema 1 : Hallar el número de lados de un polígono, si la suma de sus ángulos interiores más la suma de sus ángulos exteriores es 3 600°.

A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 30 **E)** 25

Problema 2 : Calcular el número de diagonales de un polígono convexo, si la suma de sus ángulos interiores es 900°.

A) 16 **B)** 14 **C)** 9 **D)** 20 **E)** 15

Problema 3 : ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular, si su ángulo interior es el triple de su ángulo central?

A) 30 **B)** 12 **C)** 20 **D)** 14 **E)** 18

Problema 4 : ¿En qué polígono la suma de sus ángulos interiores es igual a 5 veces la suma de sus ángulos exteriores?

A) Pentágono **B)** Decágono
C) Pentadecágono **D)** Icoságono
E) Dodecágono

Problema 5 : En un exágono tres de sus ángulos interiores son congruentes y miden 100° cada uno, si los otros tres ángulos también son congruentes entre si. Calcular la medida de cada uno de estos ángulos.

A) 200° **B)** 100° **C)** 240°
D) 160° **E)** 140°

Problema 6 : Hallar la suma de ángulos interiores de la figura.

A) 1 200° **B)** 1 800°
C) 1 600° **D)** 2 500°
E) 3 600°

Problema 7 : El lado de un polígono equilátero mide 6 u y su número total de diagonales es numéricamente igual al perímetro del polígono. ¿Cuántos vértices tiene el polígono?

A) 15 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

Problema 8 : Al disminuir en 2 el número de lados de un polígono convexo, se obtendrá otro polígono con 15 diagonales menos. ¿Cuántos lados tiene el polígono original?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

Problema 9 : Calcular el número de lados de un polígono tal que al aumentarle 6 lados, su número de diagonales aumenta en 93.

A) 10 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** N.A

Problema 10 : En un polígono convexo de "n" lados desde tres vértices consecutivos se pueden trazar "2n" diagonales. Hallar "n".

A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 10 **E)** 8

Problema 11 : La diferencia de los ángulos exteriores de dos polígonos regulares es 9°, si uno de ellos tiene dos lados más que el otro, hallar el número de lados del polígono que tiene menor ángulo exterior.

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** N.A

Problema 12 : Si la diferencia entre los ángulos interiores de dos polígonos regulares es 18°. ¿Cuál es la diferencia entre las medidas de sus ángulos centrales?

A) 12° **B)** 15° **C)** 18° **D)** 20° **E)** N.A

Problema : Si un polígono regular tiene "x" lados y la suma de sus ángulos externos, centrales e internos es "200° x", hallar el número de diagonales.

A) 200 **B)** 135 **C)** 145 **D)** 125 **E)** N.A

Problema 14 : Si un polígono de "n" lados tuviera (n - 3) lados, tendría (n + 3) diagonales menos. Hallar el número de lados del polígono.

A) 5 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

Problema : El número de diagonales de un polígono convexo excede en 16 a la diferencia entre el número de ángulos rectos a que equivale la suma de sus ángulos internos y el número de vértices del polígono. Hallar el número de lados.

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 16

Problema : En un polígono regular el valor del ángulo interno es igual a cinco veces el valor del ángulo central. Calcular el número total de diagonales de dicho polígono.

A) 54 **B)** 53 **C)** 48 **D)** 45 **E)** N.A

Problema : El ángulo exterior de un polígono regular mide 1°7'30". ¿Cuántos lados tiene?

A) 60 **B)** 240 **C)** 180 **D)** 320 **E)** 420

Problema 18 : Calcular el número de lados del polígono regular, que al disminuir en 70 su número total de diagonales, cada ángulo interior disminuye en 21°.

A) 15 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 18 **E)** 19

Problema : Si se duplican el número de ángulos internos de un polígono, la suma de ángulos internos se triplican. ¿Qué polígono es?

A) Icoságono **B)** Pentadecágono
C) Dodecágono **D)** Eptágono
E) Cuadrilátero

Problema : En un pentágono regular se trazan todas sus diagonales. ¿Cuántos triángulos se forman?

A) 10 **B)** 25 **C)** 35 **D)** 40 **E)** N.A

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. C	4. E	5. E
6. B	7. A	8. A	9. D	10. D
11. C	12. C	13. B	14. B	15. A
16. A	17. D	18. A	19. E	20. C

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

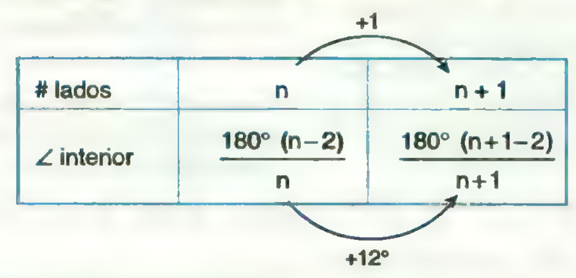
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Si a un polígono regular se le aumenta un lado, su ángulo interior aumenta en 12°. ¿Cuál es el polígono?

A) Icoságono **B)** Exágono **C)** Nonágono **D)** Pentágono **E)** Octógono

Resolución:

- Para su mejor comprensión, hacemos el siguiente cuadro:



# lados	n	$n+1$
∠ interior	$\dfrac{180°\,(n-2)}{n}$	$\dfrac{180°\,(n+1-2)}{n+1}$

- Según datos del problema:

$$\frac{180°\,(n+1-2)}{n+1}-\frac{180°\,(n-2)}{n}=12°$$

$$\frac{n-1}{n+1}-\frac{n-2}{n}=\frac{12°}{180°}$$

$$\frac{n^2-n-(n^2-n-2)}{n\,(n+1)}=\frac{1}{15}\quad\Rightarrow\quad n\,(n+1)=30$$

$$\boxed{n=5}$$

∴ **El polígono es el pentágono** **Rpta. D**

2. Los ángulos exteriores de un polígono regular miden, cada uno 1/5 de recto. ¿Cuál es dicho polígono?

A) Icoságono **B)** Eneágono **C)** Exágono
D) Endecágono **E)** Dodecágono

Resolución:

- En todo polígono regular: $1\angle \text{ exterior} = \dfrac{360°}{n}$ donde: $n = \#$ de lados

- Según datos del problema: $1\angle \text{ exterior} = \dfrac{1}{5}(90°) = 18°$

$$\Rightarrow 18° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = \frac{360°}{18°} = 20$$

$\therefore$ El polígono es el icoságono **Rpta. A**

3. ¿Cuál es el polígono cuyo número de diagonales es igual a su número de lados?

A) Exágono **B)** Triángulo **C)** Pentágono **D)** Octógono **E)** Nonágono

Resolución:

- Según Datos: $\# D = n$

$$\frac{\cancel{n}(n-3)}{2} = \cancel{n}$$

$$n-3 = 2$$

$$n = 5$$

Recuerda Que:

En todo polígono convexo:

$$\# D = \frac{n(n-3)}{2}$$

 # D = número total de diagonales.
n = # de lados = # de vértices

$\therefore$ El polígono es el pentágono **Rpta. C**

4. La suma de las medidas de los ángulos externos de dos polígonos regulares es 100° y la diferencia de los ángulos internos es 20°. Calcular cuántas diagonales se pueden trazar a partir de los tres primeros vértices del polígono de mayor número de lados.

A) 20 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 17

Resolución:

- Sean:

n_1 : # de lados del polígono menor.
n_2 : # de lados del polígono mayor.

Recuerda Que:

En un polígono regular de "n" lados.

$1\angle\text{ext.} = \dfrac{360°}{n}$ $1\angle\text{int.} = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

n = # de lados = # de vértices

- Según datos:

$$\begin{cases} \dfrac{360°}{n_1}+\dfrac{360°}{n_2}=100° \\ \dfrac{180°(n_2-2)}{n_2}-\dfrac{180°(n_1-2)}{n_1}=20° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}=\dfrac{100}{360}=\dfrac{5}{18} \\ 1-\dfrac{2}{n_2}-\left(1-\dfrac{2}{n_1}\right)=\dfrac{20}{180}=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}=\dfrac{5}{18} \\ \dfrac{1}{n_1}-\dfrac{1}{n_2}=\dfrac{1}{18} \end{cases}$$

Resolviendo: $\dfrac{1}{n_2}=\dfrac{\dfrac{5}{18}-\dfrac{1}{18}}{2}=\dfrac{1}{9} \Rightarrow \boxed{n_2=9}$

- \# de diagonales desde 3 vértices consecutivos en el polígono mayor:

1er. vértice ⇒ $n_2 - 3 = 9 - 3 = 6$ diagonales
2do. vértice ⇒ $n_2 - 3 = 9 - 3 = 6$ diagonales
3er. vértice ⇒ $n_2 - 4 = 9 - 4 = 5$ diagonales

Total = 6 + 6 + 5 = 17 diagonales **Rpta. E**

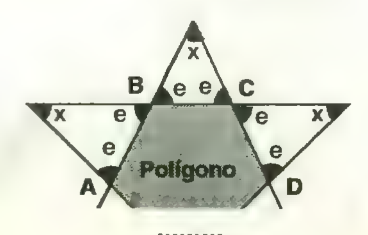
5. Los lados de un polígono regular de "n" lados, (n > 4) se prologan para formar una estrella. El número de grados en cada vértice de la estrella es:

A) $\dfrac{360°}{n}$ B) $\dfrac{(n-4)\,180°}{n}$ C) $\dfrac{(n-2)\,180°}{n}$ D) $180° - \dfrac{90°}{n}$ E) $\dfrac{180°}{n}$

Resolución:

- Sea ABCD......, el polígono regular de "n" lados.

- Debemos de calcular "x". En uno de los triángulos que se forman al prolongar los lados, tenemos que:



$$e + e + x = 180°$$

$$\frac{360°}{n} + \frac{360°}{n} + x = 180° \Rightarrow \boxed{x = \frac{(n-4)\ 180°}{n}}$$ **Rpta. B**

6. ¿Cuál es el polígono cuyo número de diagonales es el triple de su número de lados?

A) Hexágono B) Nonágono C) Cuadrado D) Decágono E) Dodecágono

Resolución:

- Según datos del problema: $\# D = 3n$

$$\Rightarrow \frac{\not{n}\ (n-3)}{2} = 3\not{n} \Rightarrow \boxed{n=9}$$

$\therefore$ **El polígono se llama nonágono** **Rpta. B**

7. Al multiplicar por 2 el número de lados de un polígono convexo su número de diagonales queda multiplicado por 6. Hallar cuántas diagonales se pueden trazar desde los tres primeros vértices.

A) 20 B) 17 C) 14 D) 11 E) 8

Resolución:

- Sea "n" el # de lados del polígono.

x 2

# de lados	n	2n
# de diagonales	$\frac{n\ (n-3)}{2}$	$\frac{2n\ (2n-3)}{2}$

x 6

- Según datos: $\frac{2n\ (2n-3)}{2} = 6 \cdot \frac{n\ (n-3)}{2} \Rightarrow \boxed{n=6}$

- Nos piden calcular:

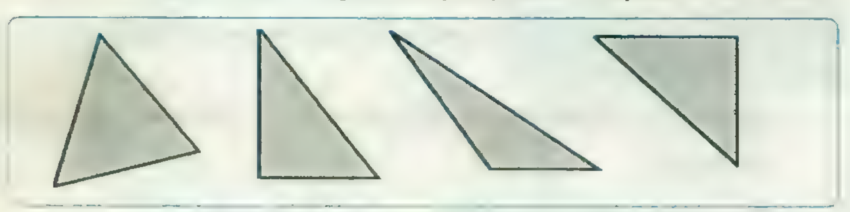
$$d_1 = n - 3 = 6 - 3 = 3$$
$$d_2 = n - 3 = 6 - 3 = 3$$
$$d_3 = n - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\boxed{d_1 + d_2 + d_3 = 8}$$ **Rpta. E**

5.4 TRIÁNGULOS

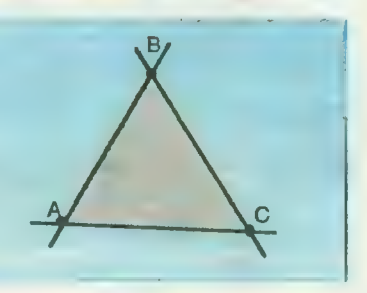
Ya desde la escuela primaria sabemos cuál es la figura que se llama **triángulo.**

Así, todos reconocen como triángulos los que aparecen dibujados a continuación.



Pero ahora hay que tratar de dar una definición matemática de triángulos.

Definición: *Dados en un plano tres puntos A, B, C,* ***no alineados,*** *es decir, que no pertenecen a la misma recta, se llama* ***triángulo ABC*** *a la figura formada por los puntos comunes a los ángulos convexos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ y $B\hat{C}A$ es decir el conjunto de puntos de intersección de los tres ángulos.*



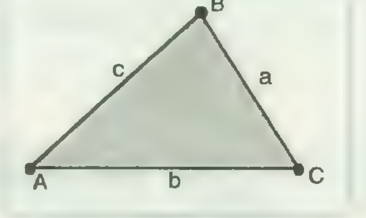
5.4.1 NOTACIÓN: Para indicar el triángulo ABC se escribe: Δ ABC. Luego:

$$\Delta\, A\hat{B}C = B\hat{A}C \cap A\hat{B}C \cap B\hat{C}A$$

Dado el triángulo ABC:

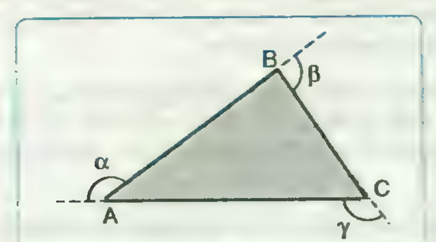
- Los puntos A, B, y C se llaman **vértices**
- Los segmentos AB; BC y CA se llaman **lados**.
- Los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se llaman **ángulos interiores** del triángulo.

* El lado $\overline{AB}$ se dice opuesto al ángulo $\hat{C}$.
* El lado $\overline{BC}$ opuesto al ángulo $\hat{A}$.
* El lado $\overline{AC}$ opuesto al ángulo $\hat{B}$.



- Los lados se designan también con una letra igual a la del vértice del ángulo opuesto, pero **minúscula**; así el lado AB se designa por la letra c, el lado BC por la letra a y el lado CA por la letra b.
- Los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se dicen **adyacentes** al lado c.

- Los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se dicen **adyacentes** al lado a.
- Los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ se dicen **adyacentes** al lado b.

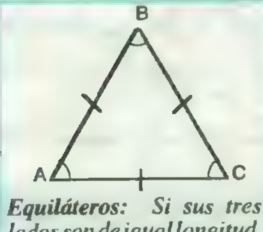


Los ángulos $\hat{\alpha}$; $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$, adyacentes a los ángulos interiores del triángulo, se llaman **ángulos exteriores** del mismo.

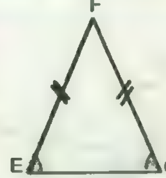
5.4.2 CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS:

I Según sus lados se clasifican en:

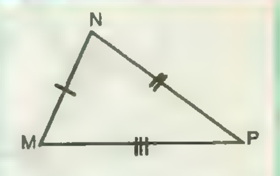
- Equiláteros: Tres lados iguales.
- Isósceles: Dos lados iguales.
- Escalenos: Tres lados desiguales.



Equiláteros: Si sus tres lados son de igual longitud.



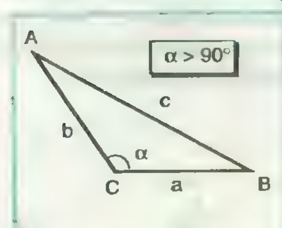
Isósceles: Si dos de sus lados son de igual longitud.



Escalenos: Si ningún par de lados tienen igual longitud.

II Según sus ángulos se clasifican en:

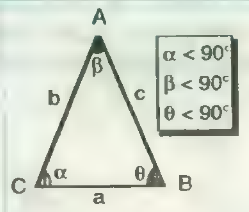
- Oblicuángulos: ningún ángulo recto
  - Acutángulos: 3 ángulos agudos
  - Obtusángulos: 1 ángulo obtuso
- Rectángulos: 1 ángulo recto



Obtusángulo: Si uno de sus ángulos mide más de 90°

Propiedad:

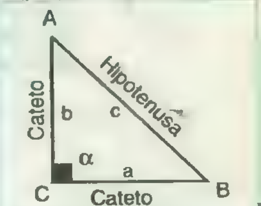
Si: $\alpha > 90°$ $c^2 > a^2 + b^2$



Acutángulo: Si sus tres ángulos son agudos.

Propiedad:

Si: $\alpha < 90°$ $c^2 < a^2 + b^2$



Rectángulo: Si uno de sus ángulos mide 90°

Propiedad:

Si: $\alpha = 90°$ $c^2 = a^2 + b^2$

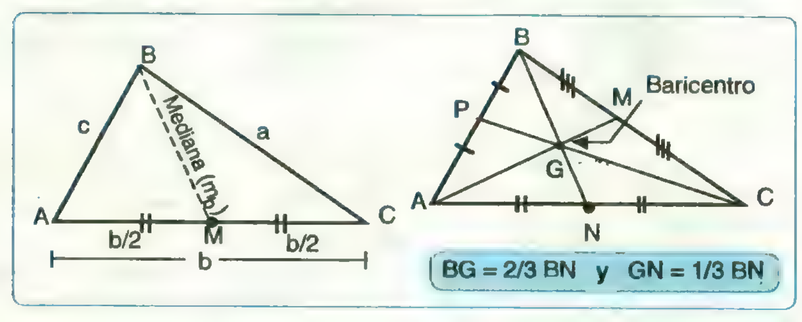
Triángulo oblicuángulo: Es aquel triángulo que no tiene ángulo recto.

5.4.3 LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO:

Se denomina así a las medianas, alturas, mediatrices y bisectrices del triángulo. Sus respectivos puntos de intersección se llaman los puntos notables de un triángulo: baricentro, ortocentro; circuncentro e incentro.

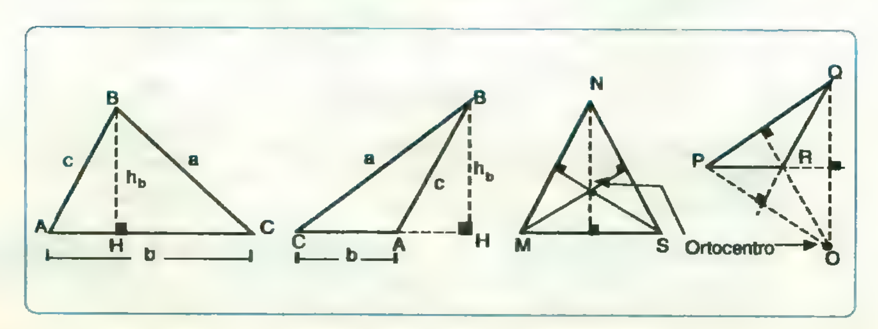
I) Mediana: Se llama mediana al segmento $\overline{BM}$ trazado desde el vértice "B" al punto medio "M" del lado opuesto $\overline{AC}$. Se le simboliza por la letra "m" acompañada por un subíndice que representa el lado del triángulo, en el cual cae la mediana.

- Todo triángulo tiene tres medianas. Las tres se intersectan en un solo punto llamado **baricentro** o **centro de gravedad**, que tiene la propiedad de dividir a cada mediana en dos partes tales que una es el doble de la otra (del vértice al baricentro es el doble que del baricentro al lado).

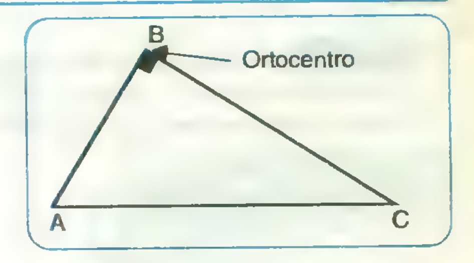


II) Altura: Es el segmento $\overline{BH}$ perpendicular, trazado desde el vértice "B" al lado opuesto $\overline{AC}$ o a su prolongación. Se le simboliza por la letra "h" acompañada por un subíndice que representa el lado donde cae dicha altura.

- Todo triángulo tiene 3 alturas. Las tres se intersectan en un solo punto llamado **ortocentro.** Cuando el triángulo es obtusángulo, es necesario prolongar las alturas para determinar el **ortocentro.**



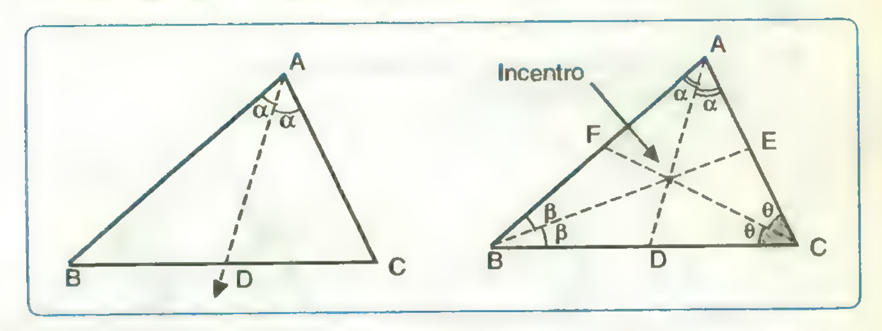
- Cuando el triángulo ABC es rectángulo el **ortocentro "O"** se halla en el vértice del ángulo recto; del triángulo.



III) Bisectriz Interior:

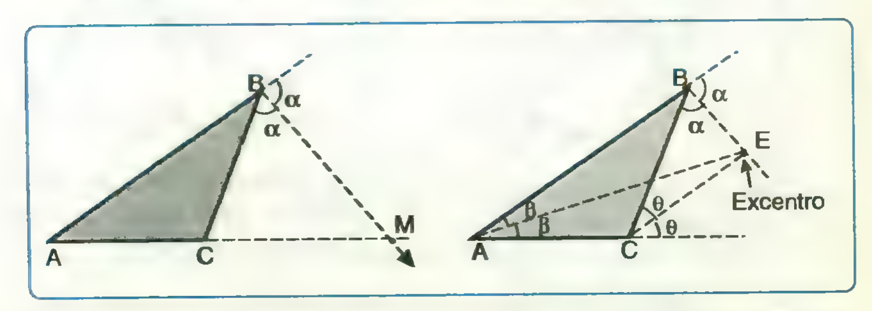
Se llama bisectriz interior de un triángulo al rayo $\overleftrightarrow{AD}$ que biseca al ángulo interior "A" del triángulo.

- Todo triángulo tiene tres bisectrices. Las tres se intersectan en un sólo punto llamado **Incentro**



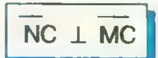
- **Bisectriz exterior**

Se llama bisectriz exterior al rayo $\overrightarrow{BM}$, que divide al ángulo exterior en dos partes iguales en la práctica, se le mide desde el vértice, del cual parte, hasta el punto de corte con la prolongación del lado opuesto.

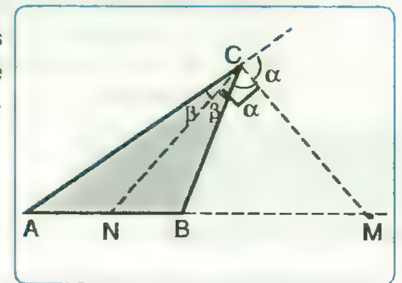


- **El excentro "E" Es el punto de intersección de dos bisectrices exteriores con la bisectriz interior del tercer ángulo del triángulo.**

TEOREMA: En todo triángulo ABC, dos bisectrices, interior $\overrightarrow{CN}$ y exterior $\overrightarrow{CM}$, que parten del mismo vértice, son perpendiculares entre si.



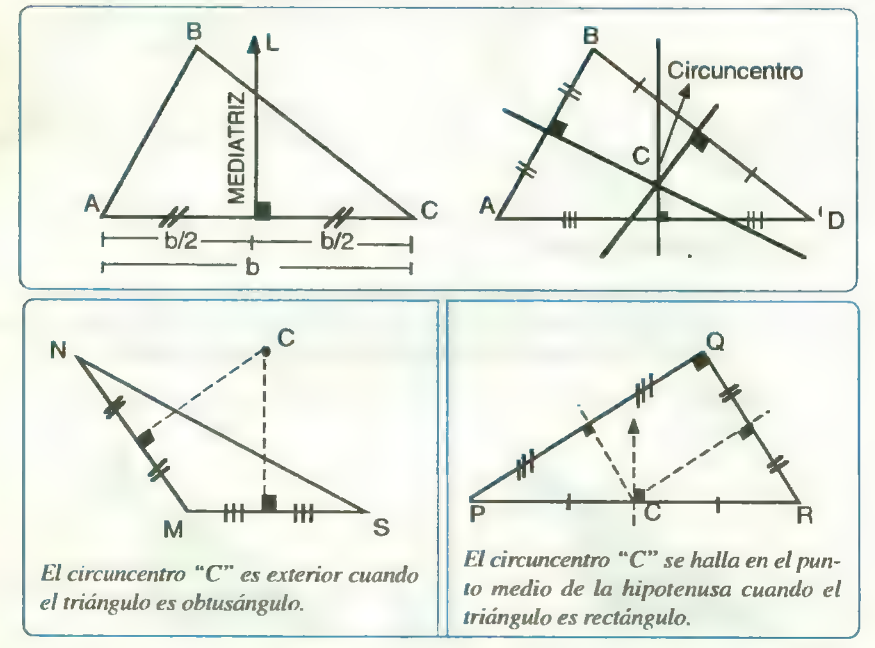
$$\overline{NC} \perp \overline{MC}$$



IV) Mediatriz:

La mediatriz de un triángulo es la recta perpendicular trazada en el punto medio de un lado.

- Todo triángulo tiene tres mediatrices. Las tres se intersectan en un sólo punto lamado **circuncentro.**



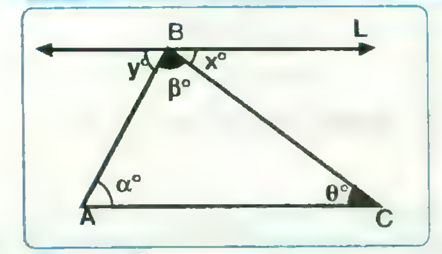
El circuncentro "C" es exterior cuando el triángulo es obtusángulo.

El circuncentro "C" se halla en el punto medio de la hipotenusa cuando el triángulo es rectángulo.

- **Ceviana:** Se denomina ceviana a todo segmento que une el vértice de un triángulo con un punto cualquiera del lado opuesto, o de su prolongación. Las medianas, las alturas, las bisectrices son cevianas de un triángulo.

5.4.4 TEOREMAS FUNDAMENTALES EN TRIÁNGULOS.

1. **Teorema de la suma de ángulos interiores:** "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.



Hipótesis:

- En el ΔABC:

$m\angle A = \alpha°$
$m\angle B = \beta°$
$m\angle C = \theta°$

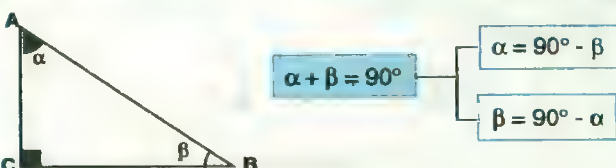
Tesis: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. Trazamos por B la recta L // $\overline{AC}$	1. Construcción auxiliar.
2. $x° + \beta° + y° = 180°$	2. Ángulos consecutivos en un mismo lado de la recta "L".
3. $x° = \theta°$; $y° = \alpha°$	3. Por ángulos alternos internos entre paralelas.
4. $\alpha° + \beta° + \theta° = 180°$	4. Reemplazamos los valores de 3 en 2.
$\therefore$ $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$	

Corolarios

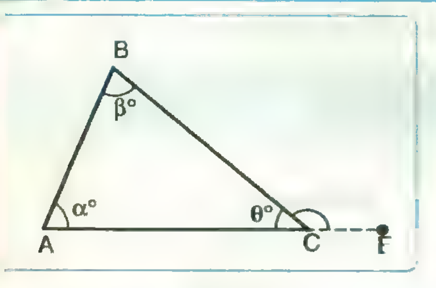
1. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.



$\alpha + \beta = 90°$ → $\alpha = 90° - \beta$; $\beta = 90° - \alpha$

2. Ningún triángulo puede tener más de un ángulo recto o más de un ángulo obtuso.

2. **Teorema del ángulo exterior :** "En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes al ángulo exterior.



Hipótesis:

En el Δ ABC:

$\angle$ BCE es un ángulo exterior.

$m\angle A = \alpha°$

$m\angle B = \beta°$

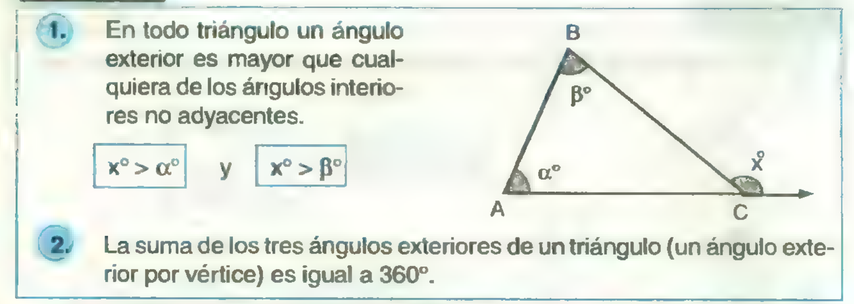
$m\angle C = \theta°$

Tesis: $m\angle BCE = m\angle A + m\angle B$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $\alpha° + \beta° + \theta° = 180°$	1. Suma de las medidas de los ángulos interiores de un Δ ABC.
2. $\theta° + m\angle BCE = 180°$	2. Angulos adyacentes suplementarios.
3. $\alpha° + \beta° + \theta° = \theta° + m\angle BCE$	3. Igualamos los primeros miembros de las igualdades 1 y 2.
4. $\alpha° + \beta° = m\angle BCE$ $m\angle BCE = \alpha° + \beta°$ $\therefore$ $m\angle BCE = \angle A + m\angle B$	4. Cancelando $\theta°$ en ambos miembros de la igualdad 3.

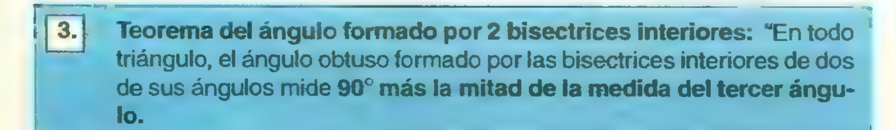
Corolarios



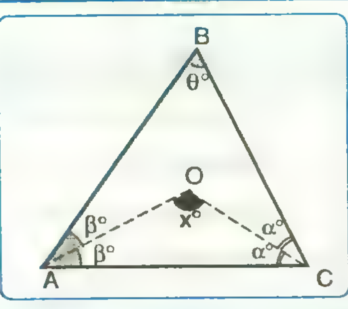
1. En todo triángulo un ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores no adyacentes.

$x° > \alpha°$ y $x° > \beta°$

2. La suma de los tres ángulos exteriores de un triángulo (un ángulo exterior por vértice) es igual a 360°.



3. **Teorema del ángulo formado por 2 bisectrices interiores:** "En todo triángulo, el ángulo obtuso formado por las bisectrices interiores de dos de sus ángulos mide **90° más la mitad de la medida del tercer ángulo.**



Hipótesis:

- En el Δ ABC:

$\overleftrightarrow{AO}$ y $\overleftrightarrow{CO}$ son bisectrices interiores.

∠ AOC, es el ángulo obtuso formado por las bisectrices, cuya medida es x°

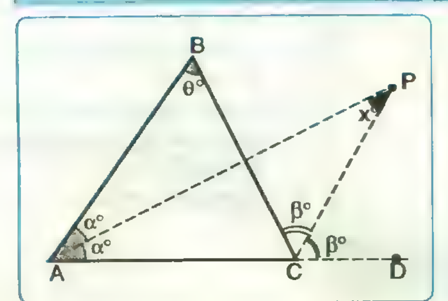
- θ° es la medida del ángulo B.

Tesis: $x = 90° + \frac{\theta°}{2}$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ $2\beta° + \theta° + 2\alpha° = 180°$	**1.** Suma de los ángulos internos del triángulo. En el Δ ABC.
2. $\alpha° + \beta° = \frac{180° - \theta°}{2}$	**2.** Despejando: $(\alpha + \beta)$
3. En el Δ AOC: $\alpha° + \beta° + x° = 180°$	**3.** Suma de los ángulos internos del triángulo AOC.
4. $\frac{180° - \theta°}{2} + x° = 180°$	**4.** Reemplazamos (2) en (3).
5. $90° - \frac{\theta}{2} + x° = 180°$	**5.** Despejando x.
$\therefore$ $x° = 90° + \frac{\theta°}{2}$	

4. **Teorema del ángulo formado por una bisectriz interior y otra exterior:** "En todo triángulo, el ángulo agudo formado por una bisectriz interior de un ángulo y una bisectriz exterior de otro ángulo mide **la mitad de la medida del tercer ángulo.**



Hipótesis:

En el Δ ABC:

$\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del ∠ A

$\overrightarrow{CP}$ es la bisectriz exterior del ∠ C

x° es la medida del ángulo APC

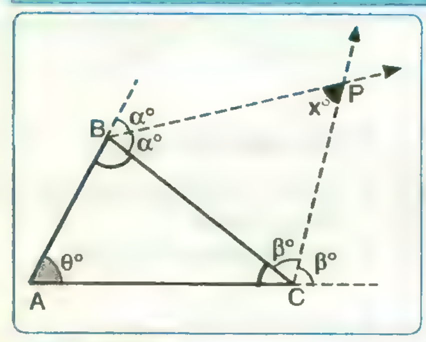
θ° es la medida del ∠ B.

Tesis $x = \frac{\theta°}{2}$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $2\alpha° + \theta° = 2\beta°$	1. Por ángulo exterior en el Δ ABC.
2. $\alpha° + x° = \beta°$	2. Por ángulo exterior en el Δ APC.
3. $2\alpha° + \theta° = 2(\alpha° + x°) \Rightarrow \theta° = 2x°$	3. Reemplazamos (2) en (1)
4. $2x° = \theta°$ ➡ $x° = \dfrac{\theta°}{2}$	4. Despejamos x.

5. **Teorema del ángulo formado por 2 bisectrices exteriores:** "En todo triángulo, el ángulo agudo formado por las bisectrices exteriores de dos ángulos mide ángulo 90° **menos la mitad de la medida del tercer ángulo.**



Hipótesis:

En el Δ ABC:

$\overrightarrow{CP}$ es bisectriz exterior del $\angle$ C.

$\overrightarrow{BP}$ es bisectriz exterior del $\angle$ B.

$\angle$ BPC es el ángulo agudo formado por las bisectrices, cuya medida es x°.

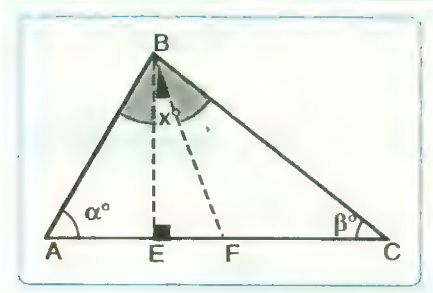
θ° es la medida del $\angle$ A.

Tesis: $x = 90° - \dfrac{\theta°}{2}$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $m\angle B + 2\alpha° = 180°$	1. Ángulos consecutivos en un mismo lado de la recta.
2. $m\angle C + 2\beta° = 180°$	2. Ángulos consecutivos en un mismo lado de la recta.
3. $m\angle B + m\angle C + 2(\alpha° + \beta°) = 360°$	3. Sumamos las igualdades (1) y (2).
4. $m\angle B + m\angle C + \theta° = 180°$ Donde: $m\angle B + m\angle C = 180° - \theta°$	4. Suma de ángulos internos del Δ ABC.
5. $180° - \theta° + 2(\alpha° + \beta°) = 360°$ Donde: $\alpha° + \beta° = \dfrac{180° + \theta°}{2}$	5. Reemplazamos (4) en (3).
6. $\alpha° + \beta° + x° = 180°$	6. Suma de ángulos internos del Δ BPC.
7. $\dfrac{180° + \theta°}{2} + x° = 180°$ $x° = 180° - \dfrac{180° + \theta°}{2} \Rightarrow \therefore\ x° = 90° - \dfrac{\theta°}{2}$	7. Reemplazamos (5) en (6).

6. **Teorema del ángulo formado por la bisectriz y altura:** "En todo triángulo, el ángulo agudo formado por la altura y la bisectriz trazada desde un mismo vértice mide **la mitad de la diferencia de las medidas de los otros dos ángulos.**



Hipótesis:

En el Δ ABC:

$\overline{BE}$ es la altura; $\overline{BF}$ es la bisectriz

$\angle$ EBF es el ángulo formado por la altura y la bisectriz cuya medida es x°,

α° es la medida del ángulo A.

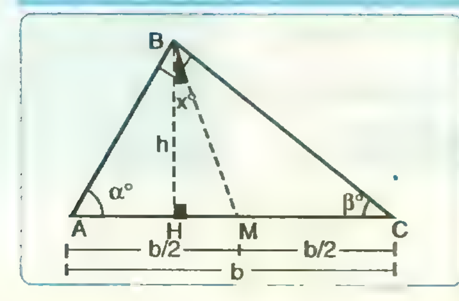
β° es la medida del ángulo C.

Tesis: $x° = \dfrac{\alpha° - \beta°}{2}$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. m$\angle$ ABF = m$\angle$ FBC	1. Por definición de bisectriz, $\overline{BF}$ es bisectriz del $\angle$ ABC.
2. m$\angle$ ABF = m$\angle$ ABE + x° m$\angle$ ABF = (90° - α°) + x°	2. Por ángulos consecutivos.
3. m$\angle$ FBC = m$\angle$ EBC - x° m$\angle$ FBC = (90° - β°) - x°	3. Por ángulos consecutivos.
4. (90° - α°) + x° = (90° - β°) - x°	4. Reemplazamos (2) y (3) en (1).
5. $x° = \dfrac{\alpha° - \beta°}{2}$	5. Despejando x en (4).

7. **Teorema del ángulo formado por la altura y mediana que parten del ángulo recto:** "En todo triángulo rectángulo el ángulo formado por la altura y la mediana que parten desde el vértice del ángulo recto es igual a la diferencia de los ángulos agudos.



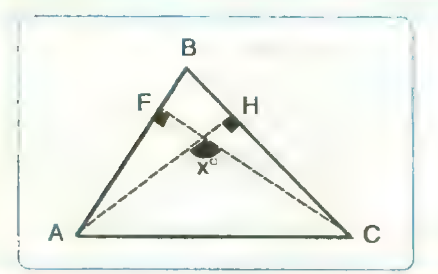
En el ◺ ABC: $\overline{BM}$: mediana

$\overline{BH}$: altura

x° = m$\angle$ A - m$\angle$ C

➡ x° = α° - β°

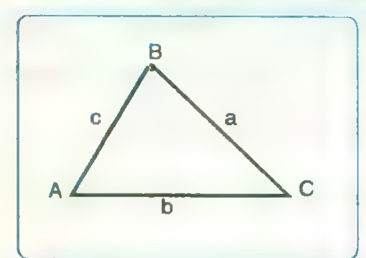
8. **Teorema del ángulo formado por 2 alturas:** El ángulo formado por dos alturas es igual a 180° menos el ángulo, por el que no se ha trazado altura alguna.



En el Δ ABC: $\overline{AH}$ y $\overline{CF}$ son alturas

➠ $x° = 180° - m\angle B$

9. **Teorema de la Desigualdad Triangular:** En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos; pero mayor que su diferencia.

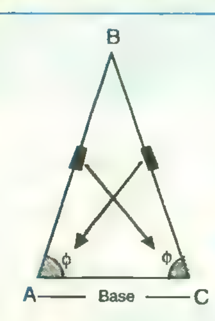


En el Δ ABC: $b - a < c < b + a$

Corolarios

1. En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo.
2. En todo triángulo al menor lado se opone el menor ángulo.

10. **Teorema del Triángulo isósceles:** En todo triángulo isósceles a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.



El Δ ABC es isósceles:

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ lados iguales

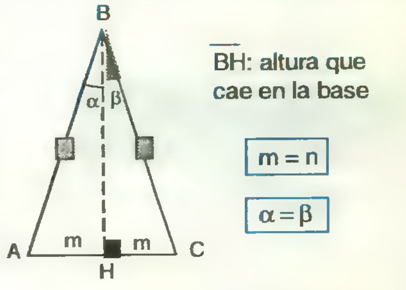
$\overline{AC}$ ⇒ base (lado desigual)

$m\angle A = m\angle C$

Nota: *En los problemas donde hay triángulo isósceles se identifica al lado desigual (base) y en sus extremos se escribirá 2 letras iguales.*

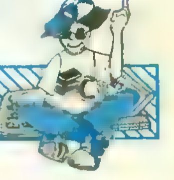
Corolarios

1. En todo triángulo isósceles la altura que cae en la base divide a ésta en dos partes iguales y también al ángulo en dos partes iguales.
2. Si en un triángulo una altura divide al lado opuesto en dos partes iguales o al ángulo en dos partes iguales, entonces: dicho triángulo es isósceles (los lados laterales a la altura serán iguales).



3. En un tiránguIo equilátero sus tres ángulos interiores son iguales, cada uno mide 60°.

Problemas Resueltos Tipo IBM



1. En un triángulo ABC: $m\hat{A} - m\hat{B} = 20°$; mB - mC = 26°, ¿Cuánto mide el ángulo B?

A) 26° B) 36° C) 82° D) 62° E) 70°

Resolución:

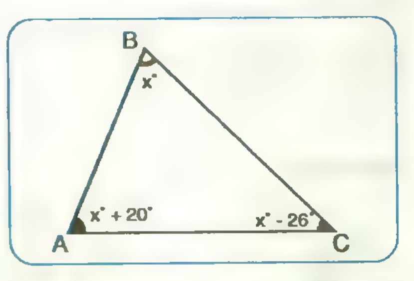
- Sea $m\hat{B} = x°$

- Según Datos:

I) $m\hat{A} - m\hat{B} = 20°$

$m\hat{A} - x° = 20°$

$m\hat{A} = x° + 20°$



II) $m\hat{B} - m\hat{C} = 26°$

$x° - m\hat{C} = 26°$

$x° - 26° = m\hat{C}$

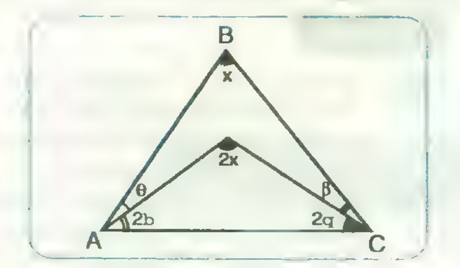
- Por propiedad: $m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180°$

$x° + 20° + x° + x° - 26° = 180°$

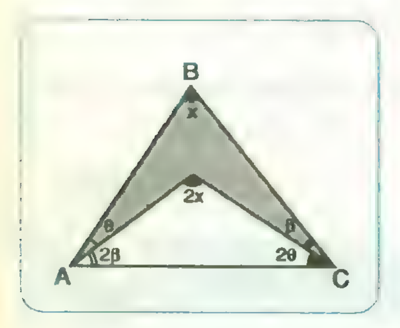
Resolviendo: $x = 62°$ **Rpta D**

2. Del gráfico hallar «x»

A) 41°
B) 17°
C) 60°
D) 45°
E) N.A



Resolución:



- En el ABCD, por la propiedad del cuadrilátero cóncavo:

$$2x = \theta + x + \beta \Rightarrow \boxed{\theta + \beta = x} \quad .....(1)$$

- En el Δ ADC: $m\hat{A} + m\hat{D} + m\hat{C} = 180°$

$$2\beta + 2x + 2\theta = 180°$$

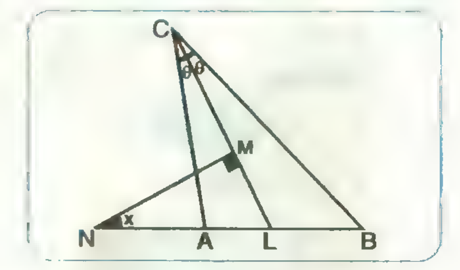
$$\boxed{2(\theta + \beta) + 2x = 180°} \quad .....(2)$$

(1) en (2) : $2(x) + 2x = 180°$

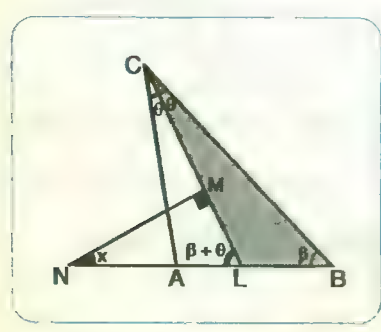
$\therefore \boxed{x = 45°}$ **Rpta. D**

3 En el triángulo ABC que se muestra:
$2m\angle ABC + m\angle ACB = 140°$.
Hallar «x»

A) 10° B) 15°
C) 20° D) 25°
E) 30°



Resolución:



- Sea $m\angle ABC = \beta$
- En el Δ LBC: $\boxed{\angle \text{ exterior } L = \beta + \theta}$
- Según Datos: $2m\angle ABC + m\angle ACB = 140°$

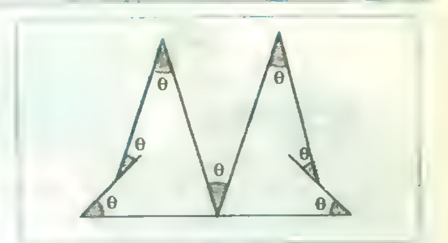
$$2\beta + 2\theta = 140° \Rightarrow \boxed{\beta + \theta = 70°}$$

- Pero en el △ NML: $x + (\beta + \theta) = 90°$

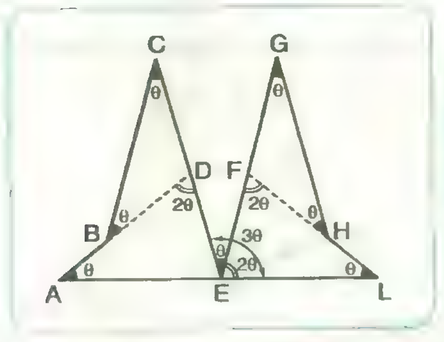
$x + 70° = 90° \Rightarrow \boxed{x = 20°}$ **Rpta. C**

4 Del gráfico hallar "θ"

A) 36° B) 18°
C) 24° D) 72°
E) N.A



Resolución:



¡ATENCIÓN!

En este tipo de problema se deben realizar prolongaciones con la idea de formar triángulos para aplicar las propiedades conocidas.

- Aplicamos el Teorema del ángulo exterior:

Δ BCD: m $\angle$ exterior D = $\theta + \theta = 2\theta$

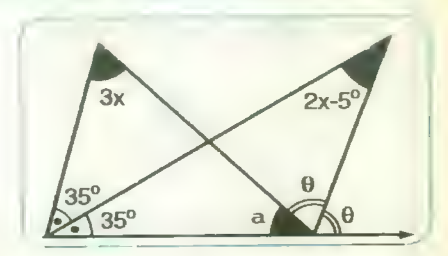
Δ FGH: m $\angle$ exterior F = $\theta + \theta + 2\theta$

Δ ADE: m $\angle$ exterior E = $\theta + 2\theta = 3\theta$ $\Rightarrow$ m $\angle$FEL = 2θ

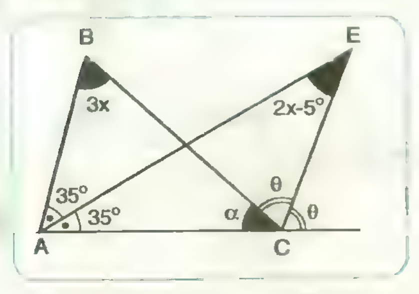
- Finalmente en el Δ EFL: $2\theta + 2\theta + \theta = 180°$ $\Rightarrow$ $\theta = 36°$ **Rpta. A**

5 Calcular "α"

A) 60° B) 40° C) 80°
D) 70° E) 50°



Resolución:



- Por el teorema del $\angle$ formado por una bisectriz interior y otra exterior:

m $\angle$ E $= \frac{1}{2}$ m $\angle$ B $\Rightarrow$ $2x - 5° = \frac{3x}{2}$

$\Rightarrow$ x = 10°

- En el Δ ABC: $70° + 3x + \alpha = 180°$

Reemplazo: $x = 10°$, $\Rightarrow$ $70° + 3(10°) + \alpha = 180°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 80°$ **Rpta. C**

TALLER DE PROBLEMAS Nº 21

Problema 1 : En unΔ ABC:

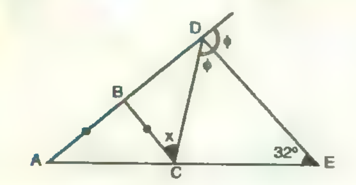
$m\hat{A} - m\hat{B} = 15°$; $m\hat{B} - m\hat{C} = 30°$

¿Cuánto mide el ángulo B?

Resolución:

Rpta. 65°

Problema 2 : Del gráfico hallar «x»

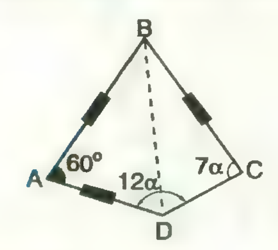


Resolución:

Rpta. 64°

Problema 3 : Siendo AB = BC = AD

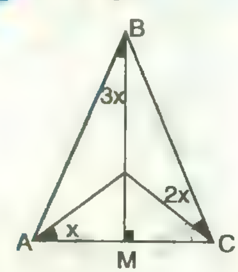
$m\angle ADC = 12\alpha$; $m\angle BCD = 7\alpha$; hallar: α



Resolución:

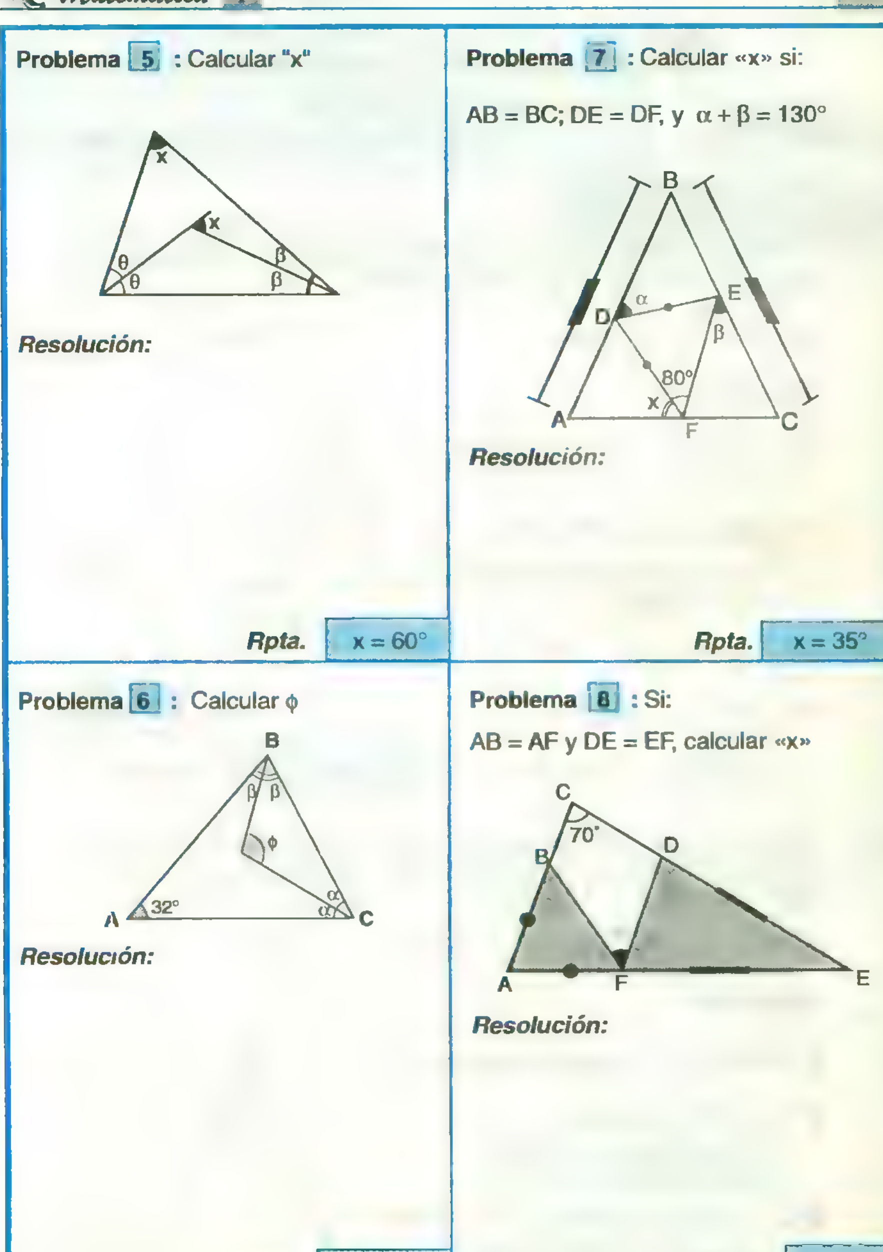
Rpta. $\alpha = 12°$

Problema 4 : En la figura: AM = MC hallar «x»



Resolución:

Rpta. x = 15°



Problema 5 : Calcular "x"

Resolución:

Rpta. x = 60°

Problema 7 : Calcular «x» si:

AB = BC; DE = DF, y $\alpha + \beta = 130°$

Resolución:

Rpta. x = 35°

Problema 6 : Calcular ϕ

Resolución:

Rpta. $\phi = 106°$

Problema 8 : Si:

AB = AF y DE = EF, calcular «x»

Resolución:

Rpta. x = 55°

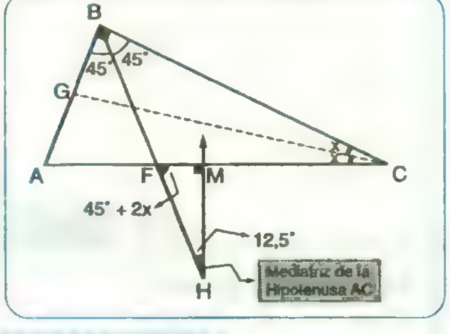
PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1 La bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo y la mediatriz de la hipotenusa forman un ángulo de 12°30'. ¿Cuánto mide el ángulo que forman la hipotenusa con la bisectriz del ángulo menor?

A) 22°30' **B)** 12°30' **C)** 16°15' **D)** 18°45' **E)** 25°

Resolución:



- Sea ABC, el triángulo rectángulo y "C" el ángulo menor.
- Sea «x» el ángulo pedido.

  En el Δ FBC, por el teorema del $\angle$ exterior:

  m $\angle$ Exterior F = 45° + 2x

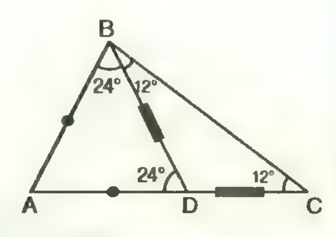
- En el ◺ FMH:

  (45º + 2x) + 12,5° = 90° ⇒ **x = 16,25° = 16°15'** **Rpta. C**

2 Dado el triángulo ABC, tal que: AB < AC, se toma sobre este último lado una longitud AD = AB y resulta que el punto «D» equidista de los vértices B y C . Hallar m $\angle$ B, si m $\angle$ C = 12º

A) 12° **B)** 24° **C)** 36° **D)** 18° **E)** 72°

Resolución:



- Construimos la figura del problema:
- El Δ BDC es isósceles:

  m $\angle$ DBC = m $\angle$ C = 12°

- En el $\angle$BDC, por el teorema del $\angle$exterior:

  m $\angle$ BDA = 12° + 12° = 24°

- El Δ ABD es isósceles: m ∠ ADB = m ∠ ABD = 24°

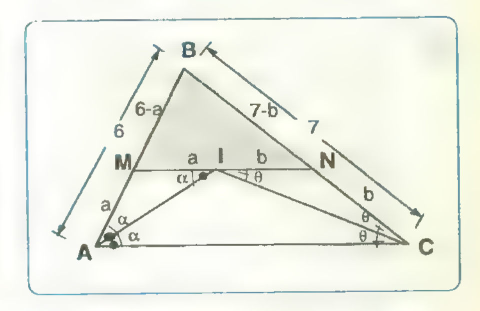
- Finalmente: m ∠ B = 24° + 12° = 36° **Rpta. C**

3. En un triángulo ABC; AB = 6; BC = 7. Por el incentro se traza MN // AC (M en AB y N en $\overline{BC}$). Calcular el perímetro del triángulo MBN

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

Resolución:

- Sea «I» el incentro del Δ ABC, luego por ángulos alternos internos deducimos que:



- el Δ AMI es isósceles

⟹ AM = MI = a

- el Δ CNI es isósceles

⟹ CN = NI = b

- Luego: Perímetro Δ MBN = (6 - a) + (7 - b) + (a + b)

Perímetro Δ MBN = 13 **Rpta. C**

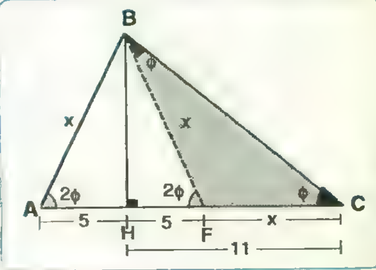
4. En un triángulo ABC se traza la altura relativa a $\overline{AC}$ que divide a ésta en dos segmentos de 5 y 11 metros. Hallar AB, si AB < BC y m ∠ A = 2m ∠ C

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5,5 **E)** 9

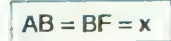
Resolución:

- Sea: $\overline{BH}$ la altura trazada.

Por Datos: AH = 5 ; HC = 11



- Aprovechando que el ∠ A mide el doble del ∠ C trazamos $\overline{BF}$, tal que


AB = BF = x

- Entonces el Δ ABF es isósceles, luego

AH = HF = 5 y m ∠ BAF = m ∠ BFA = 2ϕ

- En el Δ BFC, por el teorema del ∠ exterior:

$2\phi = m\angle FBC + \phi \Rightarrow$ **$m\angle FBC = \phi$**

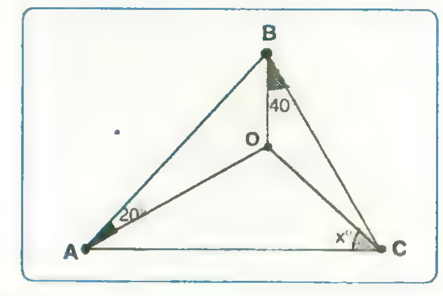
- Luego como el Δ BFC tiene dos ángulos iguales a "ϕ", será isósceles.

  Entonces: **$FC = BF = x$**

- Finalmente: $HF + FC = HC$

  $\Rightarrow 5 + x = 11 \Rightarrow$ **$x = 6$** **Rpta. C**

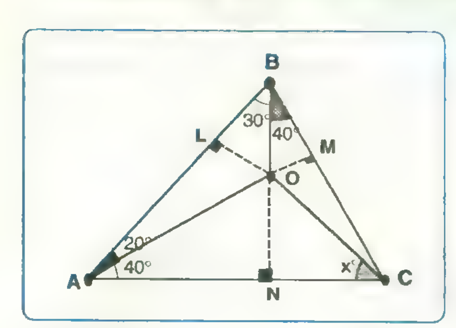
5 Calcular «x» si «O» es el ortocentro del triángulo ABC



A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 35°

Resolución:

- El **Ortocentro** es el punto de intersección de las 3 alturas, luego las prolongaciones de $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ y $\overline{CO}$ serán alturas:



- Por ángulos complementarios:

  ◺ AMB: $m\angle ABN = 30°$

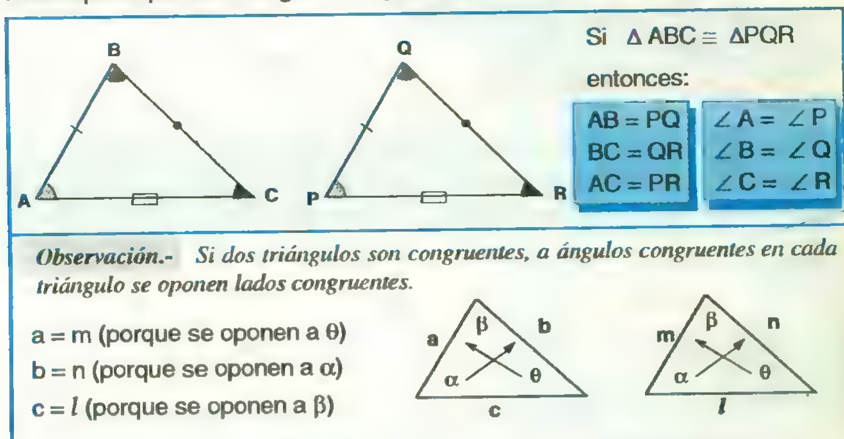
  ◺ BNA: $m\angle MAC = 40°$

  ◺ ALC: $x + 60° = 90°$

  $x = 30°$ **Rpta. C**

5.4.5 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

- **DEFINICIÓN.-** Dos triángulos ABC y PQR (ver la figura) son congruentes si tienen sus lados respectivamentecongruentes y sus ángulos también congruentes. Esto implica que dos triángulos congruentes tienen igual forma e igual tamaño.



Si $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

entonces:

AB = PQ	$\angle A = \angle P$
BC = QR	$\angle B = \angle Q$
AC = PR	$\angle C = \angle R$

Observación.- Si dos triángulos son congruentes, a ángulos congruentes en cada triángulo se oponen lados congruentes.

a = m (porque se oponen a θ)

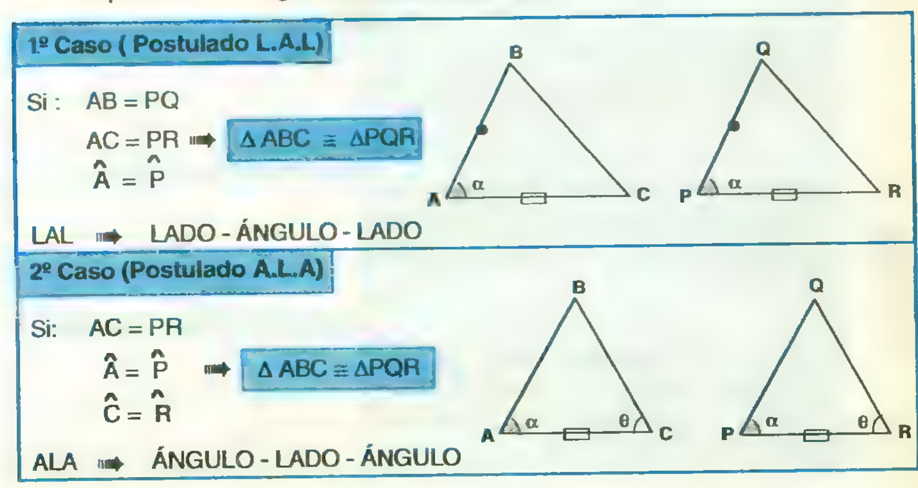
b = n (porque se oponen a α)

c = *l* (porque se oponen a β)

- **CASOS DE CONGRUENCIA.**

Para afirmar que dos triángulos son congruentes no es necesario verificar que los seis pares de elementos (3 lados y 3 ángulos) son congruentes; es necesario y suficiente con constatar que solamente tres pares de elementos sean congruentes, donde por lo menos uno de estos pares de elementos deben de ser lados.

Se presentan los siguientes casos generales.



1º Caso (Postulado L.A.L)

Si : AB = PQ

AC = PR ➡ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

$\hat{A} = \hat{P}$

LAL ➡ LADO - ÁNGULO - LADO

2º Caso (Postulado A.L.A)

Si: AC = PR

$\hat{A} = \hat{P}$ ➡ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

$\hat{C} = \hat{R}$

ALA ➡ ÁNGULO - LADO - ÁNGULO

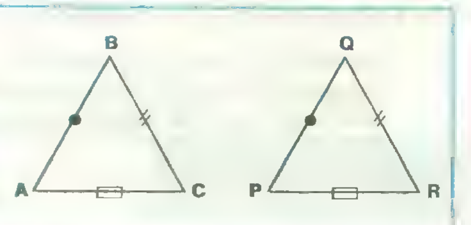
3º Caso (Postulado L.L.L)

Si: AB = PQ

BC = QR ➡ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

AC = PR

LLL ➡ LADO - LADO - LADO



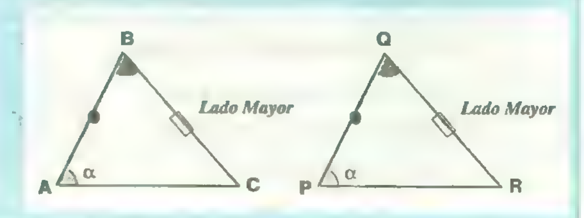
Nota.- *Existe un 4º caso que lo llamaremos teorema* ***Ángulo - Lado - Lado mayor****, que nos permite afirmar la congruencia de dos triángulos si dos lados son congruentes y el ángulo opuesto al mayor de estos lados tambien congruente.* BC > AB QR > PQ

Si: A = P

AB = PQ

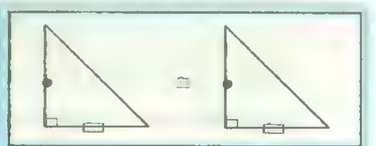
BC = QR

➡ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

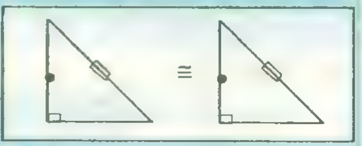


- **Caso Particular:** La Congruencia de triángulos rectángulos se deduce de los anteriores cuatro casos.

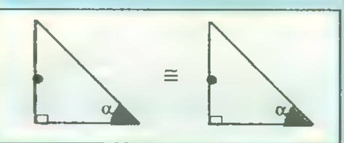
1ᴱᴿ CASO.- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen los catetos respectivamente congruentes.



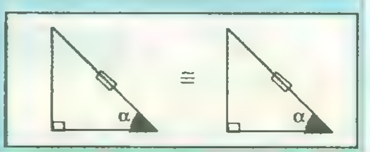
2ᴰᴼ CASO.- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto y la hipotenusa respectivamente congruentes.



3ᴱᴿ CASO.- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto y el ángulo opuesto (ó adyacente) respectivamente congruentes.

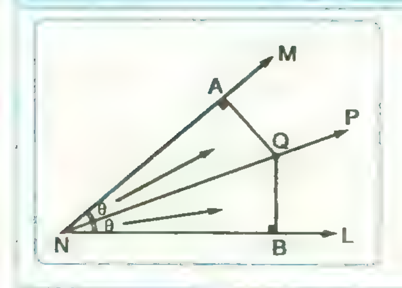


4º CASO.- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un ángulo adyacente respectivamente congruentes.



5.4.6 APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

TEOREMA DE LA BISECTRIZ.- Todo punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo



HIPÓTESIS:

En la figura: $\overrightarrow{NP}$ es bisectriz del ∠ MNL, "Q" es un punto de esta bisectriz.

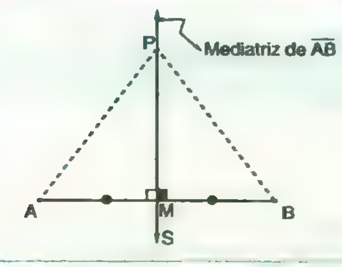
Se demostrará que:

TESIS: QA = QB

Demostración

Afirmaciones	Razones
1. ◺ QAN ≅ ◺ QBN	**1.** Por tener igual hipotenusa e igual ángulo adyacente (θ)
2. ∴ QA = QB y también AN = BN	**2.** Por igualdad de elementos correspondientes (es decir aquellos que se oponen a ángulos iguales en cada triángulo).

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ. Todo punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento



HIPÓTESIS:

En la figura $\overleftrightarrow{S}$ es la mediatriz del segmento AB.

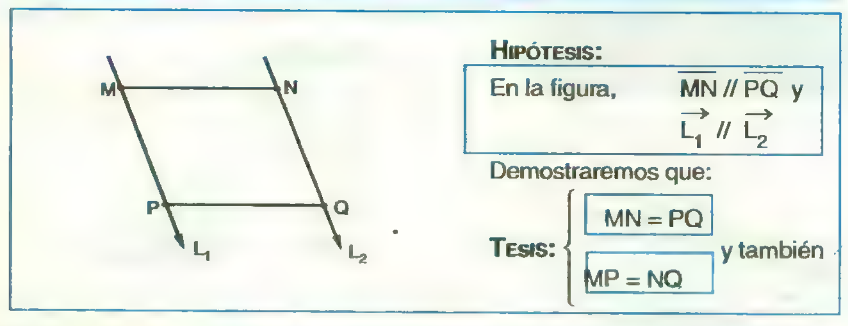
Demostraremos que:

TESIS: PA = PB

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ y AM = MB	**1.** Definición de mediatriz
2 ◺ PMA ≅ ◺ PMB	**2** Por tener los catetos respectivamente iguales.
3 ➡ PA = PB	**3** Igualando elementos correspondientes.

TEOREMA DE LOS SEGMENTOS PARALELOS COMPRENDIDOS ENTRE PARALELAS: Si dos segmentos son paralelos y además están comprendidos entre dos rectas paralelas, entonces dichos segmentos serán congruentes en longitud.



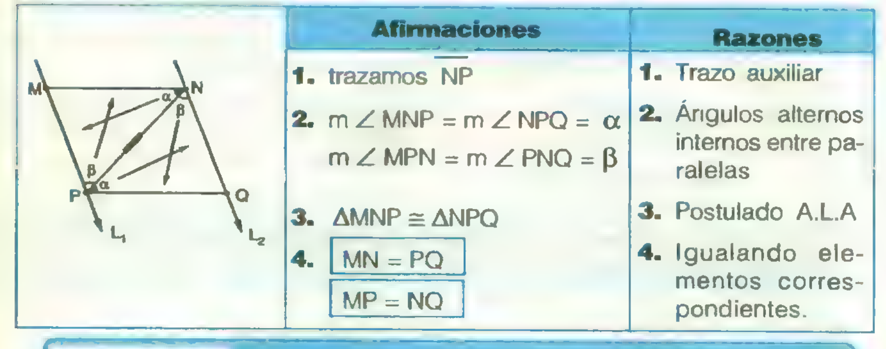
HIPÓTESIS:

En la figura, $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ y $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$

Demostraremos que:

TESIS: $MN = PQ$ y también $MP = NQ$

Demostración

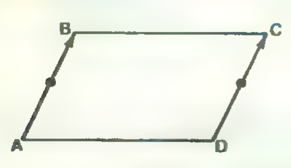


Afirmaciones	Razones
1. trazamos $\overline{NP}$	**1.** Trazo auxiliar
2. $m\angle MNP = m\angle NPQ = \alpha$ $m\angle MPN = m\angle PNQ = \beta$	**2.** Ángulos alternos internos entre paralelas
3. $\Delta MNP \cong \Delta NPQ$	**3.** Postulado A.L.A
4. $MN = PQ$ $MP = NQ$	**4.** Igualando elementos correspondientes.

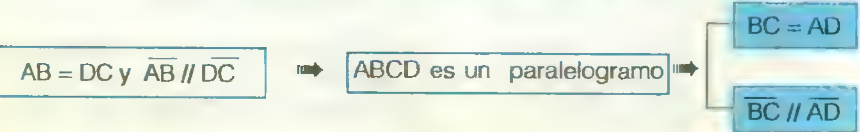
Nota Importante: *Al cuadrilátero MNQP, que tiene sus lados opuestos respectivamente paralelos se le llama: PARALELOGRAMO*

COROLARIOS:

1. En todo PARALELOGRAMO: los lados opuestos son congruentes y paralelos.
2. Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son congruentes y paralelos entonces dicho cuadrilátero es un **paralelogramo**

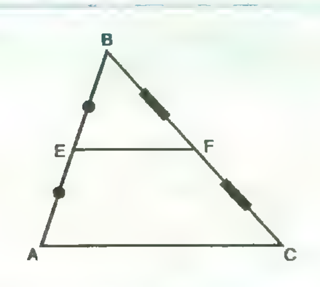


Asi en la figura adjunta:



$AB = DC$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ➡ ABCD es un paralelogramo ➡ $BC = AD$; $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

TEOREMA DE LOS PUNTOS MEDIOS. En todo triángulo, el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y mide la mitad de su longitud.



HIPÓTESIS:

En la Figura adjunta:

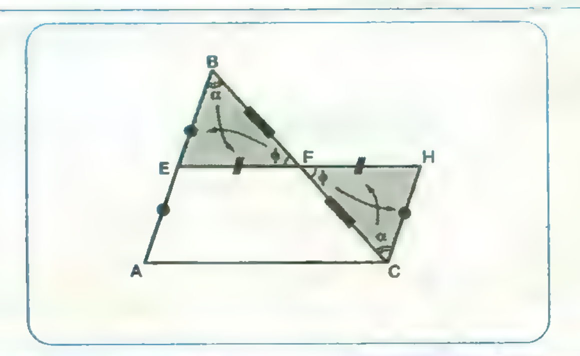
"E" → punto medio de $\overline{AB}$

"F" → punto medio de $\overline{BC}$

Demostraremos que:

TESIS: **I)** $\overline{EF} // \overline{AC}$ **II)** EF = 1/2 (AC)

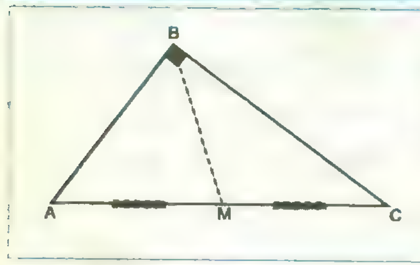
Demostración



Afirmaciones	**Razones**
1. Desde "C" trazamos una paralela a AB que con la prolongación de EF se cortan en "H"	**1.** Trazos auxiliares
2. m ∠ ABC = m ∠ BCH = α	**2.** Ángulos alternos internos
3. Δ EBF ≅ Δ HCF EF = FH y HC = EB	**3.** Postulado A.L.A e igualdad de elementos correspondientes.
4. El □ AEHC es un PARALELOGRAMO	**4.** Porque tiene dos lados opuestos congruentes y paralelos (AE y CH) (Corolario Nº 2 del T. de los segmentos paralelos entre paralelas)
5. ⇒ $\overline{EH} // \overline{AC}$ ⇒ $\overline{EF} // AC$ ⇒ EH = AC ⇒ EF = 1/2 AC	**5.** Porque el paralelogramo tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos e congruentes.

COROLARIO Si por el punto medio del lado de un triángulo se traza una paralela a un segundo lado, dicha paralela cortará al tercer lado también en su punto medio.

TEOREMA DE LA MEDIANA QUE CAE EN LA HIPOTENUSA: En todo triángulo rectángulo la mediana que cae en la hipotenusa mide la mitad de la misma.



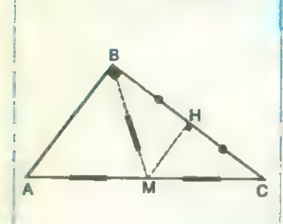
HIPÓTESIS:

En la Figura adjunta: $\overline{BM}$ es mediana (AM = MC)

Demostraremos que:

TESIS: BM = 1/2 (AC)

Demostración:



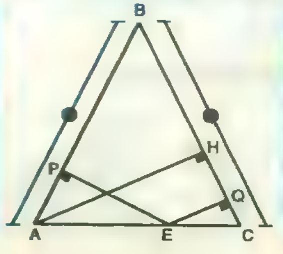
Nota: Observar que siempre que en un ◺ *se traza la mediana $\overline{BM}$. aparecen dos triángulos isósceles:*

ΔAMB y ΔBMC

Afirmaciones	Razones
1. Tomamos "H" punto medio de $\overline{BC}$ y trazamos $\overline{MH}$	1. Trazo auxiliar
2. ➡ $\overline{MH} \parallel \overline{AB}$ ➡ $\overline{MH} \perp \overline{BC}$	2. Por el teorema de los puntos medios
3. El Δ BMC es isósceles: BM = MC	3. Porque $\overline{MH}$ es altura que cae en el punto medio (corolario del T. del Δ isósceles)
4. AM = MC ➡ $MC = \frac{1}{2}(AC)$	4. Hipótesis y definición de punto medio de un segmento
5. ∴ $BM = \frac{1}{2}(AC)$	5. Conclusión de los pasos (3) y (4)

TEOREMA: La suma de las longitudes de los segmentos perpendiculares trazados desde un punto de la base de un triángulo isósceles a los lados congruentes, es igual a la altura que cae sobre uno de los lados iguales.

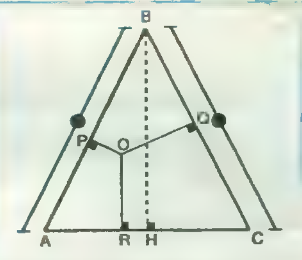
EP + EQ = AH



Nota: Las alturas que caen sobre los lados congruentes de un Δ isósceles son congruentes.

TEOREMA: La suma de las longitudes de los segmentos perpendiculares, trazados desde un punto interior de un triángulo equilátero a los tres lados, es igual a la altura del triángulo.

$$OP + OQ + OR = BH$$



Nota: Los lados de un triángulo equilatero son congruentes.

5.4.7 PRINCIPALES TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Se denomina triángulo rectángulo notable a aquel que, conociendo las medidas de sus ángulos se conoce también la relación que guardan entre sí las longitudes de sus lados.

Los principales triángulos rectángulos notables son:

A Notable de 30º y 60°

* El cateto opuesto a 30° mide la mitad de la hipotenusa
* El cateto opuesto a 60° mide la mitad de la hipotenusa por $\sqrt{3}$

60° ; a ; $\frac{a}{2}$; 30° ; B ; $\frac{a}{2}\sqrt{3}$

B Notable de 45º y 45º

* Los catetos son iguales
* La hipotenusa mide igual que un cateto por $\sqrt{2}$
* Un cateto mide igual que la hipotenusa entre $\sqrt{2}$

45° ; $a\sqrt{2}$; a ; 45° ; a

C. Notable de 15º y 75º

* La altura que cae sobre la hipotenusa mide la cuarta parte de ésta.

$$BH = \frac{AC}{4}$$

B ; h ; 75° ; 15° ; A ; H ; C ; 4h

D Notable de 37° y 53º (Relación Aprox.)

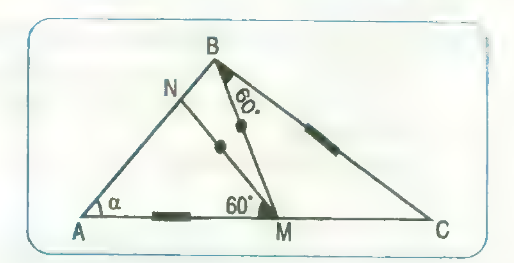
* Las longitudes de los lados están en la relación de 3; 4 y 5

$$\frac{AB}{3} = \frac{BC}{4} = \frac{AC}{5}$$

B ; 53° ; 5K ; 3K ; 37° ; A ; 4K ; C

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO IBM
SOBRE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

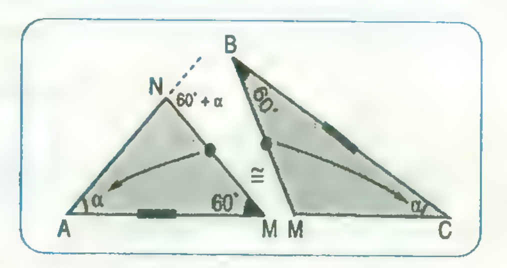
1) En la siguiente figura: AM = BC; BM = MN; m ∠MBC = 60°. Calcular "α"

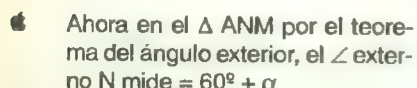


A) 10° B) 15°
C) 20° D) 25°
E) 30°

Resolución:

- Del gráfico del problema extraemos los triángulos ANM y MBC que serán congruentes por el postulado L.A.L

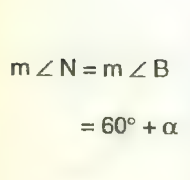




En el Δ ANM :a $\overline{MN}$ se opone "α"

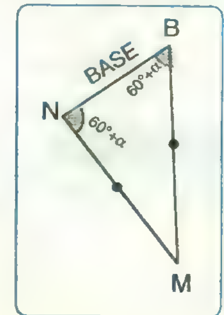
En el Δ MBC: a $\overline{MB}$ también se le debe oponer "α"

- Ahora en el Δ ANM por el teorema del ángulo exterior, el ∠ externo N mide = 60º + α
- Como el Δ BMN es isósceles tendrá dos ángulos congruentes en la base:

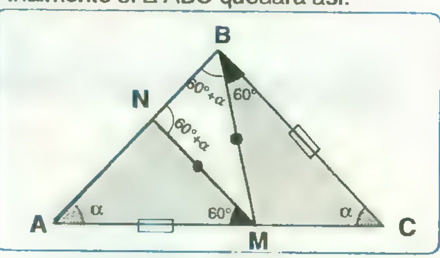


m ∠ N = m ∠ B

= 60° + α



Finalmente el Δ ABC quedará así:



$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$$

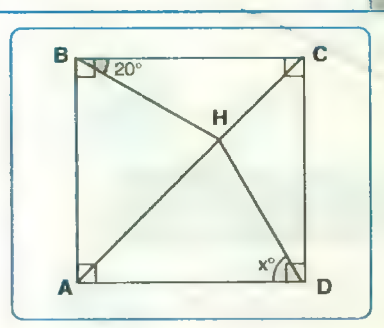
$$\alpha + (60° + \alpha + 60°) + \alpha = 180°$$

$$3\alpha + 120° = 180°$$

Rpta. C

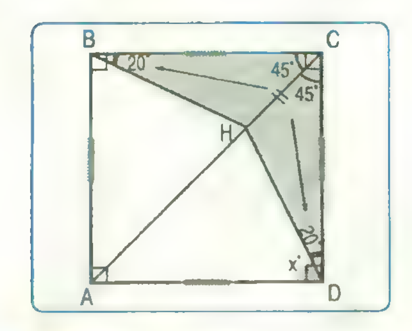
$\alpha = 20°$

2 En el gráfico: ABCD es un cuadrado.
Calcular "x°"



A) 45°
B) 50°
C) 55°
D) 60°
E) 70°

Resolución:



- El cuadrado tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos y la diagonal tiene la propiedad de ser bisectriz del ángulo recto.
- Entonces: $\Delta BCH \cong \Delta DCH$ (L.A.L)

$$m\angle CDH = m\angle CBH = 20°$$

- Luego en el ángulo recto "D":

$$x + 20° = 90°$$

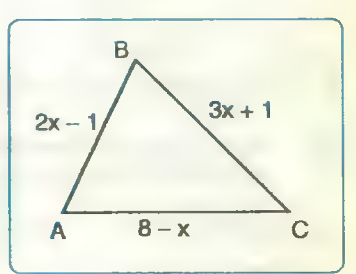
Rpta. E

3 En un triángulo ABC: AB = 2x - 1, BC = 3x + 1; AC = 8 - x, indicar la longitud del mayor lado ($x \in \mathbb{Z}$)

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Resolución:

- Primero hallamos el intervalo al cual pertenece "x", por el teorema de la desigualdad triangular:

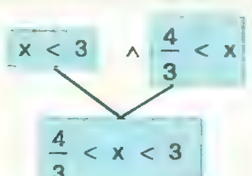


$$BC - AB < AC < BC + AB$$

⇒ $(3x + 1) - (2x - 1) < 8 - x < (3x + 1) + (2x - 1)$

⇒ $x + 2 < 8 - x < 5x$

➟ $x+2 < 8-x \wedge 8-x < 5x$



y como "x" es entero ➟ $x = 2$

- Reemplazando en cada lado:

$AB = 2x - 1 = 2(2) - 1 = 3$

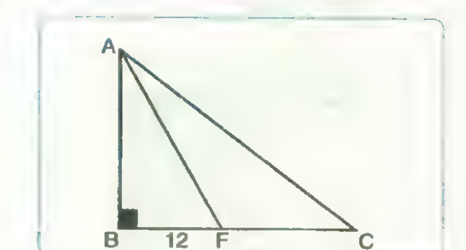
$BC = 3x + 1 = 3(2) + 1 = 7$

$AC = 8 - x = 8 - 2 = 6$

∴ El mayor lado mide 7 **Rpta. C**

4 En el ◺ ABC; hallar la distancia del punto medio de la bisectriz $\overline{AF}$ a la hipotenusa $\overline{AC}$. $BF = 12$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6



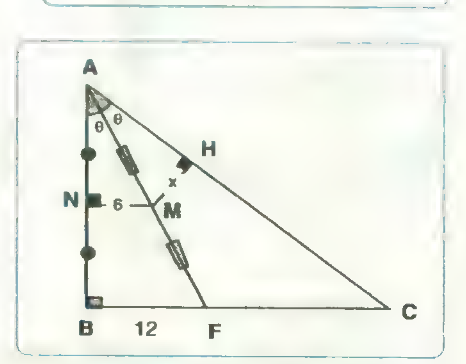
Resolución:

- La distancia pedida es $MH = x$
- Como "M" es punto medio de $\overline{AF}$, aprovechamos para trazar $\overline{MN} // \overline{FB}$ y por el teorema de los puntos medios:

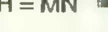
"N" : será punto medio de $\overline{AB}$; y también:

$$MN = \frac{FB}{2} = \frac{12}{2}$$

$$MN = 6$$



- Por el teorema de la bisectriz: $MH = MN$ ➟ $x = 6$ **Rpta. E**



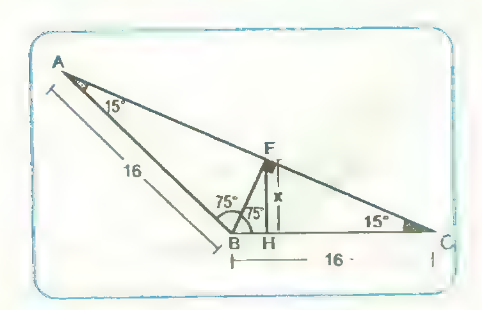
5 En un triángulo isósceles ABC: $AB = BC = 16$ mts; $m\angle BAC = 15°$. Se traza la altura $\overline{BF}$. Calcular la distancia de "F" al lado $\overline{BC}$

A) 2m B) 4m C) 6m D) 8m E) 16m

Resolución:

- Se deduce que los ángulos iguales son "A" y "C" y el ángulo "B" mide 150°

Debemos calcular: $FH = x$



- Como el Δ ABC es isósceles la altura BF será también bisectriz.
- El ◺ BFC: es notable de 15° y 75°

entonces:

$$FH = \frac{BC}{4}$$

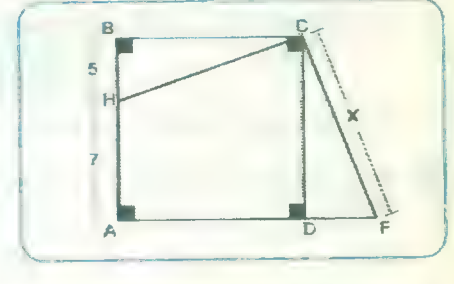
$$FH = \frac{16}{4} = 4m$$ **Rpta.B**

6. La figura muestra a un cuadrado ABCD.

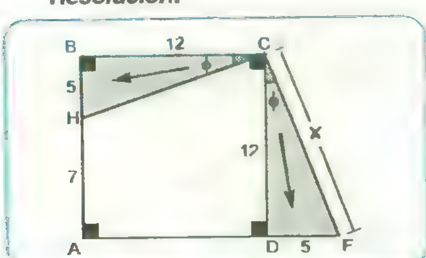
BH = 5 ; HA = 7 ; m∠HCF = 90°

Calcular: "CF"

A) 10 **B)** 11 **C)** 12
D) 13 **E)** 14



Resolución:



- El lado del cuadrado mide 12 y se deduce que los ángulos: BCH y DCF son iguales.

Sea: m∠BCH = ϕ ➡ m∠DCF = ϕ

- ◺ HBC ≅ ◺FDC (Por que tienen igual cateto e igual ángulo adyacente)

DF = BH = 5

- Finalmente en el◺ FDC, por el teorema de Pitágoras:

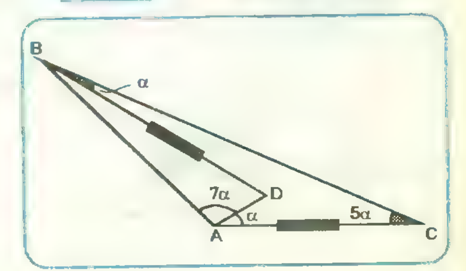
$x^2 = 5^2 + 12^2$ ➡ $x^2 = 169$ ➡ $x = 13$ **Rpta. D**

7. En la siguiente figura:

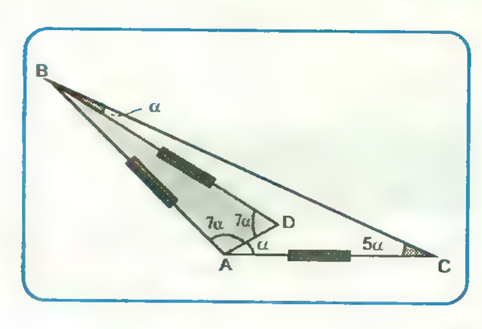
BD = AC

Calcular: "α"

A) 8° **B)** 9° **C)** 10°
D) 12° **E)** 15°



Resolución:



- Por Propiedad en el △BCAD:
  m ∠ BDA = α + 5α + α

  m ∠ BDA = 7α

- En el Δ ABD, vemos que m ∠ BAD = m ∠ BDA = 7α, luego este triángulo es isósceles; entonces:

  BA = BD

- El Δ BAC, también resulta ser isósceles, luego: m ∠ ABC = m ∠ ACB = 5α

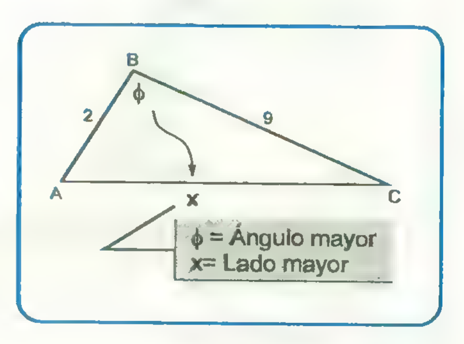
  ➡ **m ∠ ABD = 4α**

- Por último en el Δ ABD: 7α + 7α + 4α = 180° ➡ **α = 10°** **Rpta.C**

8. En un triángulo ABC, obtuso en B : AB = 2; BC = 9; Calcular "AC" si es un número entero.

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

Resolución:



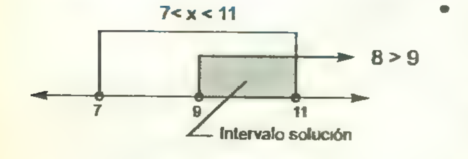
- Por el teorema que nos dice: "A mayor ángulo se opone mayor lado", en el Δ ABC:

  x > 9 ... (1)

- Por el teorema de la desigualdad triangular en el Δ ABC:

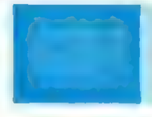
  9 - 2 < x < 9 + 2

  7 < x < 11 ... (2)



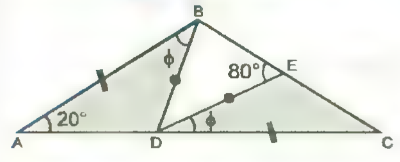
- De (1) y (2) la solución se obtiene hallando la intersección de los intervalos así:

  Luego 9 < x < 11 y como x es entero entonces **x = 10** **Rpta.B**



TALLER DE PROBLEMAS N° 22

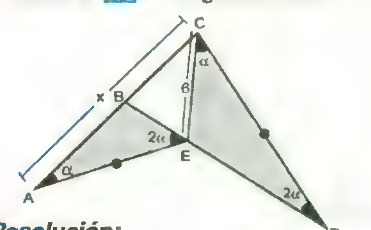
Problema 1: Del gráfico, hallar "ϕ"



Resolución:

Rpta. 60°

Problema 2: Del gráfico hallar "x"

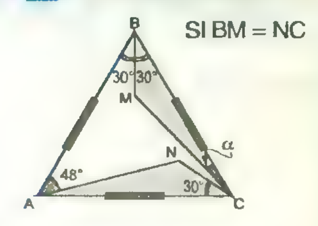


Resolución:

Rpta. x = 12

Problema 3: Del gráfico, hallar "α"

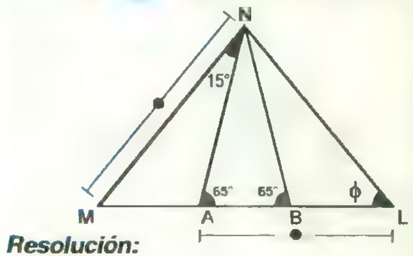
SI BM = NC



Resolución:

Rpta. $\alpha = 12°$

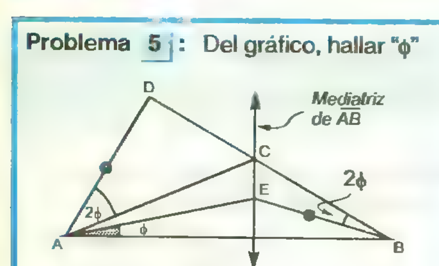
Problema 4: Del gráfico, calcular "ϕ"



Resolución:

Rpta. $\phi = 50°$

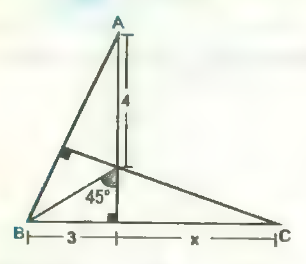
Problema 5: Del gráfico, hallar "ϕ"



Resolución:

Rpta. $\phi = 10$

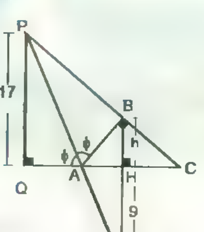
Problema 6: Del gráfico, hallar "x"



Resolución:

Rpta. $x = 7$

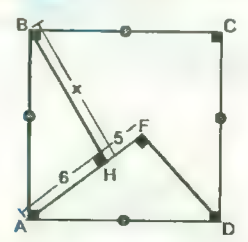
Problema 7: Del gráfico, hallar "h"



Resolución:

Rpta. $h = 8$

Problema 8: Del gráfico, hallar "x"



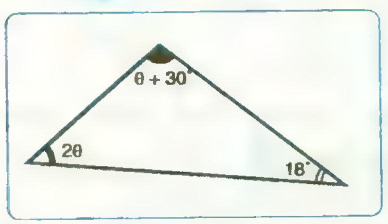
Resolución:

Rpta. $x = 1$

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE TRIÁNGULOS

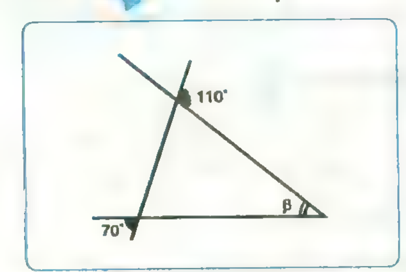
NIVEL I

Problema 1 : Calcular "θ"



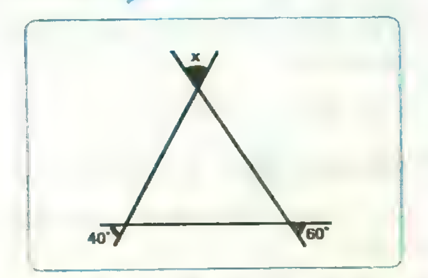
A) 32° **B)** 44° **C)** 33° **D)** 15° **E)** N.A

Problema 2 : Calcular "β"



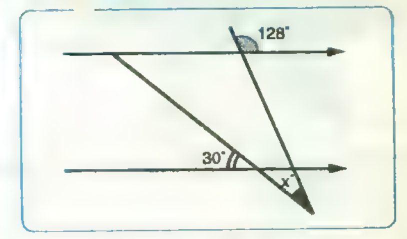
A) 20° **B)** 30° **C)** 35° **D)** 40° **E)** N.A

Problema 3 : Calcular "x"



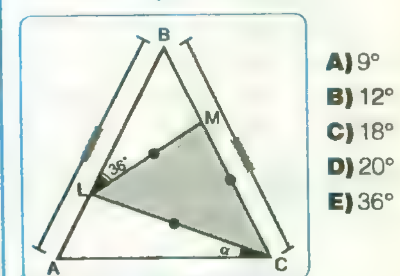
A) 85° **B)** 75° **C)** 100° **D)** 80° **E)** 110°

Problema 4 : Siendo $\overrightarrow{m} // \overrightarrow{n}$, el valor de "x" es:



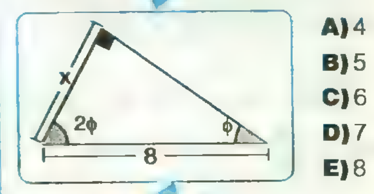
A) 8° **B)** 10° **C)** 22° **D)** 30° **E)** 38°

Problema 5 : Calcular α



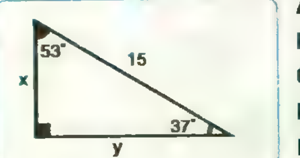
A) 9°
B) 12°
C) 18°
D) 20°
E) 36°

Problema 6 : Hallar x



A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

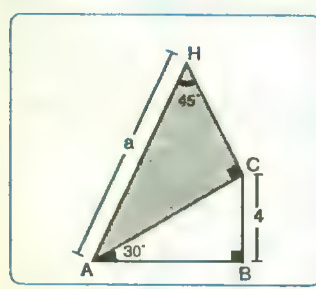
Problema 7 : Hallar x + y



A) 18
B) 19
C) 21
D) 23
E) 30

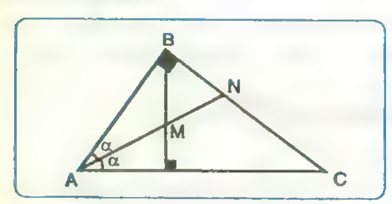
Problema

: Calcular "a"



A) $4\sqrt{2}$
B) $8\sqrt{2}$
C) 8
D) $2\sqrt{2}$
E) 12

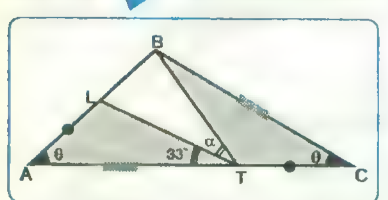
Problema 9 : Menciona al triángulo que es isósceles



A) ΔAMB **B)** ΔABN **C)** ΔANC
D) ΔABC **E)** ΔMBN

Problema

: Del gráfico hallar "α"



A) 42° **B)** 38° **C)** 66° **D)** 44° **E)** 22°

Problema 11 : En un Δ ABC

$m\angle A = m\angle B + 10°$;

$m\angle C = 30°$; $m\angle B = ?$

A) 30º B) 60º C) 70º
D) 80º E) N.A

Problema

: En un Δ ABC:

$$\frac{m\hat{A}}{2} = \frac{m\hat{B}}{3} = \frac{m\hat{C}}{4}$$

¿Cuánto mide el ángulo que forman las bisectrices interiores de $\hat{A}$ y $\hat{B}$?

A) 105° **B)** 110° **C)** 120° **D)** 130° **E)** 140°

Problema 13 : En un Δ ABC:

$m\angle A + m\angle B = 140º$; $m\angle B + m\angle C = 107°$
Hallar $m\angle B$.

A) 73° **B)** 67° **C)** 40° **D)** 80° **E)** 97°

Problema 14 : Los ángulos internos de un triángulo ABC miden:

$m\angle A = \phi°$; $m\angle B = 6\phi°$; $m\angle C = 5\phi°$

Si AC = 14m ¿Cuánto mide la altura $\overline{BH}$?

A) 3m **B)** 3,5m **C)** 4m **D)** 4,5m **E)** 6m

Problema

: En un Δ ABC:

$m\angle A - m\angle B = 14° + \alpha°$;

$m\angle A - m\angle C = 16° - \alpha°$

¿Cuánto mide el ángulo A?

A) 55° **B)** 24° + α° **C)** 72° - α°
D) 70° **E)** 66°

Problema 16 : Los lados de un Δ ABC miden "a", "b" y "c". Si: a + b = 14; b + c = 18 y a + c = 16. El perímetro del triángulo es:

A) 13 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 28 **E)** 30

Problema

: En un Δ MNL:

MN = 7 ; NL = 10, el mayor valor entero de ML es:

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 18

Problema 18 : En un Δ PQR, "Q" es el mayor ángulo interno, PQ = 2 ; QR = 13, Calcular "PR" sabiendo que es un número entero.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Problema 19 : En un Δ ABC. se traza la bisectriz interior BP. Si AB = BP = PC, ¿Cuánto mide el ángulo A?

A) 18° B) 32° C) 36° D) 64° E) 72°

Problema 20 : En un Δ PTQ, cuyo ángulo "T" es recto, la bisectriz del ángulo "P" con la mediatriz de $\overline{PQ}$ forman un ángulo que mide 64° ¿Cuánto mide el ángulo Q?

A) 38° B) 26° C) 52° D) 48° E) N.A

Problema 21 : En un Δ EFH, las bisectrices de los ángulos E y H se cortan en "Q". Si m$\angle$EQH = 8m$\angle$EFH. ¿Cuánto mide el ángulo interno F?

A) 8° B) 12° C) 14° D) 18° E) 23°

Problema 22 : En un $\triangle$ ABC, recto en B, la mediana BM y la bisectriz AF forman un ángulo de 96º. El ángulo C mide:

A) 17° B) 28° C) 34°
D) 26° E) Hay 2 respuestas

Problema 23 : Los lados de un Δ ABC miden: AB = 120 cm; BC = 130 cm; AC = 150 cm. En su interior se ubica un punto "P" tal que la suma: PA + PB + PC es un número entero de metros. Dicha suma es:

A) 1m B) 2m C) 3m D) 4m E) 5m

Problema 24 : En un ΔABC; AB = 12 ; BC = 2x + 5 ; AC = x - 2 ¿Cuál es el valor entero de "x" para que el triangulo exista?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Problema 25 : Un punto de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles dista de catetos 5 y 7 unidades. La hipotenusa mide:

A) 8 B) 12 C) 10
D) $12\sqrt{2}$ E) $13\sqrt{2}$

Problema 26 : Los ángulos internos de un triángulo están en progresión aritmética de razón 20°. ¿Cuánto mide el ángulo agudo que forma la bisectriz interior del menor ángulo con la bisectriz exterior del mayor ángulo?

A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 50°

Problema 27 : En un $\triangle$ ABC, recto en B se traza la mediana BT y sobre $\overline{AB}$ se toma un punto "L" de modo que LB = LT. Si m$\angle$BCA = 2m$\angle$LTA, ¿Cuánto mide el $\angle$ LTA?

A) 16° B) 17° C) 18° D) 19° E) 21°

Problema 28 : En un $\triangle$ AOB, recto en O, las bisectrices exteriores de los ángulos A y B forman un ángulo que mide:

A) 15° B) 30° C) 37° D) 45° E) 60°

Problema 29 : En un Δ ABC: m$\angle$A = 75°; m$\hat{C}$=30°, AC=12m. La altura $\overline{BH}$ mide:

A) 2m B) 3m C) 4m D) 6m E) 8m

Problema 30 : Se tiene un triángulo isósceles ABC (AB = BC). En el exterior

se construye el cuadrado BMNC. ¿Cuánto mide el ángulo MAC?

A) 45° B) 44° C) 38° D) 30° E) 36°

Clave de Respuestas

1. B	7. C	13. B	19. E	25. D
2. D	8. B	14. B	20. A	26. C
3. D	9. E	15. D	21. B	27. C
4. C	10. B	16. C	22. E	28. D
5. C	11. C	17. D	23. C	29. D
6. A	12. D	18. C	24. C	30. A

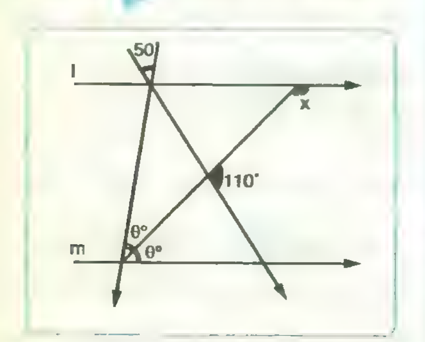
NIVEL II

Problema : El ΔABC es equilátero y $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$ calcular $\theta°$

A) 5°
B) 8°
C) 10°
D) 11°
E) 12°

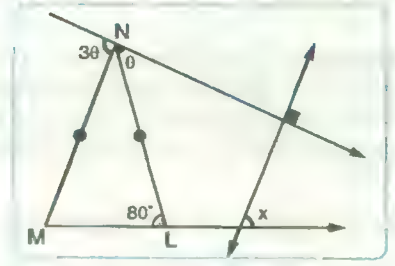
n B 140° m A C 160°

Problema : Siendo $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$, hallar "x"



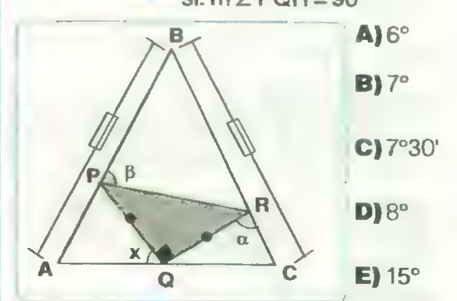
A) 135° B) 140° C) 150°
D) 160° E) 170°

Problema 3: Calcular "x"



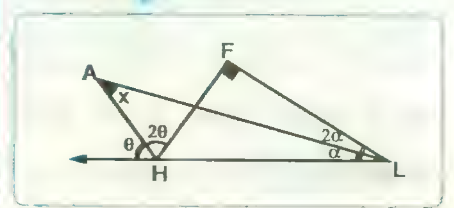
A) 40° B) 45° C) 50° D) 60° E) 65°

Problema : Si: $\alpha + \beta = 60°$, hallar x si: $m\angle PQR = 90°$



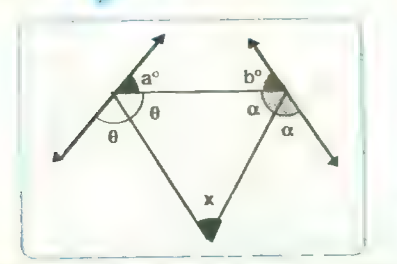
A) 6°
B) 7°
C) 7°30'
D) 8°
E) 15°

Problema : Calcular "x"



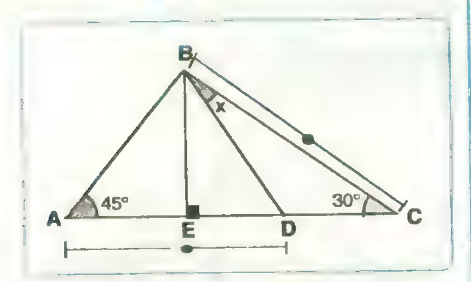
A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 45°

Problema : Si: a° + b° = 100°, hallar "x"



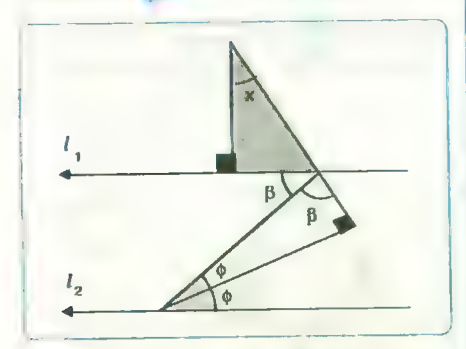
A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 50°

Problema : Hallar "x", si: AD = BC



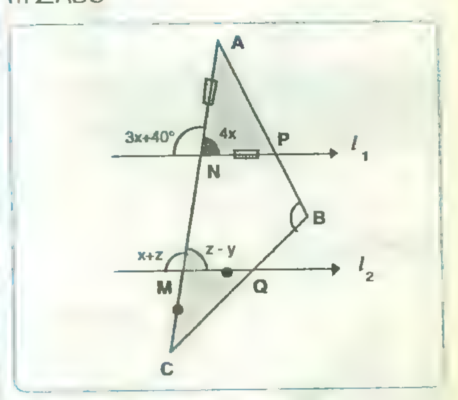
A) 8° B) 9° C) 10° D) 12° E) 15°

Problema : Siendo $\overleftrightarrow{l_1} // \overleftrightarrow{l_2}$, hallar "x"



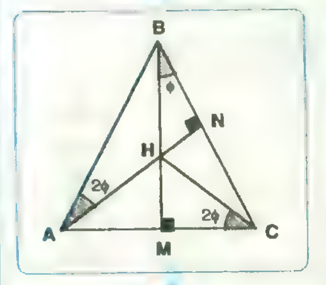
A) 33° B) 35° C) 12° D) 30° E) 42°

Problema : Siendo: $\overrightarrow{l_1} // \overrightarrow{l_2}$, hallar: m ∠ABC



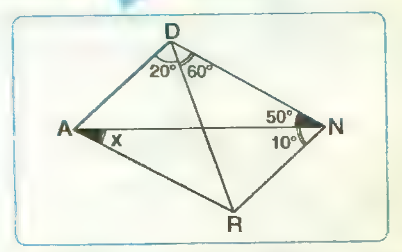
A) 90° B) 75° C) 100° D) 80° E) 60°

Problema : Calcular "ϕ"



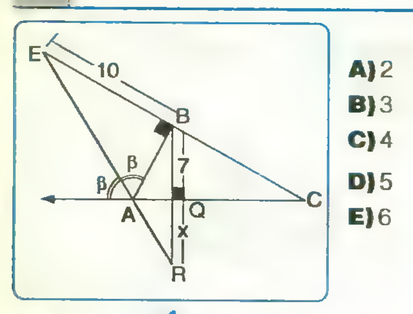
A) 18°
B) 19°
C) 22°
D) 23°
E) 24°

Problema : Calcular "x"



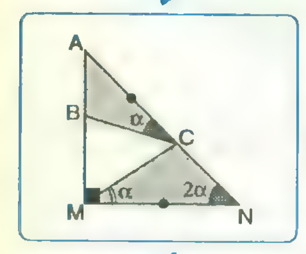
A) 10° B) 15° C) 20° D) 30° E) 45°

Problema : Calcular "x"



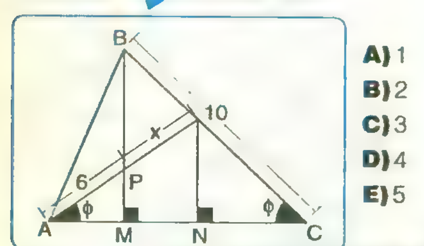
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Problema 13 : Calcular "α"



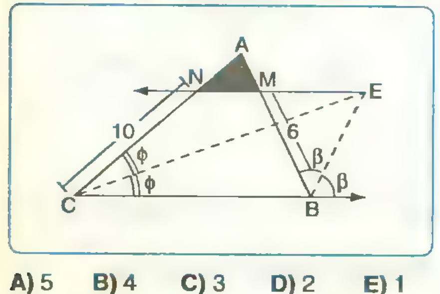
A) 22°30'
B) 15°
C) 18°
D) 18°30'
E) 37°

Problema 14 : Calcular "x"



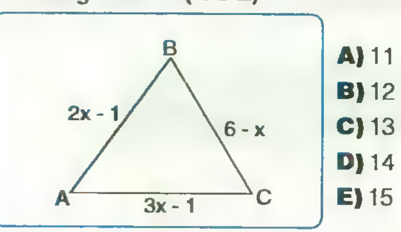
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Problema 15 : En el gráfico adjunto. MN // BC; CN = 10 ; BM = 6; hallar "MN"



A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Problema 16 : Calcular el perímetro del triángulo ABC ($X \in Z$)

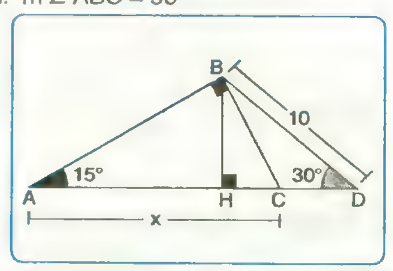


A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15

Problema 17 : Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón 3m. Hallar el mínimo valor entero del perímetro

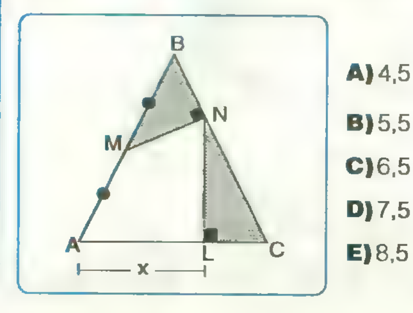
A) 18m B) 19m C) 20m D) 21m E) 22m

Problema 18 : Hallar "x" si: $m\angle ABC = 90°$



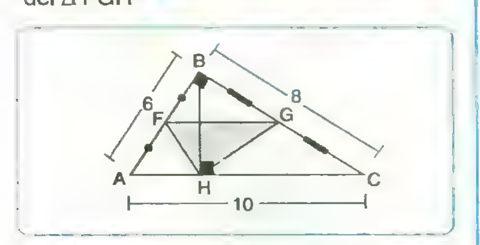
A) 12 B) 10 C) 15 D) 18 E) 20

Problema 19 : El perímetro del triángulo equilátero ABC es 36 metros. Hallar "x"



A) 4,5
B) 5,5
C) 6,5
D) 7,5
E) 8,5

Problema : Calcular el perímetro del Δ FGH



A) 6 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

Clave de Respuestas

1. C	**6. E**	**11. D**	**16. B**
2. D	**7. E**	**12. B**	**17. B**
3. C	**8. D**	**13. A**	**18. E**
4. C	**9. A**	**14. B**	**19. D**
5. C	**10. A**	**15. B**	**20. C**

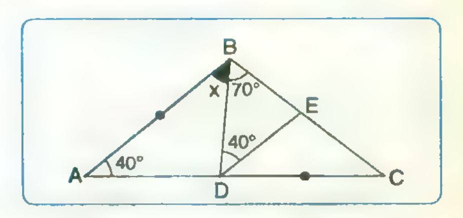
PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

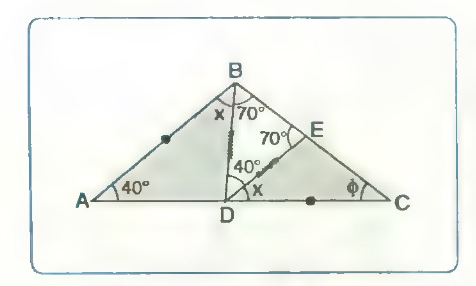
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Si: AB = CD Calcular «x»

A) 20º **B)** 25º **C)** 30º
D) 35º **E)** 40º



Resolución:



- El Δ BDE es isósceles ⇒ DB = DE
- Δ ABD ≅ Δ CDE (L.A.L)

  ➡ $\phi = 40^{\circ}$

- Δ ABC: $40^{\circ} + (x + 70^{\circ}) + \phi = 180^{\circ}$

  $40^{\circ} + (x + 70^{\circ}) + 40^{\circ} = 180^{\circ}$

  ➡ ∴ $x = 30^{\circ}$ **Rpta C**

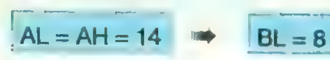
2 En un triángulo ABC, AB = 6, AC = 10. La bisectriz interior de A y las exteriores de C y B se cortan en F. Por "F" se traza la perpendicular FH a la prolongación

de $\overline{AC}$ (H sobre la prolongación de $\overline{AC}$); si AH = 14.
Calcular la medida de BC.

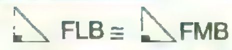
A) 8 B) 4 C) 10 D) 12 E) 14

Resolución:

- Trazamos: $\overline{FM} \perp \overline{BC}$ y $\overline{FL} \perp \overrightarrow{AB}$
- ◺ FHA ≅ ◺ FLA



AL = AH = 14 ➡ BL = 8

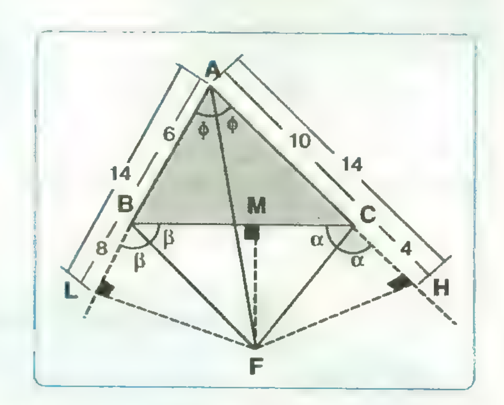


◺ FLB ≅ ◺ FMB

➡ BM = BL = 8 ... (1)

◺ FHC ≅ ◺ FMC

➡ MC = CH = 4 ... (2)



- Del gráfico: BC = BM + MC, reemplazando (1) y (2) obtenemos:

BC = 8 + 4 = 12 **Rpta. D**

3 Desde un punto interior de un triángulo equilátero, trazamos perpendiculares a los lados. La suma de estas perpendiculares es:

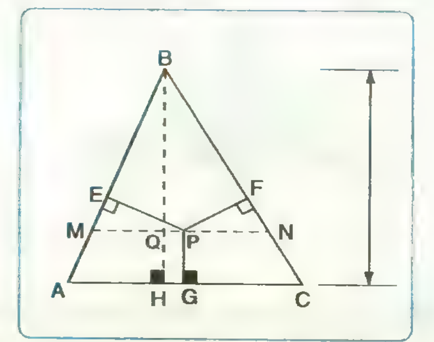
A) Mayor que la altura del triángulo
B) Igual que la altura del triángulo
C) Menor que la altura del triángulo
D) Depende del punto tomado
E) Igual al lado del triángulo

Resolución:

- Sea ABC, el triángulo equilátero y "P" el punto interior.
- Por "P" trazamos: $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$
- Por propiedad:

Δ MBN: PE + PF = BQ ...(1)

Pero: PG = QH ...(2)



- De (1) y (2) :

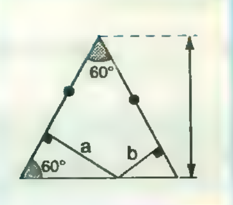
PE + PF + PG = BQ + QH

PE + PF + PG = h   **Rpta B**

Recuerda Que:

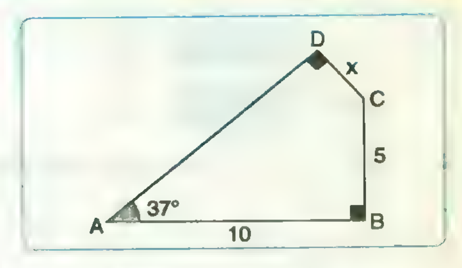
En todo
Δ equilátero:

a +b = h

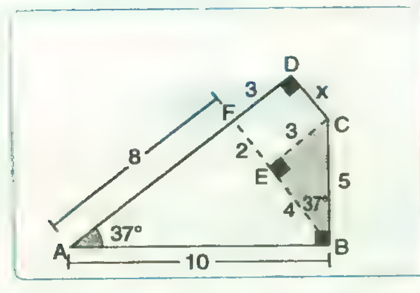


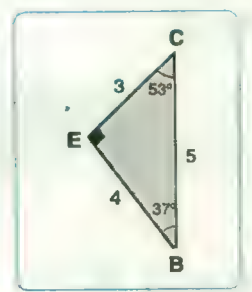
Del gráfico, hallar «x»

A) 1   **B)** 2
C) 3   **D)** 4
E) 5



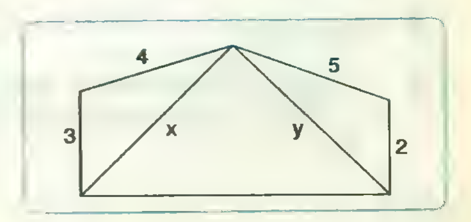
Resolución:





- Trazamos $\overline{BF} \perp \overline{AD}$, y $\overline{CE} \perp \overline{BF}$
- En el ⊿BFA, notable de 37° y 53°: BF = 6 y AF = 8
- En el ⊿CEB, notable de 37° y 53°: CE = 3 y EB = 4
- En el ▭ EFDC: x = 2   **Rpta. B**

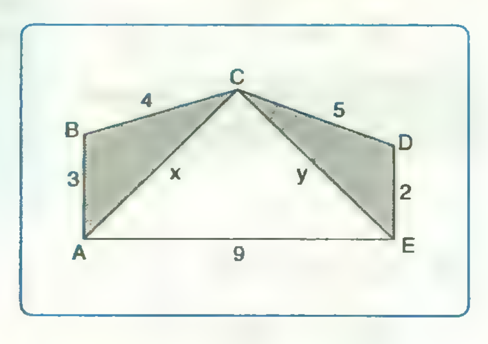
En la figura determinar los valores de la suma de «x» e «y» si dicha suma es un número entero. Dar como respuesta el número de soluciones.



A) 10   **B)** 11   **C)** 5   **D)** 4   **E)** 3

Resolución:

- Por el teorema de la desigualdad triangular:



Δ ABC: $4 - 3 < x < 4 + 3$

$1 < x < 7$ ...(1)

Δ CDE: $5 - 2 < y < 5 + 2$

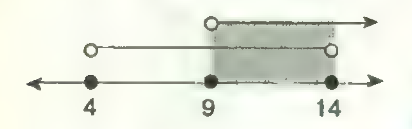
$3 < y < 7$ ...(2)

Δ ACE: $x + y > 9$ ...(3)

- Para hallar «x + y» sumamos miembro a miembro 1 y 2: $\begin{cases} 1 < x < 7 \\ 3 < y < 7 \end{cases}$

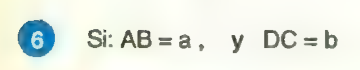
Σ. M.A.M $4 < x + y < 14$ ...(4)

- De (3) y (4):



$9 < x + y < 14$

Valores enteros de $x + y = \{10; 11; 12; 13\}$

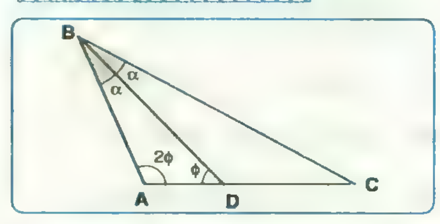


número de soluciones = 4 **Rpta D**

6 Si: AB = a , y DC = b

Calcular «BC»

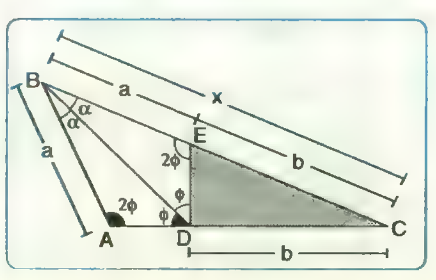
A) a + b **B)** a - b **C)** b - a
D) 2a + b **E)** 3a - 2b



Resolución:

- Sea: BC =x

- Se traza $\overline{DE}$ de tal manera que m∠ BDE = ϕ, y entonces resulta que:



Δ BAD $\cong \Delta$ BED (A.L.A)

EB = AB = a y m ∠ BED = m ∠ BAD = 2ϕ

- El triángulo CED ha resultado ser isósceles porque:

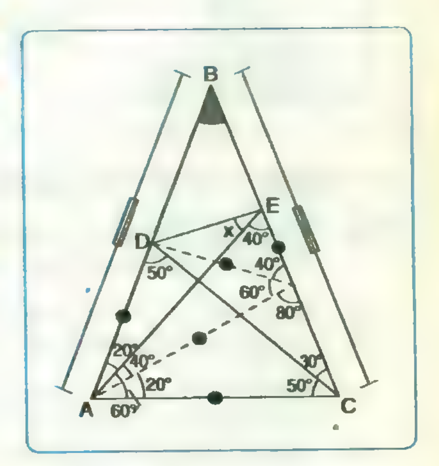
m ∠ CED = m ∠ CDE = 180° - 2ϕ ➡ CE = CD = b

- Finalmente, del gráfico. x = a + b **Rpta. A**

7 En un triángulo isósceles ABC, (AB = BC), m ∠ B = 20°, sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se toman los puntos «D» y «E» tal que: m ∠ DAE = 20° y m ∠ DCE = 30°. Calcular: m ∠ AED.

A) 10° B) 18° C) 20° D) 30° E) 22,5°

Resolución:



- El Δ DAC; es isósceles ⇒ AC = AD

- Para formar triángulos isósceles que nos ayuden a resolver el problema, se traza $\overline{AF}$ de tal manera que:

m ∠ CAF = 20°

Entonces:

- El Δ CAF, es isósceles: AC = AF
- El Δ FAD, resulta ser equilátero:

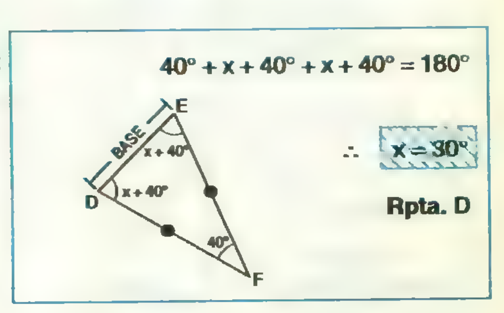
AF = FD = AD

- El Δ AFE, resulta ser isósceles:

AF = FE

- El Δ DFE, resulta ser isósceles:

DF = FE



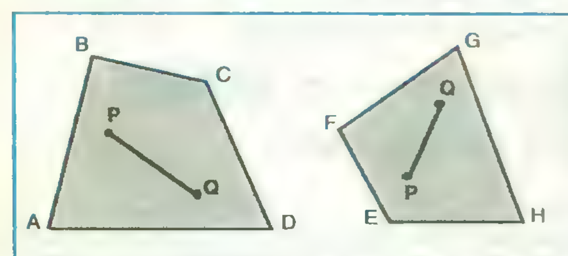
40° + x + 40° + x + 40° = 180°

∴ x = 30°

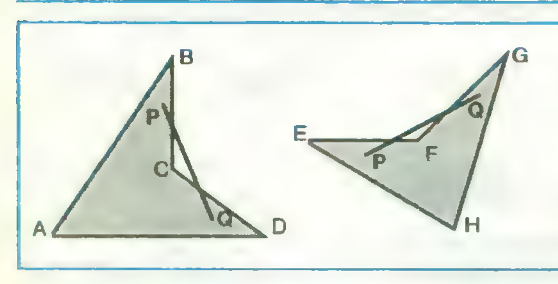
Rpta. D

5.5. CUADRILÁTEROS

5.5.1 DEFINICIÓN: Los cuadriláteros son polígonos que tienen cuatro lados.



Son cuadriláteros **CONVEXOS**, porque si tomamos dos puntos cualesquiera P y Q de su región interior, el segmento PQ está contenido en su región poligonal.

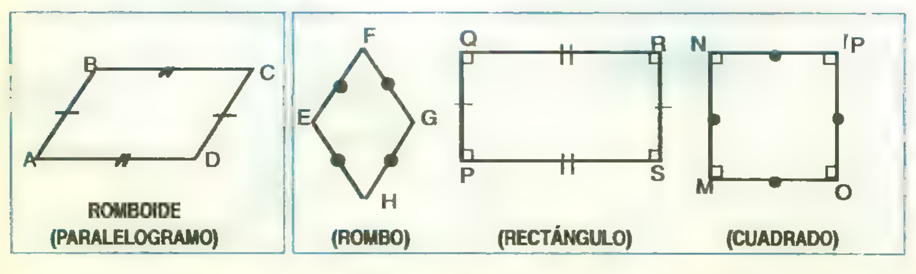


Son cuadriláteros **CÓNCAVOS**, porque perteneciendo P y Q a la región interior de cada polígono, el segmento PQ no está contenido en su región poligonal.

5.5.2 CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS:

1. **PARALELOGRAMO.-** Es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. Los paralelogramos se clasifican en:

- **Romboide:** Es el paralelogramo que no es equilátero ni equiángulo.
- **Rombo:** Es el paralelogramo que es equilátero (Sus cuatro lados son congruentes).
- **Rectángulo:** Es el paralelogramo que es equiángulo (Sus cuatro ángulos congruentes son rectos).
- **Cuadrado:** Es el paralelogramo que es equilátero y equiángulo al mismo tiempo. Es decir, el cuadrado es un cuadrilátero regular. Es un rombo y un rectángulo a la vez.

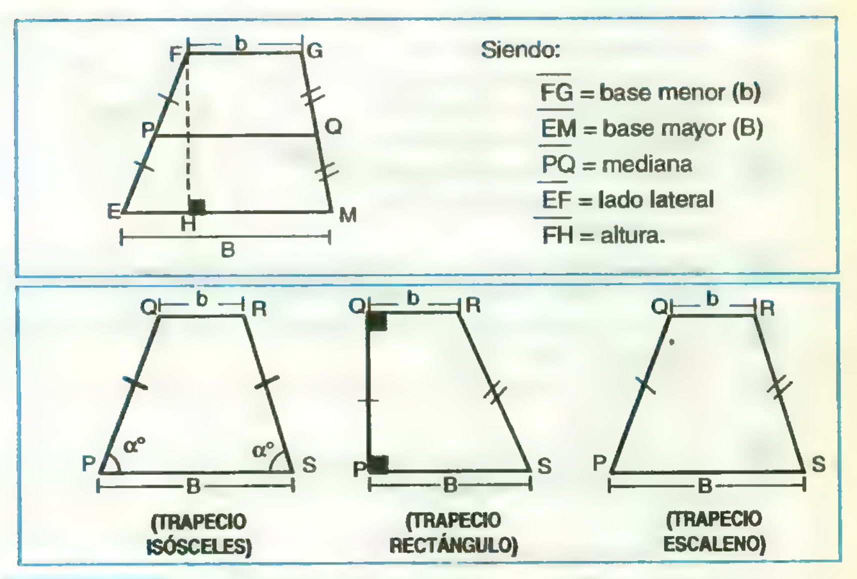


ROMBOIDE (PARALELOGRAMO) (ROMBO) (RECTÁNGULO) (CUADRADO)

2. **TRAPECIO.-** Es el cuadrilátero que tiene solamente dos lados paralelos. Los lados paralelos se llaman **bases** del trapecio; los lados no paralelos se denominan **lados laterales** del trapecio. **Altura** de un trapecio es el segmento perpendicular a las bases comprendido entre ellas. El segmento que une los puntos medios de los lados laterales se llama **mediana** del trapecio o **base media.**

Los trapecios se dividen a su vez en:

- **Trapecio isósceles:** Es el trapecio que tiene sus lados laterales congruentes.
- **Trapecio rectángulo:** Es el trapecio que tiene un lado lateral perpendicular a sus bases.
- **Trapecio escaleno:** Es el trapecio que tiene sus lados laterales desiguales.

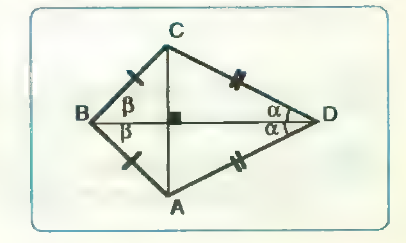


3. **TRAPEZOIDES:** Son cuadriláteros cuyos lados opuestos no son paralelos.

Pueden ser:

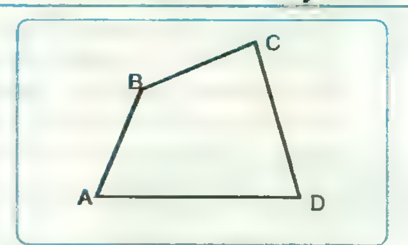
- **Trapezoides simétricos.-** Son aquellos que tienen dos lados consecutivos congruentes y los otros dos lados tambien congruentes pero distintos de los anteriores.

$\overline{BD}$: diagonal principal biseca a los ángulos $\hat{D}$ y $\hat{B}$.



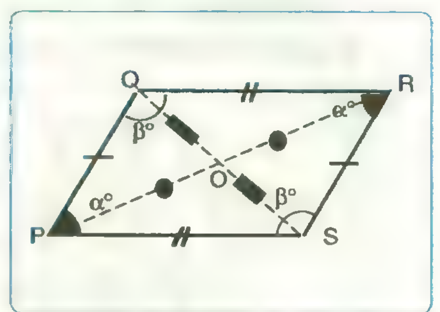
- **Trapezoide asimétrico.-** Se le llama así cuando no tiene las características del trapezoide simétrico.

  $\overline{BC}$ no es paralelo con $\overline{AD}$ y
  $\overline{AB}$ no es paralelo con $\overline{CD}$.

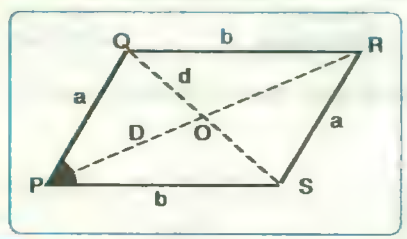


5.5.3 PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS:

1. Los lados opuestos de un paralelogramo son ccongruentes.
2. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
3. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente (se cortan en su punto medio)
4. El punto medio de una diagonal de un paralelogramo es su centro de simetría.



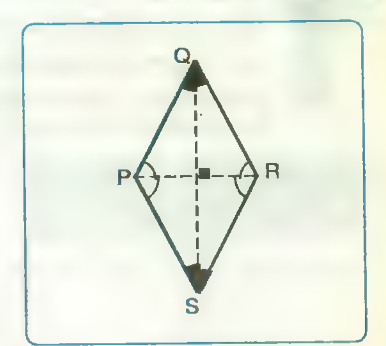
5. Cada diagonal divide a un paralelogramo en triángulos congruentes (de la figura: $\Delta PQR \cong \Delta PSR$ y $\Delta QRS \cong \Delta PQS$).
6. Los ángulos interiores de un paralelogramo suman 360° ó 2π radianes (de la figura: $2\alpha^\circ + 2\beta^\circ = 360^\circ$)
7. Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo, son suplementarios. O sea: $\alpha^\circ + \beta^\circ = 180^\circ$.
8. La suma de los cuadrados de las diagonales (D y d) de un paralelogramo, es igual a la suma de los cuadrados de sus 4 lados.



$\Rightarrow$ $D^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$

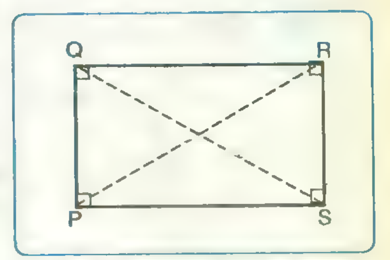
9. Si en un cuadrilátero, los lados opuestos son congruentes por pares, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.
10. Si en un cuadrilátero los lados opuestos son congruentes y paralelos, entonces es un paralelogramo.

5.5.4 PROPIEDADES DEL ROMBO:



1. Por ser un paralelogramo, cumple con todas las propiedades ya mencionadas.
2. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre si.
3. Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos internos del mismo.

5.5.5 PROPIEDADES DEL RECTÁNGULO:

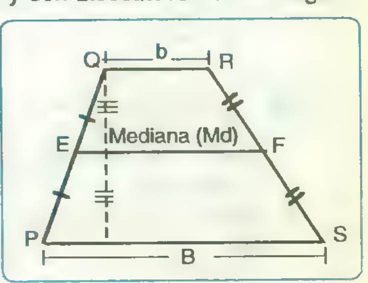


1. Por ser un paralelogramo cumple con todas sus propiedades.
2. Las diagonales del rectángulo son iguales. (de la figura: QS = PR).
3. La perpendicular que pasa por los puntos medios de los lados opuestos del rectángulo es su eje de simetría.

5.5.6 PROPIEDADES DEL CUADRADO:

1. Por ser un paralelogramo, cumple con todas sus propiedades.
2. Por ser un rombo, cumple con sus respectivas propiedades.
3. Por ser un rectángulo, cumple con sus respectivas propiedades.
4. Las diagonales del cuadrado son perpendiculares entre si, son congruentes y son bisectrices de sus ángulos interiores.

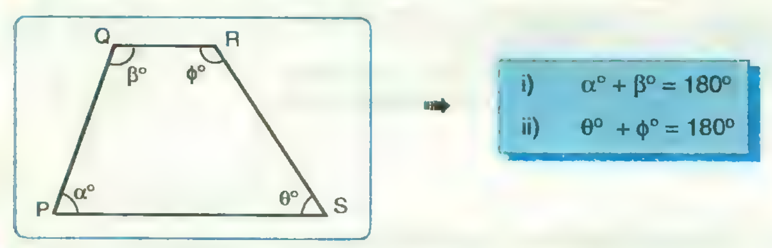
5.5.7 PROPIEDADES DEL TRAPECIO:



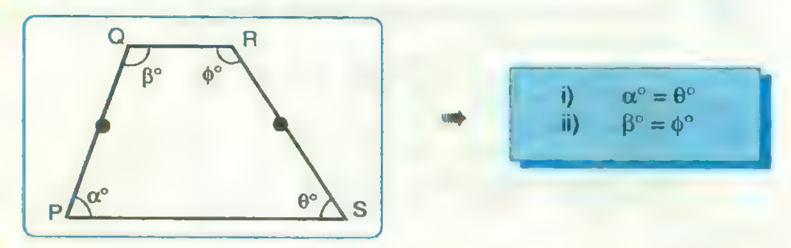
1. La mediana de un trapecio es paralela a las bases del trapecio y es igual a la semisuma de ellas.

$$Md \,//\, B \,//\, b \quad \Rightarrow \quad Md = \frac{B+b}{2}$$

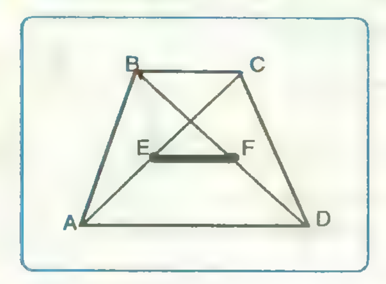
2. La mediana divide a la altura del trapecio en dos partes congruentes.
3. Los ángulos interiores del trapecio suman 360°.
4. Dos ángulos interiores del trapecio situados en el mismo lado lateral son suplementarios (O sea suman 180°).

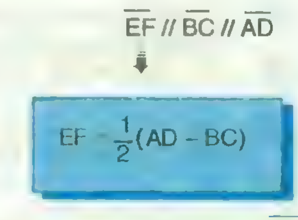


5. En el trapecio isósceles, los ángulos de cada base son congruentes.



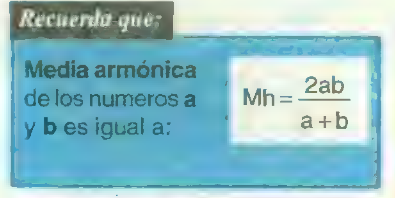
6. La longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es igual a la semidiferencia de las bases.

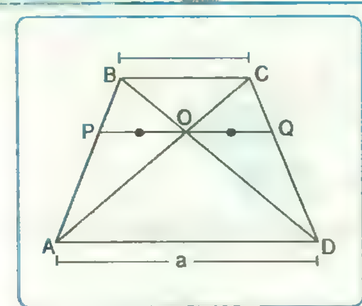




Siendo: "E" punto medio de $\overline{AC}$
"F" punto medio de $\overline{BD}$

7. La longitud del segmento paralelo a las bases que pasa por el punto de intersección de las diagonales es igual a la media armónica de las bases.





$\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

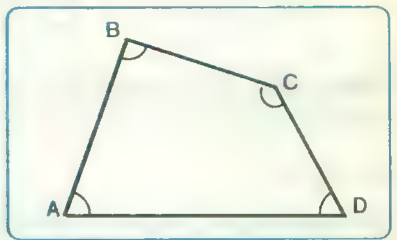
$$PQ = \frac{2ab}{a+b}$$

Pero: OP = OQ ➡ $OP = \frac{ab}{a+b}$; $OQ = \frac{ab}{a+b}$

Donde:

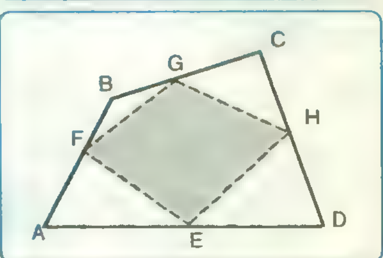
O : Punto de intersección de las diagonales

PROPIEDADES GENERALES:



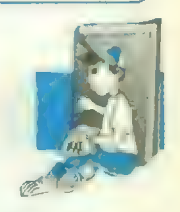
1. En todo cuadrilátero la suma de sus ángulos internos es 360º.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$



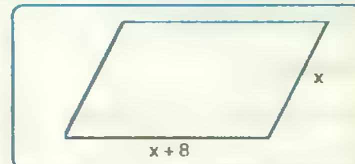
2. Si se unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera se forma un paralelogramo.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE CUADRILÁTEROS



Problema 1: El perímetro de un paralelogramo es de 60 m. El lado mayor excede al lado menor en 8 m . Si la longitud de los 4 lados fueran iguales a la del lado mayor, entonces el perímetro sería:

Resolución:



Sean:
- x = medida del lado menor
- x + 8 = medida del lado mayor

Del enunciado: Perímetro ▱ = 60 m

$$2x + 2(x + 8) = 60 \Rightarrow 4x = 60 - 16$$

$$4x = 44 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 11\ m}$$

Luego, el lado mayor es: $x + 8 = 11 + 8 = \boxed{19\ m}$

Si la longitud de los 4 lados fueran iguales a la del lado mayor se formaría un cuadrado, siendo su perímetro:

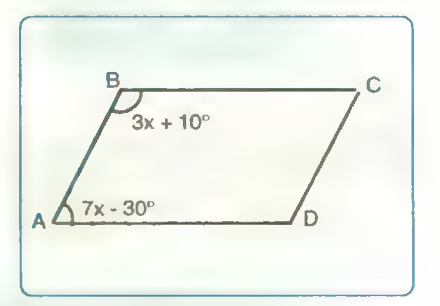
Perímetro del cuadrado = 4 (lado mayor del paralelogramo)

= 4 (19 m) = $\boxed{76\ m}$ **Rpta.**

Problema 2: En un paralelogramo ABCD, las medidas de los ángulos consecutivos A y B son: $7x - 30°$ y $3x + 10°$ respectivamente. Entonces el complemento de "B" es:

Resolución:

Por propiedad: Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios (o sea suman 180°)



Luego: A + B = 180°

$$(7x - 30°) + (3x + 10°) = 180°$$

$$10x = 200° \Rightarrow \therefore \boxed{x = 20°}$$

Calculamos la medida del ángulo B.

$$B = 3x + 10° = 3(20°) + 10° = 70°$$

$$\therefore \boxed{B = 70°}$$

Rpta: El complemento del ángulo B es: $90° - B = 90° - 70° = 20°$

Problema 3: Las bases de un trapecio isósceles están en la relación de 3 es a 5. Si la suma de sus lados no paralelos es de 50 m y su perímetro es de 82 m. Calcular la mediana del trapecio.

Resolución:

Como el trapecio es isósceles: AB = DC = a

pero: AB + DC = 50 m

a + a = 50 m ➠ 2a = 50 m

∴ **a = 25 m**

Perímetro⏢ABCD = 82 m

a + 3k + a + 5k = 82 m

2a + 8k = 82 m

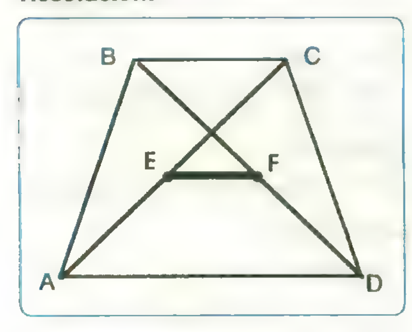
2(25 m) + 8k = 82 m ➠ **k = 4 m**

Luego: $\text{Mediana} = \dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{5k + 3k}{2} = 4k = 4(4m) = 16m$

∴ **Mediana = 16 m** **Rpta.**

Problema 4 : En un trapecio el segmento que une los puntos medios de las diagonales es 9 m y la suma de las bases es 30 m. Hallar la base mayor.

Resolución:



Por propiedad: $EF = \dfrac{1}{2}(AD - BC)$

$9 = \dfrac{1}{2}(AD - BC)$

∴ **18 = AD - BC** ......(I)

Además: **AD + BC = 30** ......(II)

De las ecuaciones (I) y (II):

$$\begin{cases} AD + BC = 30 \\ AD - BC = 18 \end{cases}$$

M.A.M: 2 AD = 48 ➠ **AD = 24 m**

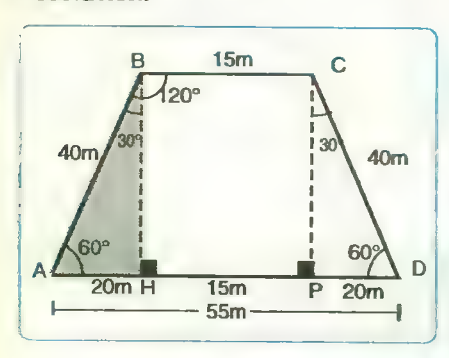
Reemplazamos el valor de AD en (II):

24 m + BC = 30 m ➠ ∴ **BC = 6 m**

Rpta: La base mayor AD mide: 24 m

Problema 5 : La base menor de un trapecio isósceles mide 15 m y forma con los lados no paralelos un ángulo de 120º. Si cada lado no paralelo mide 40 m. ¿Cuánto mide la mediana?

Resolución:



En el $\triangle$AHB: Por propiedad:

$$AH = \frac{AB}{2} = \frac{40\,m}{2} \Rightarrow \boxed{AH = 20\,m}$$

Como el trapecio es isósceles:

AH = PD = 20 m.

Además: BC = HP = 15 m (Por ser paralelos)

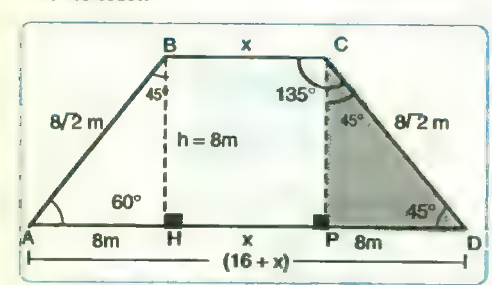
Luego:

$$\text{Mediana} = \frac{AD + BC}{2} = \frac{55\,m + 15m}{2} = 35m$$

Rpta: La mediana del trapecio mide: 35 m

Problema 6: Los lados no paralelos de un trapecio isósceles, forman con la base menor ángulos de 135°. Si la altura mide 8 m. y la mediana 18 m. Hallar el perímetro del trapecio.

Resolución:



En el $\triangle$AHB:

AH = BH = 8 m (Por ser isósceles)

- En el $\triangle$CPD:

CP = PD = 8 m (Por ser isósceles)

Del enunciado:

Mediana = 18 m

↓

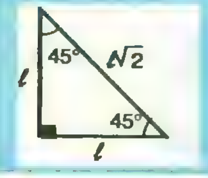
$$\frac{AD + BC}{2} = 18;$$

Reemplazando por sus respectivos valores se obtiene:

$$\frac{(16 + x) + x}{2} = 18$$

$2x = 20 \rightarrow \therefore \boxed{x = 10}$

Recuerda Que:



Luego: Perímetro del $\triangle$ABCD = AB + BC + CD + DA

$$= 8\sqrt{2} + x + 8\sqrt{2} + (16 + x)$$

$$= 16\sqrt{2} + 16 + 2x \qquad \text{.....(I)}$$

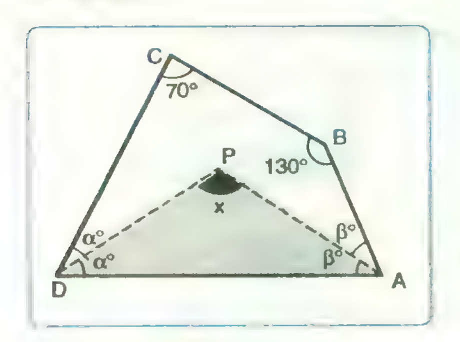
Reemplazamos el valor de "x" en esta última expresión:

$$\text{Perímetro del } \triangle \text{ ABCD} = 16\sqrt{2} + 16 + 2\,(10) = 16\sqrt{2} + 36$$

$$\boxed{\text{Perímetro del } \triangle \text{ ABCD} = 4\,(4\sqrt{2} + 9)\text{ m}}$$ **Rpta.**

Problema 7 : En un cuadrilátero ABCD convexo, los ángulos B y C mide 130° y 70° respectivamente. ¿Cuánto mide el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos A y D?

Resolución:



En el cuadrilátero:

$$2\alpha° + 2\beta° + 130° + 70° = 360°$$

$$2\alpha° + 2\beta° = 160° \rightarrow 2(\alpha° + \beta°) = 160°$$

$$\boxed{\alpha° + \beta° = 80°}$$

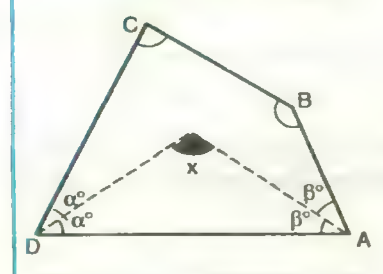
En el Δ DPA: $\alpha° + x + \beta° = 180°$

$$\underbrace{\alpha° + \beta°}_{} + x = 180°$$

$$80° + x = 180°$$

$$\therefore \boxed{x = 100°}$$

PROPIEDAD: El ángulo formado por dos bisectrices interiores de dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero, es igual a la semisuma de los otros dos ángulos.



$$\boxed{\hat{x} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}}$$

En el problema anterior:

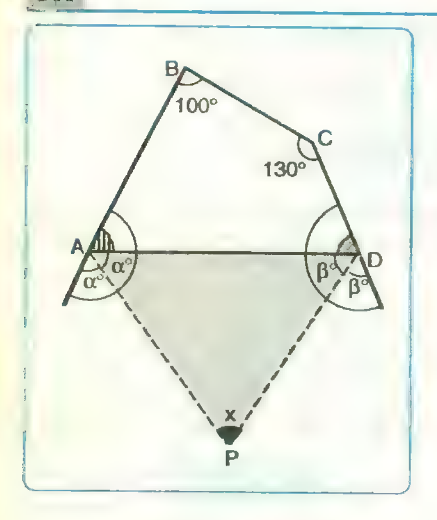
$$\hat{x} = \frac{130° + 70°}{2} = \frac{200°}{2}$$

$$\therefore \boxed{\hat{x} = 100°}$$

Problema 8 : Calcular el ángulo formado por las bisectrices exteriores de los ángulos A y D de un trapezoide ABCD. Si $\hat{B} = 100°$ y $\hat{C} = 130°$.

Resolución:

En el cuadrilátero ABCD:



$$\hat{A} + 100° + 130° + \hat{D} = 360°$$

$$\boxed{\hat{A} + \hat{D} = 130°} \quad .....(1)$$

De la figura:

$$\hat{A} + 2\alpha° = 180°$$

$$\hat{D} + 2\beta° = 180°$$

$$\Sigma \text{ M.A.M.} \quad \hat{A} + \hat{D} + 2\alpha° + 2\beta° = 360°$$

$$\hat{A} + \hat{D} + 2(\alpha° + \beta°) = 360° \quad .....(2)$$

Reemplazamos (1) en (2):

$$130° + 2(\alpha° + \beta°) = 360°$$

$$2(\alpha° + \beta°) = 230°$$

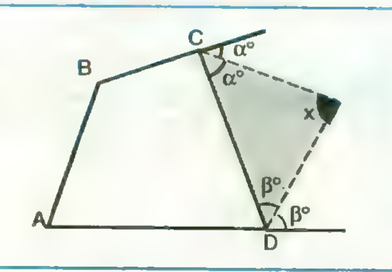
$$\therefore \quad \boxed{\alpha° + \beta° = 115°}$$

En el Δ PAD: $\underbrace{\alpha° + \beta°}_{} + x = 180°$

$$115° + x = 180° \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{x = 65°}$$

PROPIEDAD: En un cuadrilátero, el ángulo formado por las bisectrices exteriores de dos ángulos consecutivos es igual a la semisuma de dichos ángulos.

$$\boxed{\hat{x} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{2}}$$

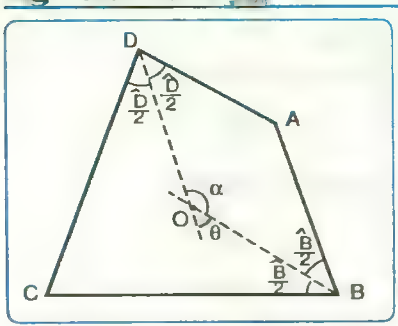


Problema 9: En un cuadrilátero convexo ABCD se conoce que: A – C = 50°. Hallar la medida del ángulo agudo que hacen las bisectrices de los ángulos B y D al cortarse.

Resolución:

En el cuadrilátero DOBA: $\frac{\hat{D}}{2} + \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} + \alpha = 360°$ .....(1)

En el cuadrilátero BCDO: $\frac{\hat{B}}{2} + \hat{C} + \frac{\hat{D}}{2} + (360° - \alpha) = 360°$ .....(2)



Igualamos las expresiones (1) y (2):

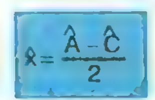
$$\frac{\hat{D}}{2}+\hat{A}+\frac{\hat{B}}{2}+\alpha=\frac{\hat{B}}{2}+\hat{C}+\frac{\hat{D}}{2}+(360°-\alpha)$$

$$A+\alpha=C+360°-\alpha$$
$$A-C=360°-2\alpha$$
$$\downarrow$$
$$50°=360°-2\alpha$$
$$2\alpha=310° \quad \therefore \quad \boxed{\alpha=155°}$$

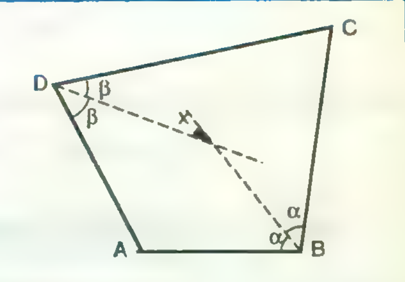
De la figura: $\alpha+\theta=180°$ ➡ $155°+\theta=180°$ $\therefore$ $\boxed{\theta=25°}$

- Como se observará las bisectrices de los ángulos B y D al cortarse forman dos ángulos $\alpha = 155°$ (Ángulo obtuso) y $\theta = 25°$ (Ángulo agudo).

PROPIEDAD: En un cuadrilátero, el menor ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos opuestos es igual a la semidiferencia de los otros dos ángulos.



$$x=\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}$$



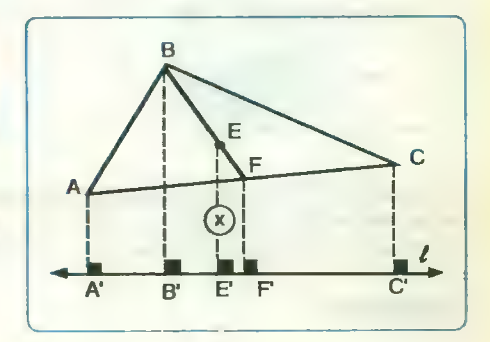
Problema 10 : Si la suma de las perpendiculares bajadas por los vértices de un triángulo hacia una recta exterior es 48 cm, hallar la distancia del baricentro a la recta.

Resolución:

De acuerdo al enunciado del problema se construye el siguiente gráfico.

Recuerda que:

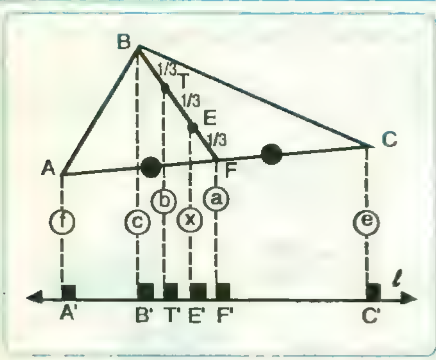
Baricentro es el punto de intersección de las tres medianas en el triángulo.



En la figura: Sea: E = baricentro.

Tomemos el punto "T", punto medio de $\overline{BE}$, luego hagamos que:

FF' = a ; TT' = b ; BB' = C



Entonces:

- En el ⏢ TFF'T' :

$$x = \frac{a+b}{2} \qquad \text{......(1)}$$

- En el ⏢ BEE'B' :

$$b = \frac{x+c}{2} \qquad \text{......(2)}$$

- En el ⏢ ACC'A' :

$$a = \frac{e+f}{2} \qquad \text{......(3)}$$

Reemplazamos (2) y (3) en (1): $x = \dfrac{\dfrac{x+c}{2}+\dfrac{e+f}{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = \dfrac{x+c+e+f}{2}$

$$4x = x + c + e + f \quad \therefore \quad x = \frac{c+e+f}{3} \quad \textbf{(fórmula)}$$

Reemplazando el valor 48 cm. en la fórmula, se obtiene:

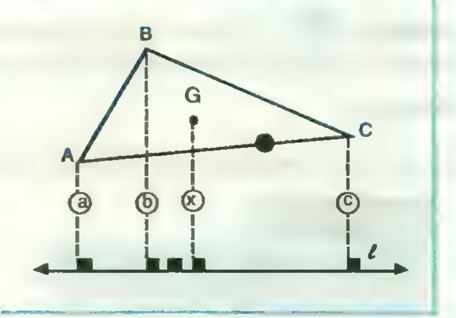
$$x = \frac{48\text{ cm}}{3} = 16\text{cm} \quad \Rightarrow \quad x = 16\text{cm}$$

Rpta: La distancia del baricentro a la recta es de 16 cm.

PROPIEDAD: En todo triángulo la distancia del baricentro hacia una recta exterior es la tercera parte de la suma de las distancias de los vértices hacia la recta.

G: baricentro del Δ ABC

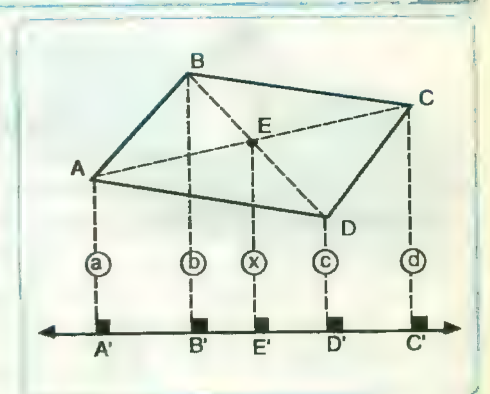
$$\Rightarrow \quad x = \frac{a+b+c}{3}$$



Problema : A partir de los vértices de un paralelogramo se trazan perpendiculares hacia una recta externa. Si la suma de las perpendiculares es igual a 60 cm. Hallar la distancia del punto de intersección de las diagonales hacia la recta.

Resolución:

De acuerdo al enunciado, se construye el siguiente gráfico.



Entonces:

En el ⏢ A'ACC' :

$$x = \frac{a+d}{2} \quad .....(1)$$

En el ⏢ BB'D'D :

$$x = \frac{b+c}{2} \quad .....(2)$$

Sumando (1) y (2); se obtiene:

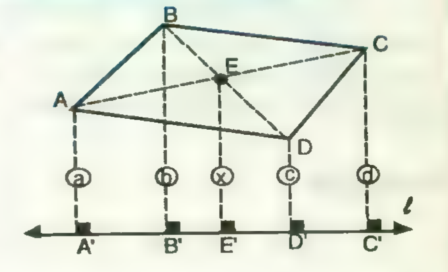
$$2x = \frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2} \Rightarrow 2x = \frac{a+d+b+c}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Reemplazando el valor de 60 cm, en la fórmula, se obtiene:

$$x = \frac{60\text{ cm}}{4} \Rightarrow \quad \therefore \quad x = 15\text{ cm}$$

Rpta: La distancia del punto de intersección de las diagonales hacia la recta es de 15 cm.

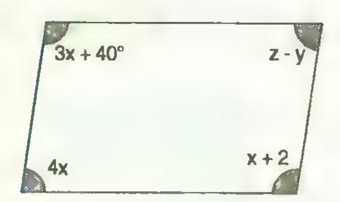
PROPIEDAD: En todo paralelogramo, la distancia del punto de intersección de las diagonales hacia una recta exterior es la cuarta parte de la suma de las distancias de los vértices hacia la recta.



$$x = \frac{a+b+c+d}{4}$$

TALLER DE PROBLEMAS Nº 23

Problema 1 : En el paralelogramo ABCD; calcular x, y, z.



Resolución:

Rpta. $x = 20°$, $y = 0°$; $z = 80°$

Problema 2 : La mediana de un trapecio mide 24 m. y sus bases están en la relación de 1 a 7. ¿Cuánto mide la base mayor?

Resolución:

Rpta. 42 m.

Problema 3 : En un cuadrilátero ABCD:

$$m\angle B = \frac{2}{3}m\angle A \ ; \ m\angle B = \frac{4}{5}m\angle D;$$

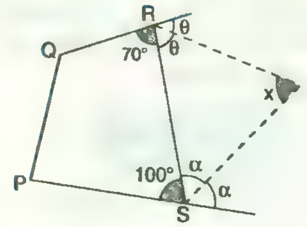
$$m\angle C = \frac{3}{4}m\angle B$$

Calcular la medida del ángulo A.

Resolución:

Rpta. 120°

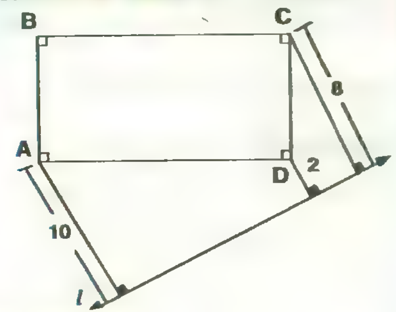
Problema 4 : En el trapezoide PQRS, Calcular x°.



Resolución:

Rpta. 85°

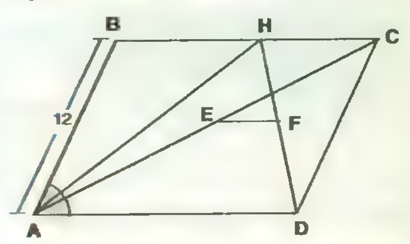
Problema 5 : En la figura, calcular la distancia del vértice "B" a la recta "*l*"



Resolución:

Rpta. 16

Problema 7 : En la figura: ABCD: paralelogramo; AH: bisectriz del ∠ BAD; E y F son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{HD}$ respectivamente. Hallar EF.

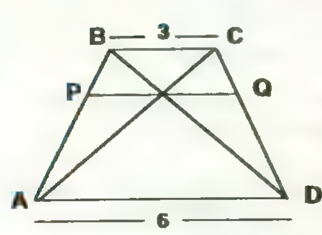


Resolución:

Rpta. EF = 6

Problema 6 : Calcular "PQ"

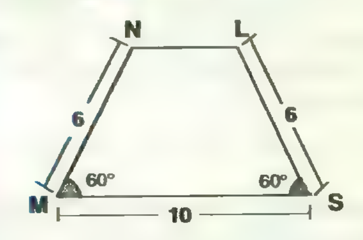
Si: $\overline{PQ}$ // $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$.



Resolución:

Rpta. 4

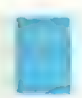
Problema 8 : Calcular la longitud de la mediana del trapecio MNLS.



Resolución:

Rpta. 7

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE CUADRILÁTEROS



NIVEL I

Problema 1: Las bases de un trapecio isósceles están en la relación de 1 a 5. Si la suma de sus lados no paralelos es 30 m y su perímetro 66 m. ¿Cuánto mide la mediana o base media del trapecio?

A)30m **B)** 18m **C)** 36m **D)** 9m **E)** 16m

Problema 2 : El perímetro de un paralelogramo es de 52 m. El lado menor es excedido por el lado mayor en 6 m. Si la longitud de los 4 lados fueran iguales a la del lado menor, entonces el perímetro sería:

A) 64m **B)** 46m **C)** 40 m **D)** 60m **E)** 42 m

Problema 3 : En un paralelogramo ABCD, las medidas de los ángulos consecutivos A y B son: $4x + 60°$ y $8x - 30°$ respectivamente. Entonces el suplemento del ángulo "A" es:

A)110° **B)** 70° **C)** 101° **D)** 100° **E)** 90°

Problema 4 : En el rombo ABCD, los ángulos agudos opuestos miden: $x + 10°$ y $3x - 6°$ ¿Cuánto mide el mayor ángulo del rombo?

A)120° **B)** 110° **C)** 126°
D) 162° **E)** Faltan datos

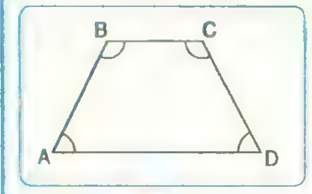
Problema : En un trapezoide, la diferencia de dos ángulos opuestos es 46°. Hallar el mayor ángulo formado por las bisectrices interiores de los otros dos ángulos.

A)92° **B)** 23° **C)** 157° **D)** 48° **E)** N.A

Problema : En el siguiente trapecio:

$A = 8y$, $B = 140°$; $C = 5x + 12°$

$D = 3x + 8°$, hallar la relación: y/x



A) 1/3
B) 1/4
C) 2/5
D) 3/8
E) 1/6

Problema : Calcular el ángulo formado por las bisectrices exteriores de los ángulos A y D de un trapezoide ABCD. Si: B = 112° y C = 138°.

A) 152° **B)** 55° **C)** 155° **D)** 45° **E)** N.A

Problema : Los lados no paralelos de un trapecio isósceles, forman con la base mayor ángulos de 60°, si la altura mide $10\sqrt{3}$ m, y la mediana 18 m. Hallar el perímetro del trapecio

A) 66 m **B)**76 m **C)** 38 m
D) 68 m **E)** 70 m

Problema 9 : La base mayor de un trapecio isósceles mide 20 m y forma con los lados no paralelos ángulos de 45°. Si cada lado no paralelo mide $6\sqrt{2}$ m. ¿Cuánto mide la mediana?

A) 28 m **B)** 14 m **C)** 41 m
D) $13\sqrt{2}$ m **E)** $26\sqrt{2}$ m

Problema : En un trapecio el segmento que une los puntos medios de las diagonales es 13 m y la suma de las bases es 48 m. Hallar la medida de la base menor.

A) 37 m **B)** 24 m **C)** 11 m **D)** 22 m **E)** N.A

Problema : Hallar la longitud de la base mayor de un trapecio, sabiendo que su mediana mide 12 m y la distancia entre los puntos medios de sus diagonales es 3 m.

A) 18 m **B)** 21 m **C)** 15 m **D)** 25 m **E)** N.A

Problema : La mediana de un trapecio isósceles es 62 cm, y su altura es de 12 cm. Hallar las longitudes de las bases, sabiendo que los lados no paralelos forman con la base mayor un ángulo de 45°.

A) 40 y 57 cm **B)** 50 y 74 cm
C) 60 y 74 cm **D)** 50 y 84 cm
E) N.A

Problema : En un trapecio ABCD de bases BC y AD, el ángulo "B" mide 135° y el ángulo "C" mide 143°. Hallar el lado no paralelo CD, si la diferencia de las bases es 21 m.

A) 16 m **B)** 19 m **C)** 15 m
D) 18 m **E)** N.A.

Problema : Las distancias de los vértices de un triángulo a una recta dada mide 10 cm; 15 cm y 23 cm. Calcular la distancia del baricentro del triángulo a la misma recta exterior.

A) 15 cm **B)** 16 cm **C)** 12 cm
D) 24 cm **E)** N.A.

Problema : Si la suma de las perpendiculares bajadas por los vértices de un paralelogramo a una recta exterior es de 48 cm. calcular la distancia del punto de corte de sus diagonales a la misma recta anterior.

A) 8 cm **B)** 10 cm **C)** 20 cm
D) 12 cm **E)** 16 cm

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. B	4. D	5. C
6. B	7. D	8. B	9. B	10. C
11. C	12. B	13. C	14. B	15. D

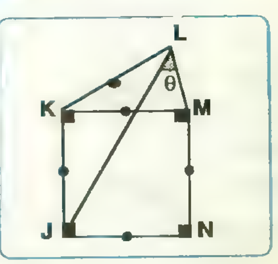
NIVEL II

Problema : Hallar "x"

A) 36°
B) 72°
C) 45°
D) 60°
E) N.A

Problema : En la figura: JKMN es un cuadrado y KL = KM calcular "θ"

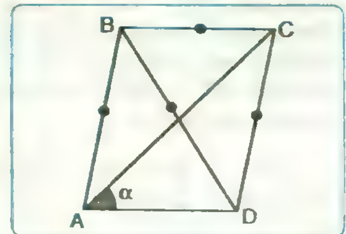
A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 75°
E) 25°



Problema : En la figura:

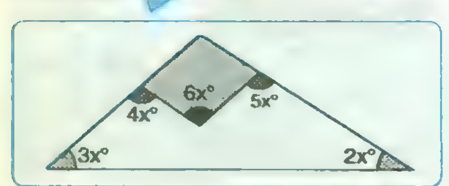
AB = BC = CD = BD Hallar "α"

A) 60°
B) 45°
C) 30°
D) 37°
E) 38°



Problema : Hallar "x"

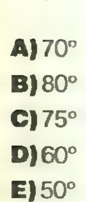
A) 130°
B) 120°
C) 110°
D) 105°
E) 115°



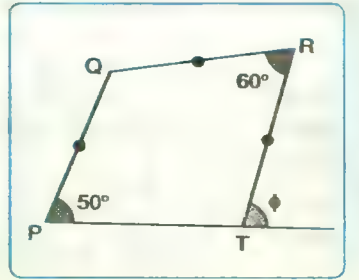
Problema : Hallar "θ"

A) 62 B) 67,5° C) 70,5°
D) 61° E) 57,5°

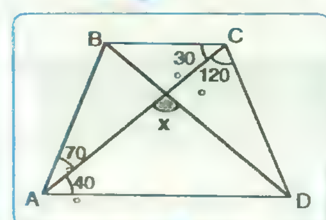
Problema : Calcular "ϕ"



A) 70°
B) 80°
C) 75°
D) 60°
E) 50°

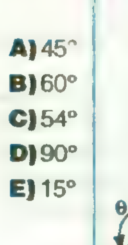


Problema : Hallar "x"

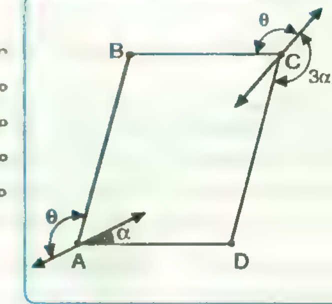


A) 140°
B) 90°
C) 100°
D) 130°
E) 110°

Problema : Si ABCD es un paralelogramo, hallar "α"

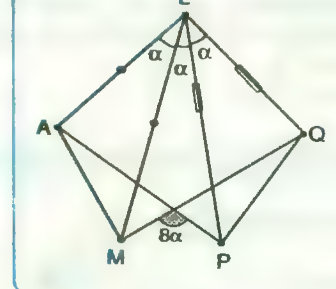


A) 45°
B) 60°
C) 54°
D) 90°
E) 15°



Problema : Si: AL = LM y LP = LQ, Hallar α

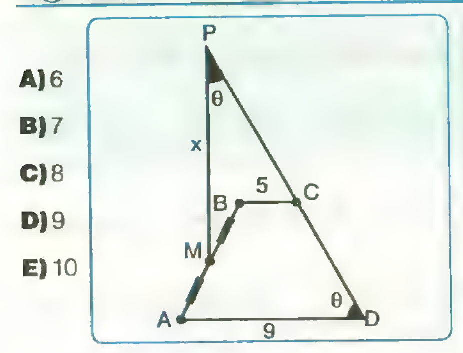
A) 17°
B) 16°
C) 18°
D) 20°
E) 15°



Problema : Del gráfico

$\overline{BC} // \overline{AD}$; BC = 5 ; AD = 9

Calcular "MP", "M" es punto medio de AB



A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

E) 10

Problema 11 : La suma de las distancias bajadas desde los vértices de un paralelogramo hacia una recta exterior es 28 metros. Calcular la distancia del punto de corte de las diagonales a la misma recta.

A) 5 m **B)** 7 m **C)** 10 m **D)** 11 m **E)** 12 m

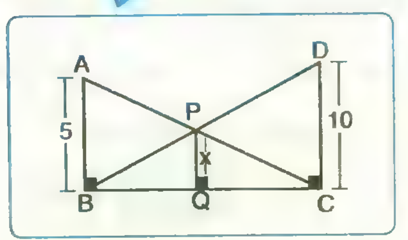
Problema 12 : Las diagonales de un trapecio miden 10 y 12. Calcular el máximo valor entero de la mediana.

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 21

Problema 13 : En un trapecio rectángulo ABCD: m∠A = m∠B = 90 ; m∠D = 45°; AB = 6m. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales

A) 1m **B)** 3m **C)** 4m **D)** 5m **E)** 6m

Problema 14 : Hallar: "PQ"

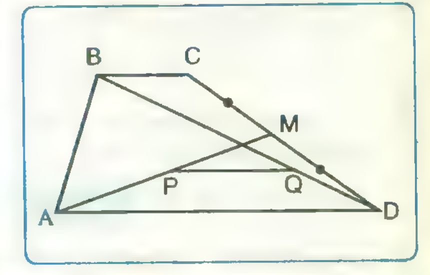


A) 8/3 **B)** 2 **C)** 10/3 **D)** 20/3 **E)** 3

Problema 15 : En un trapecio rectángulo ABCD recto en A y B, sobre el lado no paralelo $\overline{AB}$ de ubica un punto "F" tal que AF = BC y BF = AD. Calcular m ∠ CFD

A) 80° **B)** 75° **C)** 105° **D)** 52° **E)** 90°

Problema 16 : Hallar PQ en el trapecio ABCD si: AD = 12 ; BC = 4 ; BQ = 3QD; AP = PM



A) 6 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

Problema 17 : Siendo $\beta - \gamma = 6°$. Calcular x°

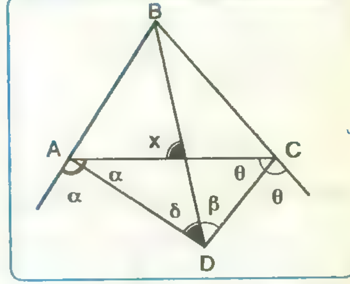
A) 76°

B) 94°

C) 84°

D) 78°

E) 82°



Clave de Respuestas

1. B	2. B	3. C	4. A	5. B
6. A	7. D	8. A	9. D	10. B
11. B	12. B	13. B	14. C	15. E
16. D	17. C			

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

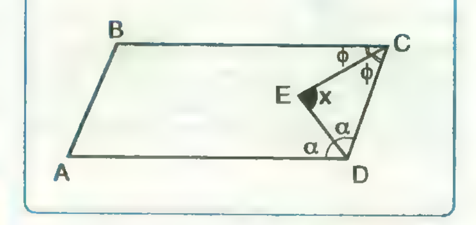
Organizados por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1 Hallar el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo.

A) 45° **B)** 30° **C)** 60° **D)** 90° **E)** Depende de los lados

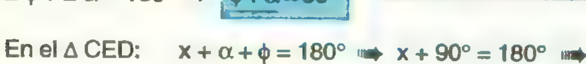
Resolución:



- Sea ABCD el paralelogramo y "C" y "D" los ángulos consecutivos, "x" es el ángulo pedido:

- Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ entonces por ángulos conjugados internos:

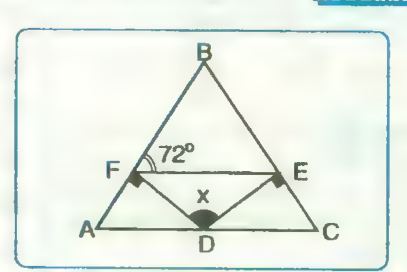
$2\phi + 2\alpha = 180 \Rightarrow \boxed{\phi + \alpha = 90°}$



- En el Δ CED: $x + \underline{\alpha + \phi} = 180° \Rightarrow x + 90° = 180° \Rightarrow \therefore \boxed{x = 90°}$ **Rpta. D**

2 En la figura, se tiene que:

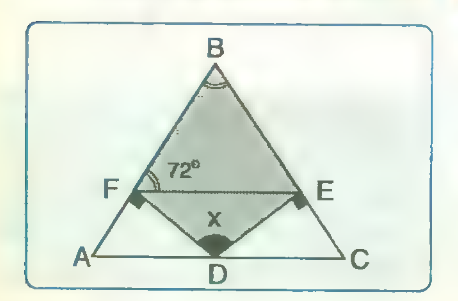
FE = BE, calcular «x»



A) 72° **B)** 108°
C) 70° **D)** 82°
E) 118°

Resolución:

- El Δ FEB, es isósceles, entonces: $\boxed{m\angle EBF = m\angle EFB = 72°}$



- En el ⏢ FBED, por suma de ∠s interiores:

$m\angle D + m\angle F + m\angle B + m\angle E = 360°$

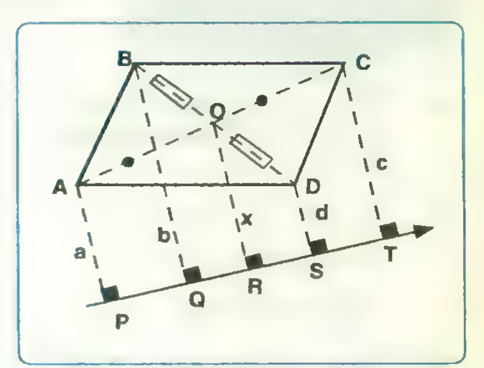
$x + 90° + 72° + 90° = 360°$

$\Rightarrow \therefore \boxed{x = 108°}$ **Rpta B**

3 La suma de las distancias de los vértices de un paralelogramo a una recta exterior es 80 m. Hallar la distancia del punto de corte de las diagonales a la recta señalada.

A) 40 m **B)** 30 m **C)** 20 m **D)** 50 m **E)** 25 m

Resolución:



- Sea ABCD el paralelogramo y "x" la distancia pedida.
- Según datos del problema

$a + b + c + d = 80$ m ... (1)

- Aplicando la propiedad de la mediana de un trapecio:

EN EL TRAPECIO **PACT**: $x = \dfrac{a+c}{2}$

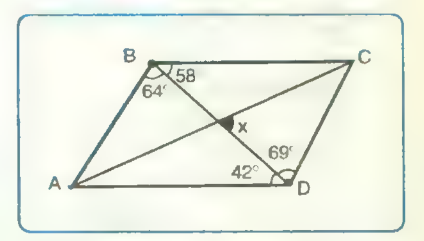
EN EL TRAPECIO **QBDS**: $x = \dfrac{b+d}{2}$

Σ **MAM** y despejando: $x = \dfrac{a+b+c+d}{4}$ **(teorema)** **...(2)**

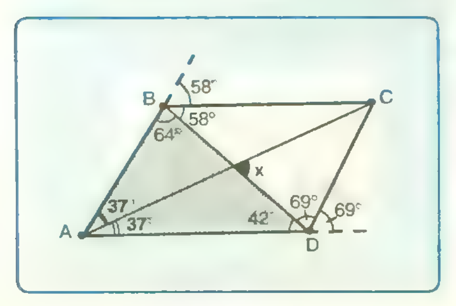
- Reemplazando (1) en (2), se obtiene: $x = 20$ m **Rpta. C**

4 En la figura, calcular «x»

A) 89° **B)** 79°
C) 53° **D)** 60°
E) 72°



Resolución:



- Prolongando $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, descubrimos que en el Δ ABD, $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ son bisectrices exteriores:
- Entonces "C" es el excentro relativo al lado $\overline{BD}$ y por lo tanto $\overline{AC}$ será bisectriz interior.

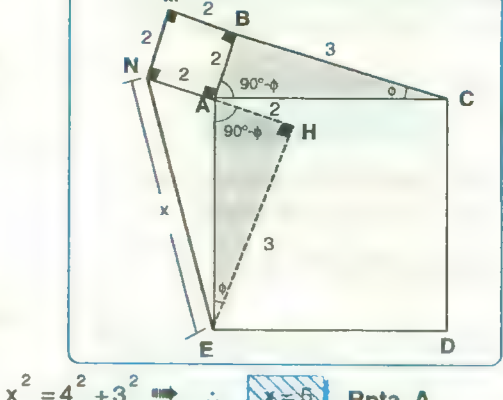
➡ $m\angle BAC = m\angle CAD = \dfrac{1}{2}(74°) = 37°$

- Por el teorema del ∠ exterior: $x = 37° + 42°$ ➠ $x = 79°$ **Rpta. B**

5 Dado el triángulo rectángulo ABC (recto en B) donde: AB = 2m; BC = 3m; se construye exteriormente los cuadrados ABMN y ACDE. Determinar la medida de $\overline{EN}$.

A) 5m **B)** 4m **C)** 3m **D)** 2m **E)** 6m

Resolución:



- Desde "E" trazamos una perpendicular a la prolongación de NA en "H"

- ◺ EHA ≅ ◺ ABC

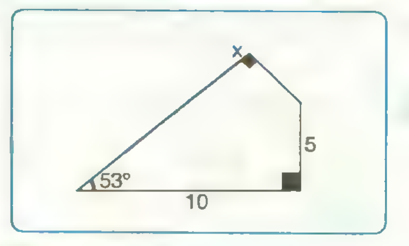
 ➠ AH = AB = 2

 ➠ EH = BC = 3

- En el ◺ EHN; por el teorema de Pitágoras:

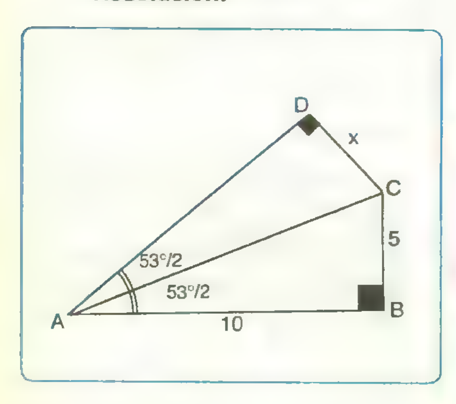
$x^2 = NH^2 + HE^2$ ➠ $x^2 = 4^2 + 3^2$ ➠ ∴ $x = 5$ **Rpta. A**

6 Del gráfico, calcular el valor de «x»



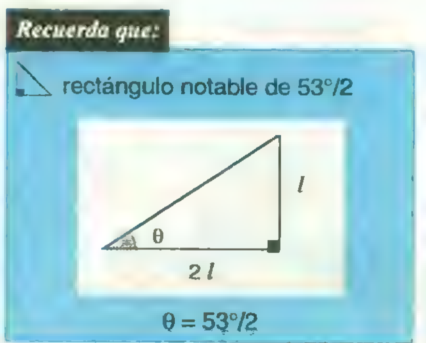
A) 2 **B)** 3 **C)** 4
D) 1 **E)** 5

Resolución:



Recuerda que:

◺ rectángulo notable de 53°/2



$\theta = 53°/2$

- Se traza $\overline{AC}$, y luego en el ⊿ ABC como BC = AB/2, $m\angle CAB = 53°/2$

  ➡ $m\angle DAC = 53°/2$

- Luego $\overline{AC}$ resulta ser bisectriz. Por el teorema de la bisectriz:

  CD = CB ➡ $x = 5$ **Rpta. E**

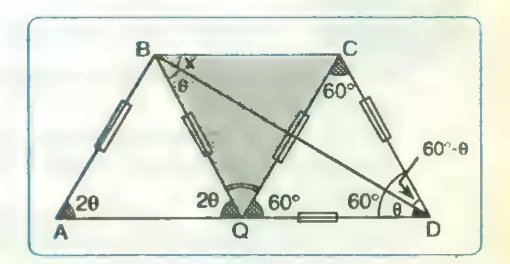
7 Exteriormente al triángulo ABD se traza el triángulo BCD de manera que:

AB = CD, $m\angle BAD = 2m\angle ADB$; $m\angle BDC = 60° - m\angle ADB$. Calcular $m\angle CBD$.

A) 15° **B)** 22,5° **C)** 20° **D)** 30° **E)** 37°

Resolución:

- Según los datos del problema, la figura sería la siguiente:



- Sea: $m\angle CBD = x$

  $m\angle ADB = \theta°$

  ➡ $m\angle BAD = 2\theta$

- Por dato: $m\angle BDC = 60° - m\angle ADB$

  ➡ $m\angle BDC = 60° - \theta$ ➡ $m\angle ADC = 60°$

- Trazamos BQ = AB resultando: Δ ABQ: isósceles ➡ $m\angle BAQ = m\angle BQA = 2\theta$

  Δ BQD: isósceles ➡ BQ = QD

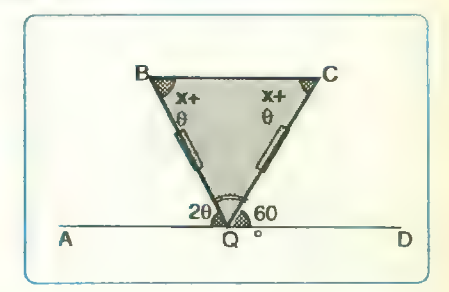
- Ahora como QD = DC y $m\angle QDC = 60°$, trazamos $\overline{QC}$ y el Δ QDC, resultará ser equilátero y por lo tanto: QD = DC = QC

- Finalmente el Δ BQC es también isósceles:

  $m\angle B + m\angle C + m\angle Q = 180°$

  $(x + \theta) + (x + \theta) + (120° - 2\theta) = 180°$

  Rpta. D



Observación: Notar que:

$2\theta° + m\angle Q + 60° = 180°$

$m\angle Q = 120° - 2\theta$

¿SABÍAS QUE...

...al matemático alemán Johann Carl Gauss se le conoce como "el Príncipe de la Matemática?

Gauss nació en la ciudad de Brunswick, en el seno de una familia muy humilde y, para poder desarrollar su brillante carrera, contó con el apoyo financiero del duque de Brunswick.

En los inicios del siglo XIX, abandonó la Aritmética para dedicarse a la Astronomía y desarrolló un método para acompañar la órbita de los satélites, usado aún en nuestros días. Esto le permitió obtener el cargo de "Director del Observatorio de Gottingen", en donde transcurrieron cuarenta años de su vida.

Capítulo 6

Proporcionalidad y Semejanza

6.1 RAZÓN GEOMÉTRICA

La razón geométrica de dos números racionales a y b es el cociente a/b, siendo $b \neq 0$.

6.2 PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Es la comparación de dos razones geométricas.

Ejemplos: ① $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ ② $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ ③ $\frac{0,12}{0,4} = \frac{3}{10}$

En general:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- Se lee: ***"a es a b como c es a d"***
- a y c ⇔ se llaman **antecedentes**
  b y d ⇔ se llaman **consecuentes**
- a y d ⇔ son los **Términos Extremos**
  b y c ⇔ son los **Términos Medios**

⇔ PROPIEDAD FUNDAMENTAL

El producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios

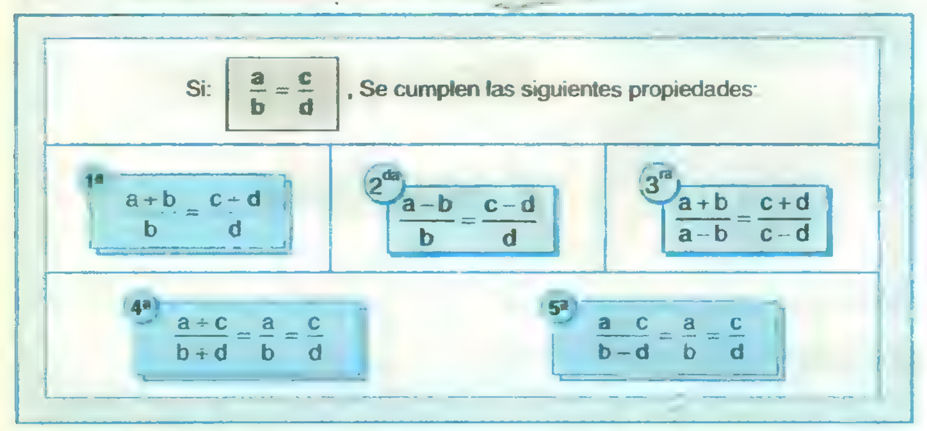
Si:

Ejemplos:

① $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \Rightarrow 1 \times 8 = 2 \times 4 \Rightarrow 8 = 8$

② $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \Rightarrow 4 \times 9 = 6 \times 6 \Rightarrow 36 = 36$

6.2.1 PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES



Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, Se cumplen las siguientes propiedades:

1ª $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

2da $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

3ra $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

4ª $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

5ª $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Ejercicio 1: En cada una de las siguientes proporciones, hallar el término "x".

① $\frac{x}{3}=\frac{16}{12}$ ③ $\frac{4}{x}=\frac{x}{9}$ ⑤ $\frac{0,25}{x}=\frac{x}{0,01}$ ⑦ $\frac{2/3}{1/2}=\frac{x}{3/4}$

② $\frac{24}{4}=\frac{72}{x}$ ④ $\frac{112}{x}=\frac{x}{7}$ ⑥ $\frac{x}{125}=\frac{5}{x}$ ⑥ $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{3}}{x}$

Resolución:

- Debemos de aplicar la **Propiedad Fundamental**:

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ⇒ $a\cdot d=b\cdot c$

① $\frac{x}{3}=\frac{16}{12}$ ⇒ $12x=3\cdot 16$ ⇒ $x=\frac{3\cdot 16}{12}=4$ ∴ $x=4$ ***Rpta.***

② $\frac{24}{4}=\frac{72}{x}$ ⇒ $24x=4\cdot 72$ ⇒ $x=\frac{4\cdot 72}{24}=12$ ∴ $x=12$ ***Rpta.***

③ $\dfrac{4}{x} = \dfrac{x}{9} \Rightarrow x \cdot x = 4 \cdot 9 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = 6}$ **Rpta.**

④ $\dfrac{112}{x} = \dfrac{x}{7} \Rightarrow x \cdot x = 112 \cdot 7 \Rightarrow x^2 = 4^2 \cdot 7^2 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = 28}$ **Rpta.**

$\boxed{112 = 4^2 \cdot 7}$

⑤ $\dfrac{0{,}25}{x} = \dfrac{x}{0{,}01} \Rightarrow x \cdot x = (25 \cdot 10^{-2})(10^{-2}) \Rightarrow x^2 = 5^2 \cdot (10^{-2})^2 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = 0{,}05}$ **Rpta.**

⑥ $\dfrac{x}{125} = \dfrac{5}{x} \Rightarrow x \cdot x = 125 \cdot 5 \Rightarrow x^2 = 25^2 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = 25}$ **Rpta.**

⑦ $\dfrac{2/3}{1/2} = \dfrac{x}{3/4} \Rightarrow \dfrac{1}{2}x = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = 1}$ **Rpta.**

⑧ $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{x} \Rightarrow \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{x} \Rightarrow \dfrac{3}{2}x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = \dfrac{2}{9}}$ **Rpta.**

Ejercicio 2: Hallar a y b en cada una de las siguientes proporciones.

❶ $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3}$; $a + b = 20$

❷ $\dfrac{a}{36} = \dfrac{b}{24}$; $a - b = 17$

❸ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7}{4}$; $a + b = 60$

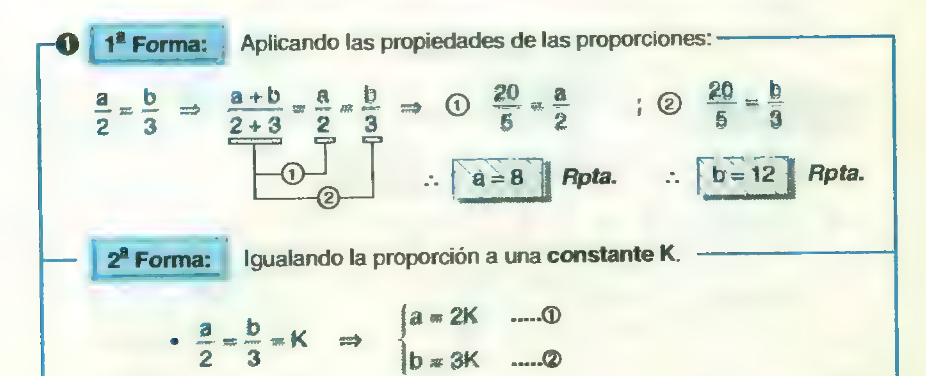
❹ $\dfrac{8}{a} = \dfrac{72}{b}$; $b - a = 16$

❺ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{15}{8}$; $a + b = 92$

❻ $\dfrac{a}{13} = \dfrac{b}{5}$; $a - b = 80$

Resolución:

- Para una mejor ilustración, cada ejercicio lo resolveremos de dos formas.



- Por dato: $a + b = 20$

$2K + 3K = 20$

$\boxed{K = 4}$

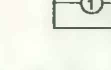
- Reemplazando en ① y ②

$\boxed{a = 2(4) = 8}$ **Rpta.**

$\boxed{b = 3(4) = 12}$ **Rpta.**

❷ **1ª Forma:**

- $\frac{a}{36} = \frac{b}{24}$ ⇒ simplificando denominadores: $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ ⇒ $\frac{a-b}{3-2} = \frac{a}{3} = \frac{b}{2}$



⇒ ① $\frac{17}{1} = \frac{a}{3}$; ② $\frac{17}{1} = \frac{b}{2}$

$\boxed{a = 51}$ **Rpta.** $\boxed{b = 34}$ **Rpta.**

2ª Forma:

- $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = K$ ⇒ ① $\boxed{a = 3K}$ ② $\boxed{b = 2K}$
- Por dato; $a - b = 17$ ⇒ $3K - 2K = 17$ ⇒ $\boxed{k = 17}$
- reemplazando en ① y ②: $\boxed{a = 3 \cdot 17 = 51}$ $\boxed{b = 2 \cdot 17 = 34}$

Rpta. **Rpta.**

❸ **1ª Forma:**

- $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$ ⇒ ① $\frac{a+b}{b} = \frac{7+4}{4}$; ② $\frac{a+b}{a} = \frac{7+4}{7}$

$\frac{60}{b} = \frac{11}{4}$ $\frac{60}{a} = \frac{11}{7}$

$\boxed{b = \frac{240}{11}}$ **Rpta.** $\boxed{a = \frac{420}{11}}$ **Rpta.**

2ª Forma:

- $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$ ⇒ ① $\boxed{a = 7K}$ ② $\boxed{b = 4K}$
- Por dato; $a + b = 60$ ⇒ $7K + 4K = 60$ ⇒ $\boxed{k = 60/11}$
- En ① y ② : $\boxed{a = 7 \cdot \frac{60}{11} = \frac{420}{11}}$ $\boxed{b = 4 \cdot \frac{60}{11} = \frac{240}{11}}$

Rpta. **Rpta.**

4 **1ª Forma:**

- $\frac{\not{8}}{a}=\frac{\not{72}}{b}$ ⇒ simplificando denominadores: $\frac{1}{a}=\frac{9}{b}$ ⇒ invirtiendo: $\frac{a}{1}=\frac{b}{9}$
- ⇒ $\frac{b-a}{9-1}=\frac{a}{1}=\frac{b}{9}$ ⇒ ① $\frac{16}{8}=\frac{a}{1}$; ② $\frac{16}{8}=\frac{b}{9}$

$a=2$ *Rpta.* $b=18$ *Rpta.*

2ª Forma:

- $\frac{8}{a}=\frac{72}{b}$ ⇒ $\frac{a}{1}=\frac{b}{9}$ ⇒ ① $a=K$ ② $b=9K$
- Por dato; $b-a=16$ ⇒ $9K-K=16$ ⇒ $K=2$
- Reemplazando en ① y ②: $a=2$ *Rpta.* $b=9(2)=18$ *Rpta.*

5 **1ª Forma:**

- $\frac{a}{b}=\frac{15}{8}$ ⇒ ① $\frac{a+b}{b}=\frac{15+8}{8}$; ② $\frac{a+b}{a}=\frac{15+8}{15}$

$\frac{92}{b}=\frac{23}{8}$ $\frac{92}{a}=\frac{23}{15}$

$b=32$ *Rpta.* $a=60$ *Rpta.*

2ª Forma:

- $\frac{a}{b}=\frac{15}{8}$ ⇒ ① $a=15K$ ② $b=8K$
- Según datos; $a+b=92$ ⇒ $15K+8K=92$ ⇒ $k=4$
- En ① y ② : $a=15\cdot 4=60$ *Rpta.* $b=8\cdot 4=32$ *Rpta.*

6 **1ª Forma:**

- $\frac{a}{13}=\frac{b}{5}$ ⇒ $\frac{a-b}{13-5}=\frac{a}{13}=\frac{b}{5}$, pero por dato: $a-b=80$

$\Rightarrow$ ① $\dfrac{80}{8} = \dfrac{a}{13}$; ② $\dfrac{80}{8} = \dfrac{b}{5}$

a = 130 *Rpta.* **b = 50** *Rpta.*

2ª Forma:

- $\dfrac{a}{13} = \dfrac{b}{5}$ $\Rightarrow$ ① **a = 13K** ② **b = 5K**
- Por dato; a - b = 80 $\Rightarrow$ 13K - 5K = 80 $\Rightarrow$ **k = 10**
- En ① y ②: **a = 13 · 10 = 130** *Rpta.* **b = 5 · 10 = 50** *Rpta.*

NOTA:

Estimado Alumno: Cuando tengas que resolver un ejercicio similar, debes hacerlo según la forma que mejor se adapte a tu gusto personal.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 24

Ejercicio 1 : En cada una de las siguientes proporciones hallar "x".

a) $\dfrac{15}{24} = \dfrac{x}{96}$ $\Rightarrow$ ....

.... $\Rightarrow$ x =

b) $\dfrac{x}{20} = \dfrac{28}{35}$ $\Rightarrow$ ....

.... $\Rightarrow$ x =

c) $\dfrac{24}{30} = \dfrac{32}{x}$ $\Rightarrow$ ....

.... $\Rightarrow$ x =

d) $\dfrac{x}{12} = \dfrac{3}{x}$ $\Rightarrow$ ....

.... $\Rightarrow$ x =

Ejercicio 2 : Hallar a y b si:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{7}$; a + b = 72

Resolución:

Rpta. **a = 16** **b = 56**

Ejercicio 3 : Hallar x e y, si:

$\frac{x}{11} = \frac{y}{8}$; $x - y = 120$

Resolución:

Rpta. $x = 440$ $y = 320$

Ejercicio 4 : Hallar m y n, si:

$\frac{m}{n} = \frac{84}{35}$; $m - n = 49$

Resolución:

Rpta. $m = 84$ $n = 35$

Ejercicio 5 : Hallar a y b:

$\frac{7}{a} = \frac{4}{b}$; $a + b = 154$

Resolución:

Rpta. $a = 98$ $b = 56$

Ejercicio 6 : Hallar a y b:

$\frac{56}{a} = \frac{16}{b}$; $a + b = 144$

Resolución:

Rpta. $a = 112$ $b = 32$

6.3 SEGMENTOS PROPORCIONALES

Dos segmentos tales como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ **son proporcionales** a otros dos tales como $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$, cuando sus longitudes forman la siguiente **proporción geométrica**:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ}$$

Ejemplo:

Sean AB = 5 u ; CD = 10 u ; MN = 3 u ; PQ = 6 u

A ——— B (5 u) C ——— D (10 u)

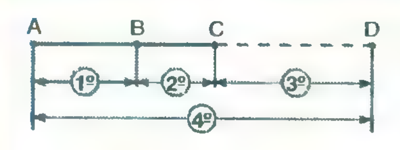
M ——— N (3 u) P ——— Q (6 u)

Como: $\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ}$, es decir: $\frac{5\,u}{3\,u} = \frac{10\,u}{6\,u}$

Entonces se dice que: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ **son proporcionales** a $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$

6.4 DIVISIÓN ARMÓNICA

Decimos que un segmento $\overline{AC}$ **está dividido armónicamente** por los puntos B y D (B está en $\overline{AC}$ y D en la prolongación de $\overline{AC}$) cuando se cumple la siguiente proporción:



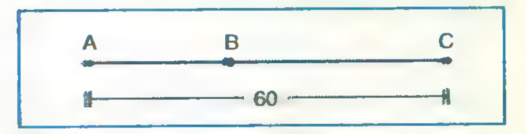
Proporción:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

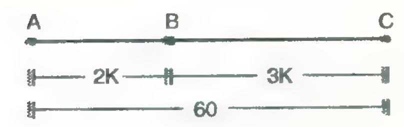
- B y D **dividen armónicamente** al segmento AC
- Los puntos B y D se llaman **conjugados armónicos** de A y C
- A los cuatro puntos A, B, C y D se les llama **cuaterna armónica**

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE SEGMENTOS PROPORCIONALES Y DIVISIÓN ARMÓNICA

Ejercicio : En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a 2 y 3.
Hallar AB y BC.



Resolución:



- Según datos: $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{3} = K$

$\Rightarrow$ $\boxed{AB = 2K}$ .....❶

$\Rightarrow$ $\boxed{BC = 3K}$ .....❷

- Del gráfico: $AB + BC = 60$

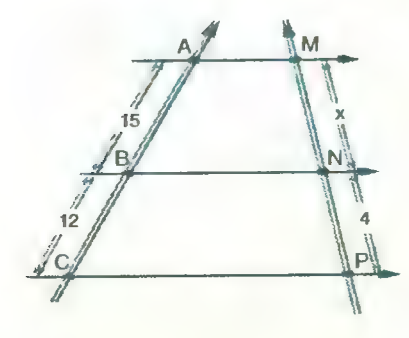
$2K + 3K = 60$

$\Rightarrow$ $\boxed{K = 12}$ .....❸

- Reemplazamos ❸ en ❶ y ❷: $\boxed{AB = 2(12) = 24}$ ***Rpta.***

$\boxed{BC = 3(12) = 36}$ ***Rpta.***

Ejercicio : En el gráfico adjunto $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$ Hallar "x".



Resolución:

- Del gráfico AB = 15 ; BC = 12 ;

MN = x ; NP = 4

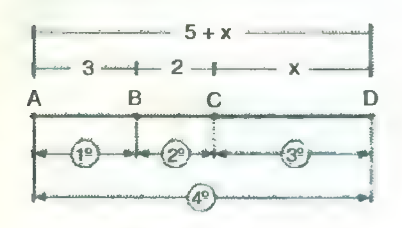
- Según datos:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

$\Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{12}{4} \Rightarrow$ $\boxed{x = 5}$ ***Rpta.***

Ejercicio : En la figura los puntos A, B, C y D, constituyen una cuaterna armónica. Hallar "x".

Resolución:



- Recordemos que si A, B, C y D forman una cuaterna armónica, entonces se debe cumplir la siguiente proporción:

Regla Práctica:

- Reemplazando:

$$\frac{3}{2} = \frac{5+x}{x} \quad \Rightarrow \quad 3x = 10 + 2x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 10} \quad \textit{Rpta.}$$

Ejercicio : Un segmento $\overline{AB}$ que mide 3 m es dividido armónicamente por los puntos M y N. Si AM = 2 m, hallar MN.

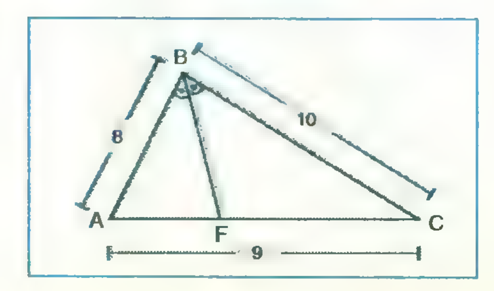
Resolución:

- Sea MN = x , luego del gráfico:

- Según la definición de división armónica (o proporción armónica)

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1} = \frac{2+x}{x-1} \Rightarrow \quad 2x - 2 = 2 + x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 4} \quad \textit{Rpta.}$$

Ejercicio : En la figura adjunta, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{AF}$ y $\overline{FC}$. Hallar FC - AF.



Resolución:

- Según datos: $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{BC}{FC}$

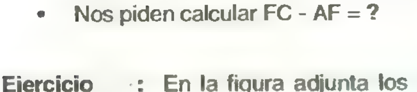
$\Rightarrow \dfrac{\not{8}}{AF} = \dfrac{\not{10}}{FC} \Rightarrow \dfrac{AF}{4} = \dfrac{FC}{5} = K$

$\Rightarrow$ $\boxed{AF = 4K}$ ...❶ $\boxed{FC = 5K}$ ...❷

- Del gráfico: $AF + FC = 9$

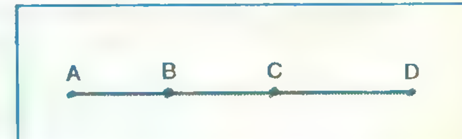
$\Rightarrow 4K + 5K = 9 \Rightarrow \boxed{K = 1}$

- Nos piden calcular FC - AF = ? $\Rightarrow$ $\boxed{FC - AF = 5K - 4K = K = 1}$ ***Rpta.***

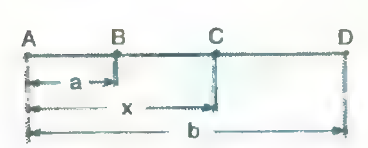


Ejercicio : En la figura adjunta los puntos A, B, C y D, forman una cuaterna armónica.

Si: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{6}$, hallar "AC".



Resolución:



- Sean: $\boxed{AB = a}$; $\boxed{AD = b}$; $\boxed{AC = x}$

- Según datos: $\boxed{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{6}}$ .....①

- Por definición de división armónica:

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \dfrac{a}{x-a} = \dfrac{b}{b-x} \Rightarrow ab - ax = bx - ab$

$\Rightarrow 2ab = (a + b)x \Rightarrow \dfrac{2}{x} = \dfrac{a+b}{ab} \Rightarrow \boxed{\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$ .....②

- Reemplazando ① en ②: $\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \boxed{x = 12}$ ***Rpta.***

Nota: De este problema, deducimos la siguiente propiedad:

Propiedad:

Si los puntos **A, B, C, y D** forman una cuaterna armónica, entonces se cumple la siguiente relación:

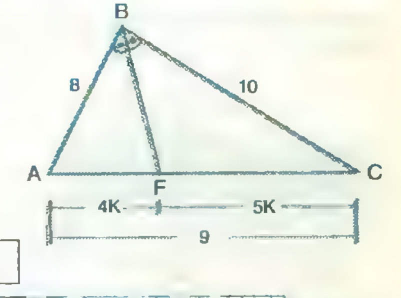
A B C D

$\boxed{\dfrac{2}{AC} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD}}$ **(Relación de Descartes)**

- Según datos: $\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FC}$

$\Rightarrow \frac{8}{AF} = \frac{10}{FC} \Rightarrow \frac{AF}{4} = \frac{FC}{5} = K$

$\Rightarrow$ $\boxed{AF = 4K}$ ...❶ $\boxed{FC = 5K}$ ...❷



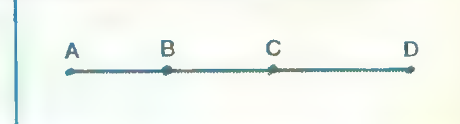
- Del gráfico: AF + FC = 9

$\Rightarrow$ 4K + 5K = 9 $\Rightarrow$ $\boxed{K = 1}$

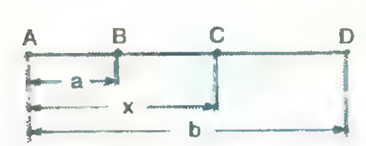
- Nos piden calcular FC - AF = ? $\Rightarrow$ $\boxed{FC - AF = 5K - 4K = K = 1}$ ***Rpta.***

Ejercicio : En la figura adjunta los puntos A, B, C y D, forman una cuaterna armónica.

Si: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{6}$, hallar "AC".



Resolución:



- Sean: $\boxed{AB = a}$; $\boxed{AD = b}$; $\boxed{AC = x}$

- Según datos: $\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}}$ .....①

- Por definición de división armónica:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{a}{x-a} = \frac{b}{b-x} \Rightarrow ab - ax = bx - ab$$

$$\Rightarrow 2ab = (a+b)x \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \text{ .....②}$$

- Reemplazando ① en ②: $\frac{2}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{x = 12}$ ***Rpta.***

Nota: De este problema, deducimos la siguiente propiedad:

Propiedad:

Si los puntos **A, B, C, y D** forman una cuaterna armónica, entonces se cumple la siguiente relación:

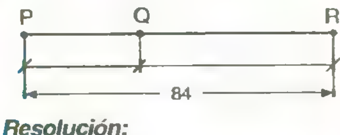
A B C D

$$\boxed{\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}}$$

(Relación de Descartes)

TALLER DE EJERCICIOS Nº 25

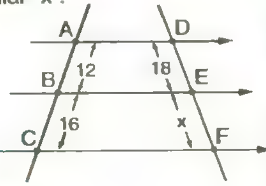
Ejercicio 1 : En la figura, $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ son proporcionales a 3 y 4 Hallar PQ y QR.



Resolución:

Rpta. PQ = 36 QR = 48

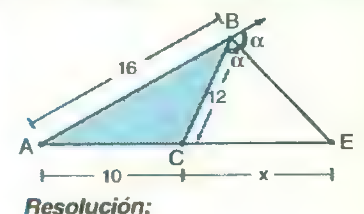
Ejercicio 2 : En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$, respectivamente. Calcular "x".



Resolución:

Rpta. x =24

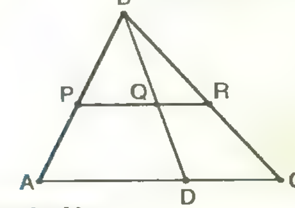
Ejercicio 3 : En la figura, según un teorema $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$, respectivamente. Hallar "CE".



Resolución:

Rpta. x = 30

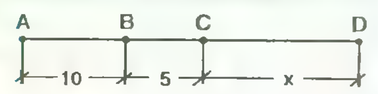
Ejercicio 4 : En la figura:
Si $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ son proporcionales a $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, PQ = 3 ; QR = 2 ; AD = 12, hallar "AC".



Resolución:

Rpta. AC = 20

Ejercicio 5 : Si A, B, C y D forman una cuaterna armónica, hallar "x".



Resolución:

Rpta. x = 15

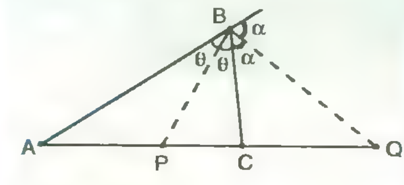
Ejercicio 6 : Los puntos colineales A, M, B y N están ubicados de tal forma que M y N son los conjugados armónicos de A y B. Calcular AB.

Si $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{10}$

Resolución:

Rpta. AB = 20

Ejercicio 7 : En la figura adjunta por un teorema se sabe que: P y Q dividen armónicamente a $\overline{AC}$. Si AP = 12 ; PC = 8. Hallar "PQ".



Resolución:

Rpta. PQ = 48

Ejercicio 8 : Un segmento $\overline{AB}$ es dividido armónicamente por los puntos Q y T. Hallar AB, si AQ = 10 y AT = 15.

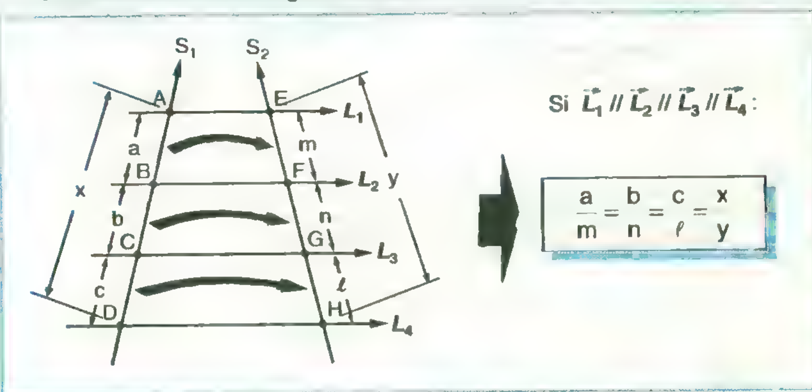
Resolución:

Rpta. AB = 12

6.5 PRINCIPALES TEOREMAS SOBRE PROPORCIONALIDAD

6.5.1 TEOREMA DE THALES

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos determinados en la primera secante son proporcionales a los segmentos determinados en la segunda secante.



Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{\ell} = \frac{x}{y}$$

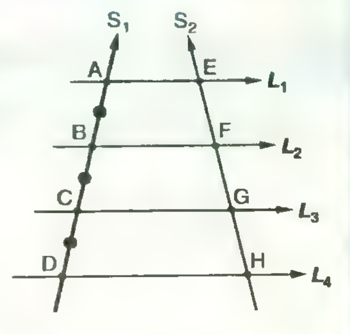
Casos Particulares:

A) <u>RECTAS EQUIPARALELAS</u>.- Si una recta secante determina sobre tres o más rectas paralelas, segmentos congruentes, cualquiera otra recta secante determinará también sobre dichas paralelas segmentos congruentes

En el gráfico: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$

$\overleftrightarrow{S_1}$: recta secante

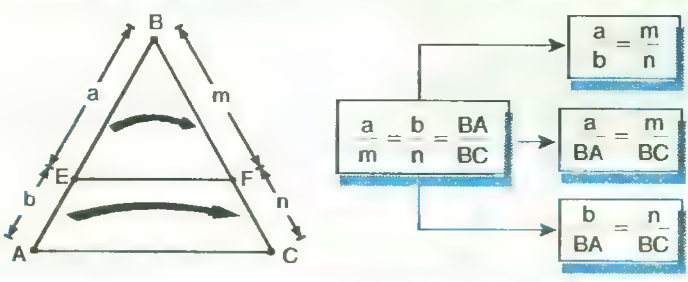
$\overleftrightarrow{S_2}$: recta secante



Si: AB = BC = CD ⇒ EF = FG = GH

$\overleftrightarrow{L_1}$, $\overleftrightarrow{L_2}$, $\overleftrightarrow{L_3}$ y $\overleftrightarrow{L_4}$ son **rectas equiparalelas**

B) EN EL TRIÁNGULO.- En la figura, si $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, los segmentos determinados en $\overline{AB}$ serán proporcionales a los segmentos determinados en $\overline{BC}$



$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{BA}{BC}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

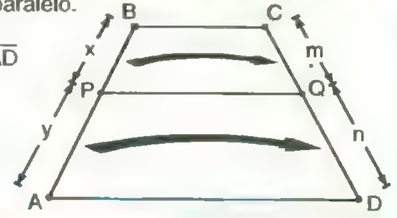
$$\frac{a}{BA} = \frac{m}{BC}$$

$$\frac{b}{BA} = \frac{n}{BC}$$

C) EN EL TRAPECIO.- Un segmento paralelo a las bases determina en uno de los lados no paralelos, segmentos que serán proporcionales a los determinados en el otro lado no paralelo.

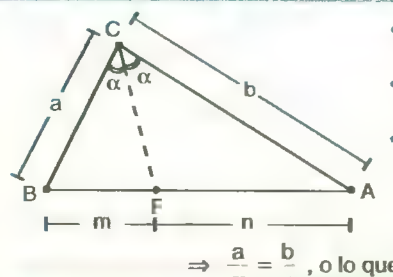
Así en la figura, si: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{BA}{CD}$$



6.5.2 TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todo triángulo, los lados laterales a una bisectriz son proporcionales a los segmentos determinados por la misma en el lado opuesto.



- En el Δ ABC, $\overline{CF}$ es una bisectriz interior.
- a y b son las longitudes de los lados laterales a la bisectriz.
- m y n son las longitudes de los segmentos determinados por la bisectriz en el lado opuesto.

$\Rightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$, o lo que es lo mismo: $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}}$ **(TEOREMA)**

Generalmente se utiliza esta última expresión.

DEMOSTRACIÓN

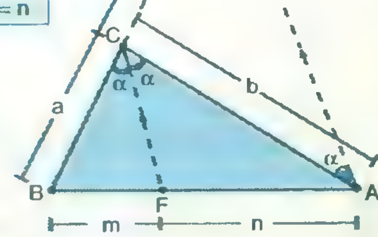
Hipótesis

- El Δ ABC es un triángulo cualquiera
- $\overline{CF}$ es la bisectriz del $\angle BCA$

BC = a | AC = b
BF = m | FA = n

Tesis

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$



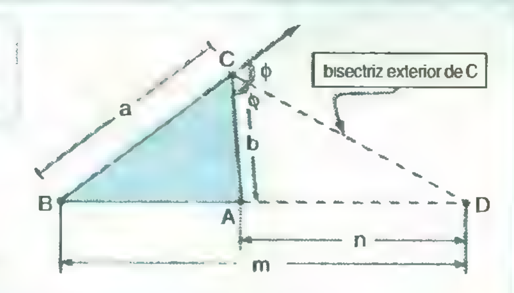
Afirmaciones	Razones
1. Trazamos $\overline{AH} \parallel \overline{FC}$	1. Trazo auxiliar
2. $m\angle BCF = m\angle H = \alpha$	2. Ángulos correspondientes
3. $m\angle FCA = m\angle CAH = \alpha$	3. Ángulos alternos internos
4. El Δ ACH, es isósceles	4. Porque tiene 2 ángulos iguales a "α" c/u.
5. CH = CA = b	5. Teorema del triángulo isósceles.
6. En el Δ ABH: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$	6. Aplicación del Teorema de Thales en el triángulo.

6.5.3 TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En todo triángulo una bisectriz exterior determina sobre la prolongación del lado opuesto segmentos proporcionales a los lados laterales a dicha bisectriz.

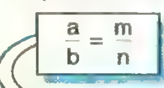
En la figura adjunta:

a y **b** son proporcionales a **m** y **n** respectivamente.



Es decir: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, o

lo que es lo mismo:



$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$ (TEOREMA)

Esta última expresión es la que con frecuencia se utiliza

Para demostrar este teorema, se recomienda trazar desde "A" un segmento paralelo a la bisectriz $\overline{CD}$ (dicho segmento debe cortar a $\overline{BC}$) y luego aplicar el Teorema de Thales en el triángulo.

6.5.4 TEOREMA DEL INCENTRO

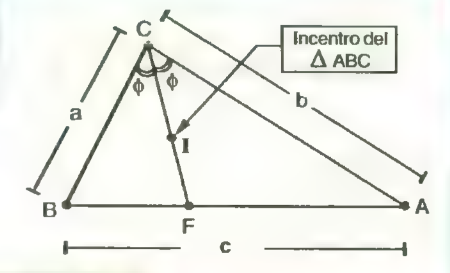
En todo triángulo, el incentro divide a cada bisectriz en dos segmentos que siempre son proporcionales a la suma de las longitudes de los lados laterales y al lado donde cae la bisectriz.

En la figura adjunta:

"CI e IF son proporcionales a (a + b) y a c respectivamente"

Es decir: $\frac{CI}{a+b} = \frac{IF}{c}$

$$\boxed{\frac{CI}{IF} = \frac{a+b}{c}}$$ (TEOREMA)



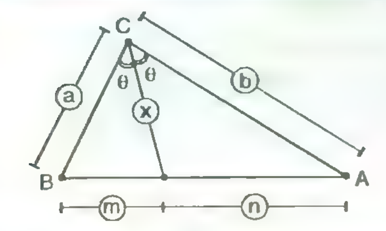
Recuerda que:

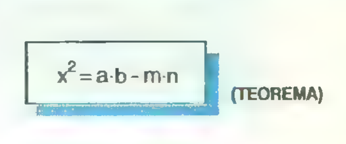
El **incentro** es el punto de intersección de las **3 bisectrices interiores** de un triángulo.

Si Ud. desea saber algo más...

TEOREMAS ADICIONALES

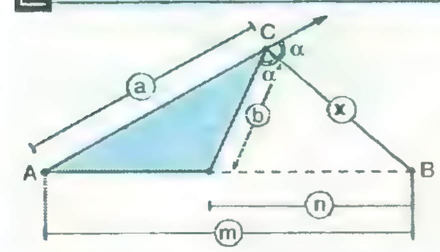
TEOREMA PARA CALCULAR LA LONGITUD DE UNA BISECTRIZ INTERIOR

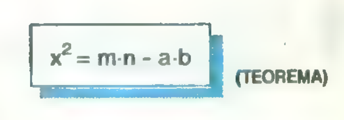




$$x^2 = a\cdot b - m\cdot n$$ (TEOREMA)

TEOREMA PARA CALCULAR LA LONGITUD DE UNA BISECTRIZ EXTERIOR





$$x^2 = m\cdot n - a\cdot b$$ (TEOREMA)

TEOREMA DE MENELAO

En todo triángulo al trazar una recta secante a dos lados pero no paralela al tercer lado, se forman seis segmentos consecutivos. Empezando desde el extremo opuesto a la prolongación se cumple que: el producto de las longitudes de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de las longitudes de los otros segmentos.

En la figura adjunta se cumple que:

$$a\cdot b\cdot c = m\cdot n\cdot \ell$$ (TEOREMA)

Recta secante a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, no paralela al lado $\overline{AC}$

Prolongación

TEOREMA DE CEVA

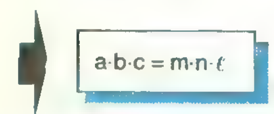
En todo triángulo al trazar tres cevianas conconcurrentes, empezando desde cualquier vértice se cumple que: El producto de las longitudes de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de las longitudes de los otros tres.

Recuerda que:

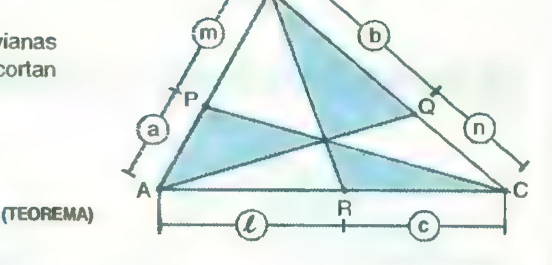
Se llama **ceviana** a un segmento que parte de un vértice de un triángulo hacia un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.

En la figura:

- $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$ son las cervianas concurrentes (las tres se cortan en un mismo punto)

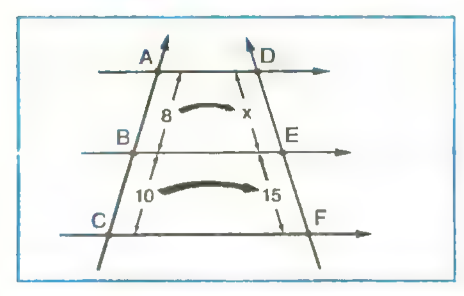


(TEOREMA)



PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M. SOBRE PROPORCIONALIDAD

Problema 1: Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$, hallar "x".



A) 10 D) 9

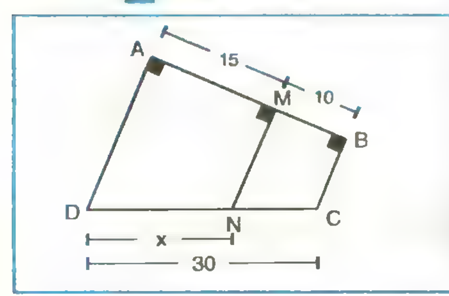
B) 12 E) 14

C) 8

Resolución:

- Por el teorema de Thales: $\frac{8}{x} = \frac{10}{15} \Rightarrow$ $\boxed{x = 12}$ ***Rpta. B***

Problema 2: Hallar "x" en la figura.



A) 18 D) 14

B) 16 E) 12

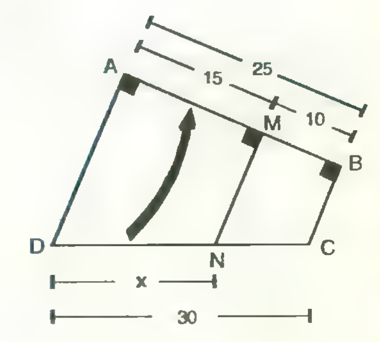
C) 15

Resolución:

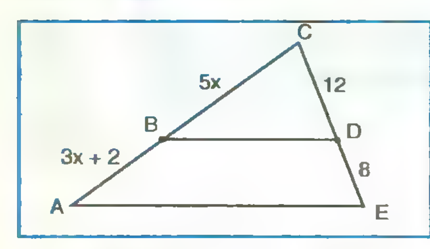
- Como $\overline{BC} // \overline{MN} // \overline{AD}$, aplicamos el teorema de Thales.

$\frac{x}{15} = \frac{30}{25} \Rightarrow$

Rpta. A

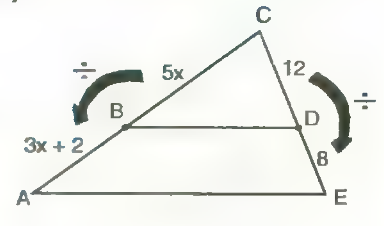


Problema 3: Calcular "x", si $\overline{BD} // \overline{AE}$.



A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

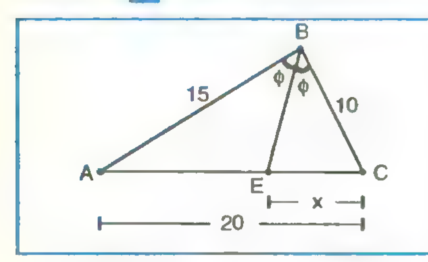
Resolución:



- Por Thales: $\dfrac{5x}{3x+2} = \dfrac{\cancel{12}}{\cancel{8}} \Rightarrow \dfrac{5x}{3x+2} = \dfrac{3}{2}$

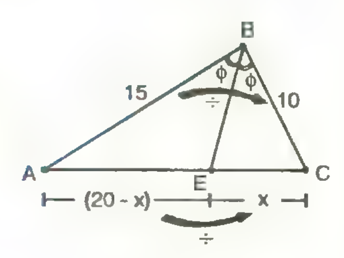
$\Rightarrow \quad 10x = 9x + 6 \quad \therefore \quad \boxed{x = 6}$ ***Rpta. E***

Problema 4: En la figura hallar "x".



A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

Resolución:

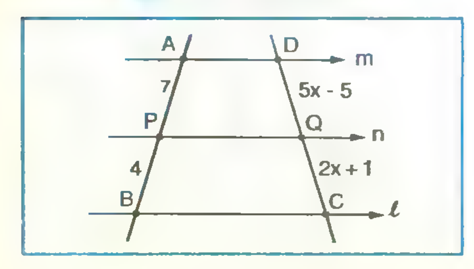


- Por el teorema de la bisectriz interior:

$\dfrac{\cancel{15}}{\cancel{10}} = \dfrac{20-x}{x} \Rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{20-x}{x}$

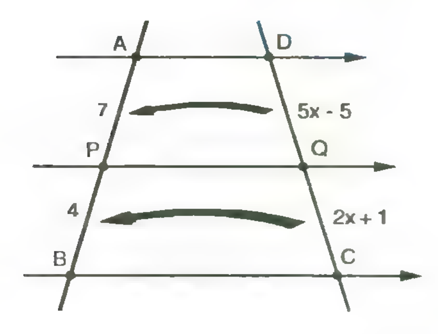
$\Rightarrow \quad 3x = 40 - 2x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 8}$ ***Rpta. C***

Problema 5: Si $\overrightarrow{m} // \overrightarrow{n} // \overrightarrow{\ell}$, hallar "DC".



A) 16
B) 18
C) 24,5
D) 27,5
E) 30

Resolución:



- Del gráfico:

$$DC = 5x - 5 + 2x + 1$$

$$\boxed{DC = 7x - 4} \quad ....❶$$

- Por Thales:

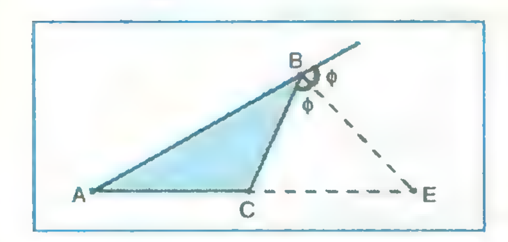
$$\frac{5x-5}{7} = \frac{2x+1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 20x - 20 = 14x + 7$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 4,5}$$

- Reemplazando en ❷ $DC = 7(4,5) - 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{DC = 27,5}$ ***Rpta. D***

Problema 6 : En la figura hallar "CE". Si AB = 16 ; BC = 12 ; AC = 8.



A) 20 **D)** 26

B) 22 **E)** 28

C) 24

Resolución:

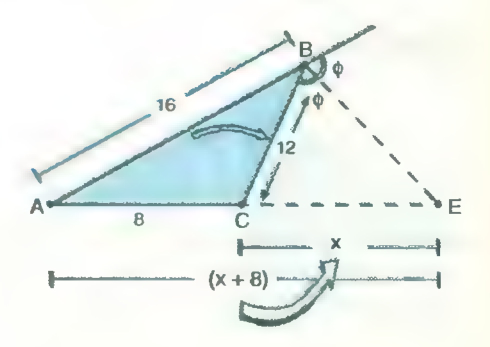
- Sea: $\boxed{CE = x}$

- Por el teorema de la bisectriz exterior:

$$\frac{\cancel{16}}{\cancel{12}} = \frac{x+8}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3} = \frac{x+8}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 4x = 3x + 24$$

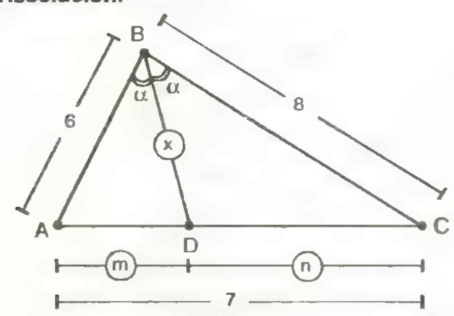


$\therefore$ $\boxed{x = 24}$ ***Rpta. C***

Problema 7: En un triángulo ABC: AB = 6 ; BC = 8 ; AC = 7. Calcular la longitud de la bisectriz interior "BD".

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

Resolución:



- Por el teorema del cálculo de la bisectriz interior:

$$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 = 48 - m \cdot n} \quad \ldots❶$$

- Por el teorema de la bisectriz interior: $\frac{6}{8} = \frac{m}{n}$; y del gráfico: m + n = 7,

resolviendo estas dos ecuaciones se obtiene: $m = 3$ y $n = 4$

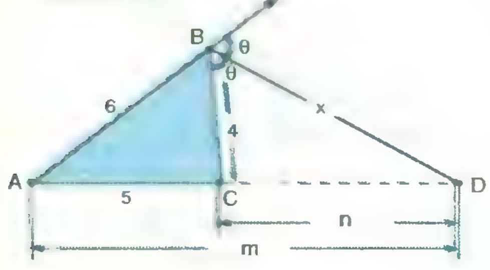
- Reemplazando en ❷ $x^2 = 48 - (3)(4)$

$$x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 6}$$ ***Rpta. C***

Problema 8: Los lados de un triángulo ABC, tienen las siguientes longitudes: AB = 6 ; BC = 4 y AC = 5. Calcular la longitud de la bisectriz exterior "BD".

A) 8 **B)** $\sqrt{130}$ **C)** $2\sqrt{65}$ **D)** 11 **E)** $\sqrt{126}$

Resolución:



- Por el teorema para calcular la bisectriz exterior:

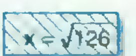
$$BD^2 = AD \cdot CD - AB \cdot BC$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 = mn - 24} \quad \ldots❶$$

- Por el teorema de la bisectriz exterior: $\boxed{\frac{6}{4} = \frac{m}{n}}$ .....❷

- Del gráfico: $\boxed{m = 5 + n}$ ....❶

- Resolviendo ❷ y ❸ $\boxed{m = 15}$ y $\boxed{n = 10}$

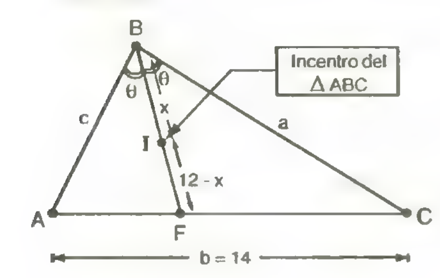
- Reemplazando en ❶ $x^2 = (15)(10) - 24 \Rightarrow$ 

Rpta. E

Problema 9 : El perímetro de un triángulo ABC es 42 m, y la bisectriz interior de "B" mide 12 m y el lado $\overline{AC}$ mide 14 m. Calcular la distancia del incentro al vértice "B".

A) 6 m **B)** 7 m **C)** 8 m **D)** 9 m **E)** 10 m.

Resolución:



- Sea: $\boxed{BI = x} \Rightarrow \boxed{IF = 12 - x}$

- Según datos:

$$a + b + c = 42 \Rightarrow a + 14 + c = 42$$

$$\Rightarrow \boxed{a + c = 28}$$

- Por el teorema del Incentro:

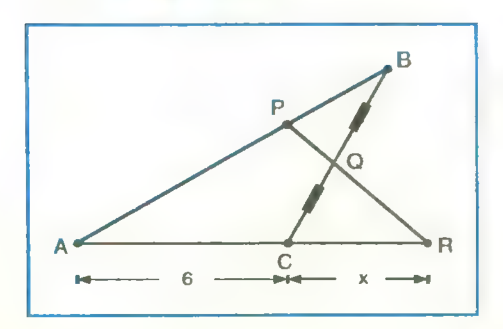
$$\frac{BI}{IF} = \frac{c + a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12 - x} = \frac{28}{14} \Rightarrow \frac{x}{12 - x} = 2$$

$$\Rightarrow x = 24 - 2x \Rightarrow$$

Rpta. C

Problema 10 : En la figura, las longitudes AP y PB son proporcionales a 5 y 2 respetivamente. Hallar "x".

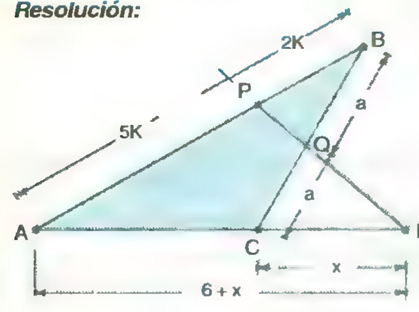


A) 2 **B)** 3

C) 4 **D)** 5

E) 6

Resolución:



- Según datos:

$\frac{AP}{5} = \frac{PB}{2} = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{AP = 5K}\ ; \ \boxed{PB = 2K}$

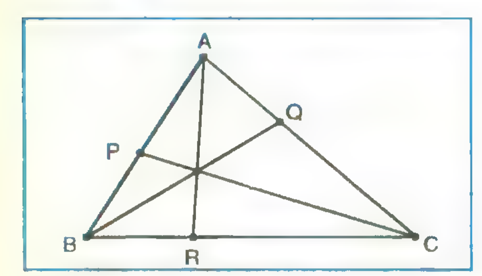
- Del gráfico: "Q" es punto medio de $\overline{BC}$

$\Rightarrow \quad \boxed{BQ = QC = a}$

- Por el Teorema de Menelao: $5K\cdot a\cdot x = 2K\cdot a\cdot(6 + x)$

$\Rightarrow \quad 5x = 12 + 2x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 4}$ ***Rpta. C***

Problema 11: En la figura calcular AB si: AP - PB = 2 ; $\frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3}$; $\frac{BR}{RC} = \frac{1}{2}$

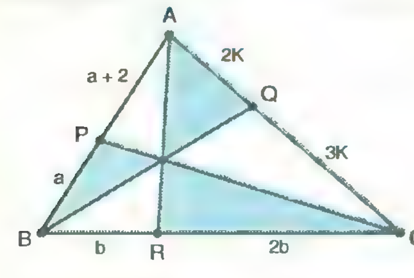


A) 11 **D)** 14

B) 12 **E)** 15

C) 13

Resolución:



- Sea $\boxed{PB = a}$

$\Rightarrow$ por dato: AP - PB = 2

$\Rightarrow \quad \boxed{AP = a + 2}$

$\Rightarrow \quad \boxed{AB = 2a + 2 = ?}$ ....❶

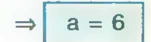
- Según datos del problema:

$\frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad AQ = 2K \quad ; \quad QC = 3K$

$\frac{BR}{RC} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad BR = b \quad ; \quad RC = 2b$

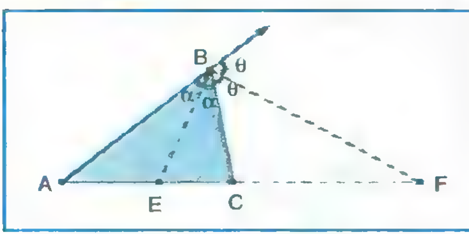
- Por el teorema de Ceva:

$$a \cdot 2\cancel{K} \cdot 2\cancel{b} = (a+2) \cdot 3\cancel{K} \cdot \cancel{b} \Rightarrow 4a = 3a + 6 \Rightarrow a = 6 \quad ....❷$$



- Reemplazando❷ en❶ $AB = 2(6) + 2 \Rightarrow$ $AB = 14$ ***Rpta. D***

Problema 12: En la figura, se muestra al triángulo ABC en el cual:



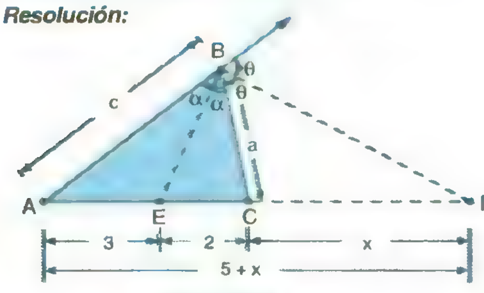
$\overline{BE} \Rightarrow$ es bisectriz interior de B

$\overline{BF} \Rightarrow$ es bisectriz exterior de B

Si AE = 3 ; EC = 2 ; hallar "CF".

A) 10 **B)** 9
C) 8 **D)** 7
E) 6

Resolución:



- Por el teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{c}{a} = \frac{AE}{EC} \quad ...❶$$

- Por el teorema de la bisectriz exterior:

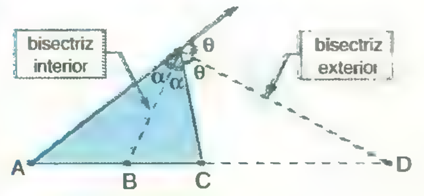
$$\frac{c}{a} = \frac{AF}{CF} \quad ...❷$$

- De ❶ y ❷ $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{CF}$ (esta proporción nos indica que los puntos A, E, C y F forman una ***Cuaterna armónica***)

Reemplazando: $\frac{3}{2} = \frac{5+x}{x} \Rightarrow 3x = 10 + 2x \Rightarrow$ $x = 10$ ***Rpta. A***

PROPIEDAD:

En todo triángulo en el que se ha trazado las bisectrices interior y exterior de un mismo vértice, en el lado opuesto se forma una **cuaterna armónica**.

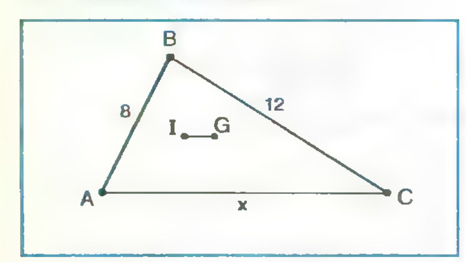


A, B, C y D forman una cuaterna armónica.

Se cumple: $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$ **(DEFINICIÓN)**

y también: $\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$ **(RELACIÓN DE DESCARTES)**

Problema 13 : En el triángulo ABC: AB = 8 m ; BC = 12 m ; $\overline{IG} // \overline{AC}$. Calcular "AC". Si I: Incentro; G: Baricentro.

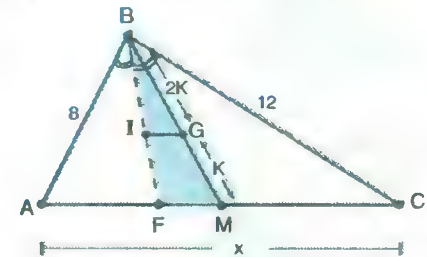


A) 7 m B) 8 m

C) 9 m D) 10 m

E) 11 m

Resolución:



- Como "I" es Incentro:

  ⇒ $\overline{BF}$ es bisectriz

  Como "G" es Baricentro

  ⇒ $\overline{BM}$ es mediana

- Por el teorema del Baricentro: BG = 2GM, luego si $\boxed{GM = K}$ ⇒ $\boxed{BG = 2K}$

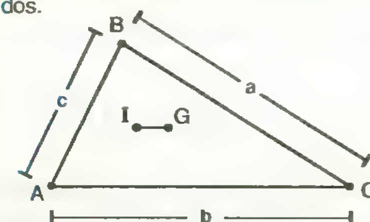
- Por el teorema del Incentro: $\dfrac{BI}{IF} = \dfrac{AB + BC}{AC}$ ⇒ $\boxed{\dfrac{BI}{IF} = \dfrac{20}{x}}$

- En el Δ FBM, por el Teorema de Thales: $\dfrac{BI}{IF} = \dfrac{BG}{GM}$

$$\Rightarrow \frac{20}{x} = \frac{2K}{K} \Rightarrow \boxed{x = 10}$$ ***Rpta. D***

PROPIEDAD:

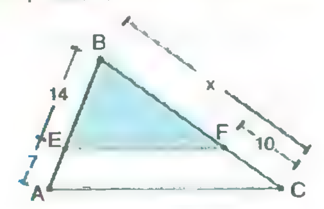
Si en un triángulo, el segmento ue une el Incentro con el Baricentro es paralelo a un lado, la longitud de ese lado es igual a la semisuma de las longitudes de los otros dos.



Si: $\overline{IG} // \overline{AC}$ $\boxed{b = \dfrac{c + a}{2}}$

TALLER DE PROBLEMAS Nº 26

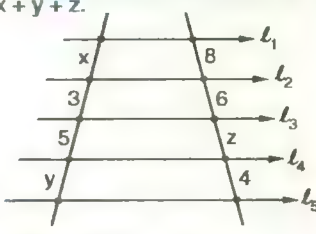
Problema 1 : En la figura mostrada: $\overline{EF} // \overline{AC}$, hallar "x".



Resolución:

Rpta. x = 30

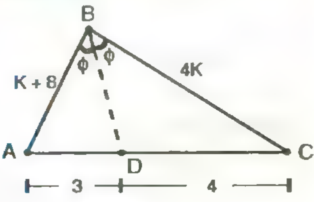
Problema 3 : Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4} // \overleftrightarrow{L_5}$. Hallar x + y + z.



Resolución:

Rpta. x + y + z = 16

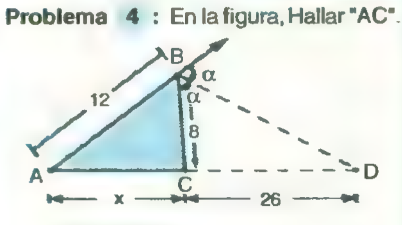
Problema 2 : Calcular el perímetro del triángulo ABC.



Resolución:

Rpta. 35

Problema 4 : En la figura, Hallar "AC".



Resolución:

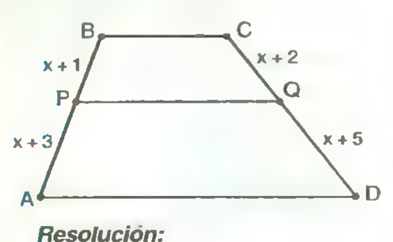
Rpta. x = 13

Problema 5 : En un triángulo ABC, $\overline{AB} = 10$; $BC = 18$. La bisectriz interior $\overline{BF}$ determina en el lado $\overline{AC}$ dos segmentos que difieren 6. Hallar "AC".

Resolución:

Rpta. AC = 21

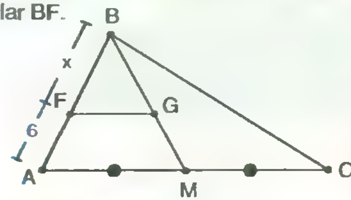
Problema 6 : En el trapecio ABCD, $\overline{BC} // \overline{AD} // \overline{PQ}$, calcular "x".



Resolución:

Rpta. x = 1

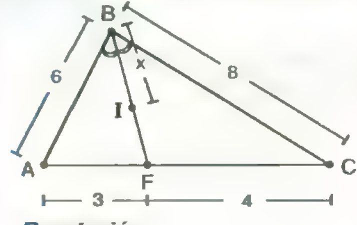
Problema 7 : Siendo "G" el baricentro del triángulo ABC y además $\overline{FG} // \overline{AC}$, hallar BF.



Resolución:

Rpta. x = 12

Problema 8 : En la figura, calcular la distancia del Incentro "I" al vértice "B".



Resolución:

Rpta. x = 4

6.6 SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos, respectivamente congruentes y sus lados homólogos proporcionales. Expresado en otros términos, son semejantes cuando tienen ***la misma forma*** pero ***diferente tamaño***.

- <u>Ángulos Homólogos</u>.- Son parejas de ángulos que son congruentes, es decir que tienen igual medida.

  Ejemplo: $(\angle A, \angle M), (\angle B, \angle N), (\angle C, \angle L)$.

- <u>Lados Homólogos</u>.- Son parejas de lados que se oponen a ángulos homólogos.

  Ejemplo: $(\overline{BC}, \overline{NL}), (\overline{AC}, \overline{ML}), (\overline{AB}, \overline{MN})$.

En la figura que vemos a continuación, segun la definición de semejanza:

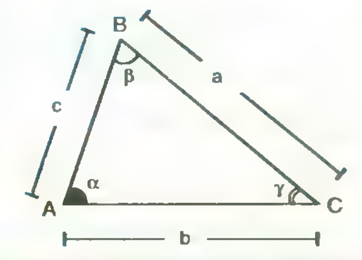
si $m\angle A = m\angle M$, $m\angle B = m\angle N$, $m\angle C = m\angle L$ y

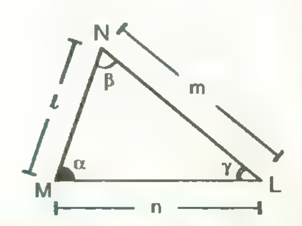
si $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son proporcionales a $\overline{NL}$, $\overline{ML}$ y $\overline{MN}$

es decir si: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{\ell}$

Entonces diremos que el $\Delta ABC \sim \Delta MNL$.

EL símbolo $\sim$ se lee: "*es semejante a*".



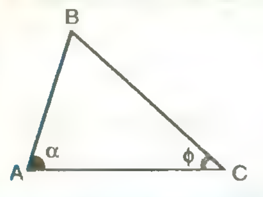


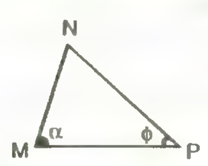
6.6.1 CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triangulos son semejantes si satisfacen las condiciones de cualquiera de los siguientes casos:

1er Caso: (A - A)

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos en el primer triángulo son congruentes a dos ángulos en el segundo triángulo.





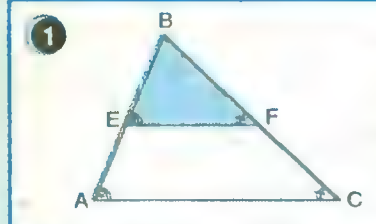
Si: $m\angle A = m\angle M$ y $m\angle C = m\angle P$

Entonces:

$\Delta ABC \sim \Delta MNP$

• COROLARIOS:

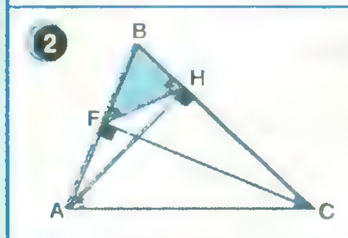
1



En todo triángulo:

Si $\overline{EF} // \overline{AC}$ $\Rightarrow$ $\Delta EBF \sim \Delta ABC$

2

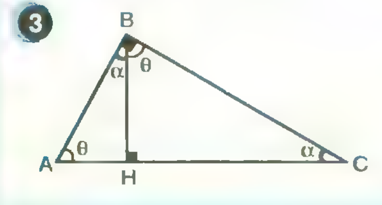


En todo triángulo:

Si $\overline{AH}$ y $\overline{CF}$ son alturas $\Rightarrow$ $m\angle BFH = m\angle ACB$ y $m\angle BHF = m\angle BAC$

y por consiguiente: $\Delta FBH \sim \Delta ABC$

3



En todo triángulo rectángulo:

Si $\overline{BH}$ es altura relativa a la hipotenusa

⊿BHA ~ ⊿BHC ~ ⊿ABC

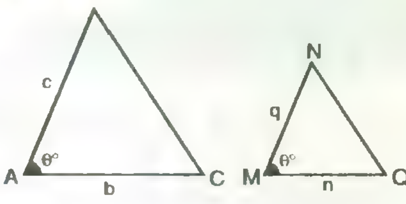
2do Caso: (L.A.L.)

Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales y los ángulos comprendidos congruentes.

Si : $\frac{c}{q} = \frac{b}{n}$

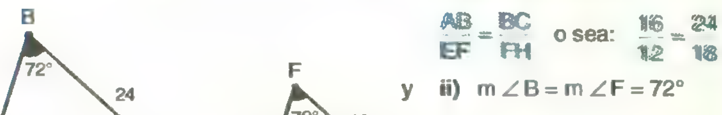
y $m\angle A = m\angle M$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta MNQ$



Ejemplo:

En la siguiente figura se cumple que:



i) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{FH}$, es decir:

$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FH}$ o sea: $\frac{16}{12} = \frac{24}{18}$

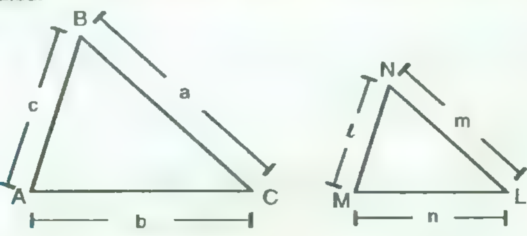
y ii) $m\angle B = m\angle F = 72°$

luego:

el $\Delta ABC \sim \Delta EFH$

3er Caso: (L.L.L.)

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.



Si $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{\ell}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta MNL$

Ejemplo:

En la siguiente figura se cumple la relación:

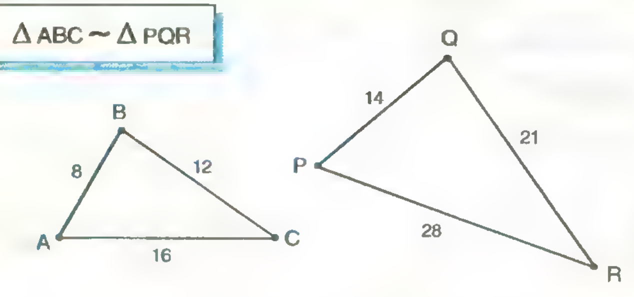
$$\frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = K$$

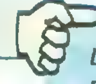
K = Razón de semejanza

o sea: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

es decir: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son ***proporcionales*** a $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PR}$ respectivamente.

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$





Observación:

*De estos tres casos de semejanza el que mas se utiliza es el primero **(A-A)***

6.6.2 RECOMENDACIONES PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE SEMEJANZA.

1º Identificar a los triángulos semejantes, según los casos **A-A**, **L-A-L** ó **L-L-L**

2º Identificar a los lados homólogos, alturas homólogas, etc.

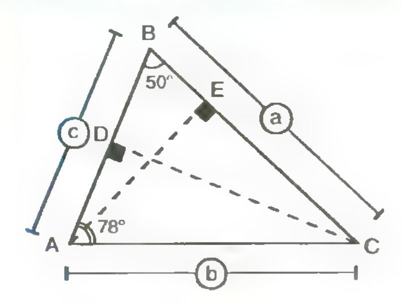
Recuerda que:

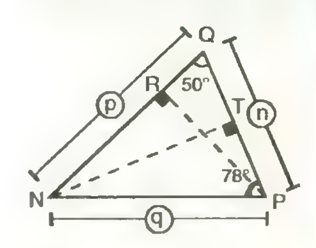
- ***Ángulos homólogos,*** son los ángulos que tienen igual medida.
- ***Lados homólogos,*** son aquellos que se oponen a los ángulos homólogos.

3º Establecer una relación con los elementos homológos. En la relación deben intervenir los datos y la (s) incógnita (s).

Ejemplo:

En la siguiente figura: m ∠A = m ∠P = 78°; m ∠B = m ∠Q = 50°. Establecer la relación entre los elementos homólogos.





- Como los ángulos A y B del Δ ABC son iguales a los ángulos P y Q del Δ PQN, entones estos triángulos son semejantes por el caso **A-A**.

- Las parejas de ángulos homólogos son las siguientes:
  (∠A, ∠P) ; (∠B, ∠Q) ; (∠C, ∠N)

- Las parejas de lados homólogos son las siguientes:
  ($\overline{BC}$,$\overline{QN}$) porque se oponen a los $\angle_s$ A y P
  ($\overline{AC}$,$\overline{PN}$) porque se oponen a los $\angle_s$ B y Q
  ($\overline{AB}$,$\overline{PQ}$) porque se oponen a los $\angle_s$ C y N

- Las parejas de alturas homólogas son las siguientes:
  ($\overline{AE}$,$\overline{PR}$) porque parten de los $\angle_s$ homólogos A y P.
  ($\overline{CD}$,$\overline{NT}$) porque parten de los $\angle_s$ homólogos C y N.

- La relación entre los elementos homólogos es la siguiente:

$$\frac{BC}{QN} = \frac{AC}{PN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AE}{PR} = \frac{CD}{NT} = K$$

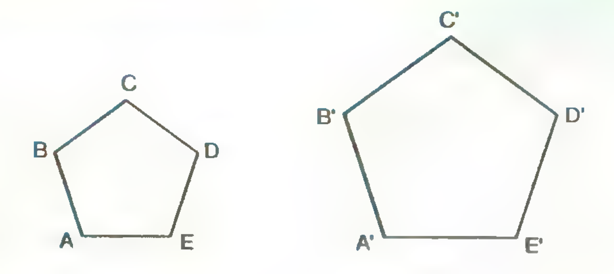
K : es la razón de semejanza

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

En los numeradores van los elementos (lados, alturas, etc) del primer triangulo y en los denominadores los respectivos elementos homólogos en el segundo triángulo.

6.7 SEMEJANZA DE POLÍGONOS

Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos correspondientes congruentes y sus lados homólogos proporcionales.



Si $\angle A \cong \angle A'$; $\angle B \cong \angle B'$; $\angle C \cong \angle C'$; $\angle D \cong \angle D'$; $\angle E \cong \angle E'$

y $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{AE}{A'E'} \Rightarrow$ ⬠ABCDE ∼ ⬠A'B'C'D'E'

6.7.1 PROPIEDADES:

✗ Dos polígonos semejantes se pueden descomponer en igual número de triángulos respectivamente semejantes.

Así, si:

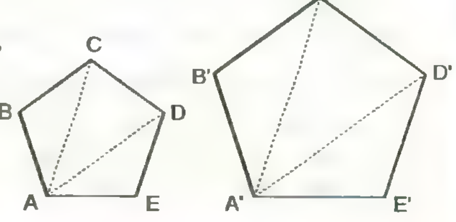
⬠ABCDE ∼ ⬠A'B'C'D'E'

entonces:

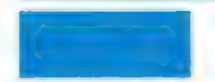
Δ ABC ∼ Δ A'B'C'

Δ ACD ∼ Δ A'C'D'

Δ ADE ∼ Δ A'D'E'

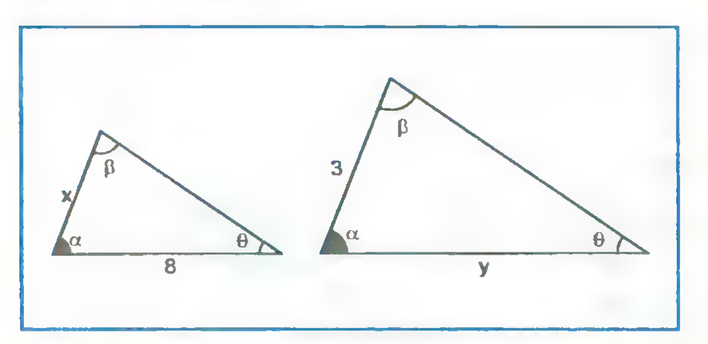


✗✗ Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes. Así por ejemplo, dos cuadrados son semejantes, dos pentágonos regulares son semejantes, etc.



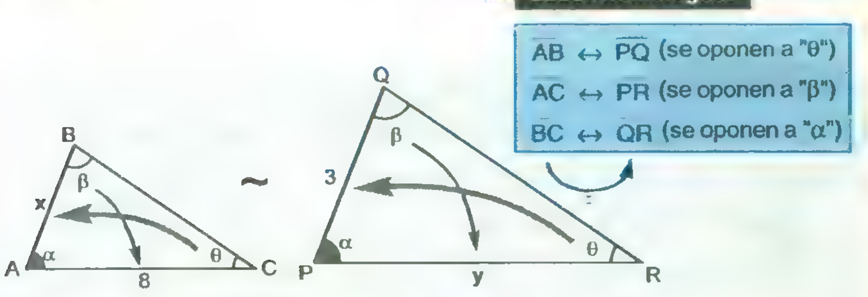
PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M SOBRE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Problema 1: En los triángulos semejantes que se muestran, la razón de semejanza es 2/5. Calcular x + y (x < 3).



A) 3,2
B) 19,2
C) 21,2
D) 24,2
E) 25,2

Resolución:



Lados homólogos:

$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$ (se oponen a "θ")
$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{PR}$ (se oponen a "β")
$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}$ (se oponen a "α")

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = K \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{8}{y} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

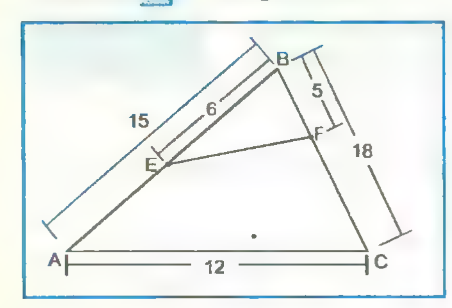
K: Razón de semejanza

i) $\frac{x}{3} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 1,2$

ii) $\frac{8}{y} = \frac{2}{5} \Rightarrow y = 20$

$\therefore$ $x + y = 21,2$ **Rpta.:C**

Problema 2: En la figura hallar "EF"



A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

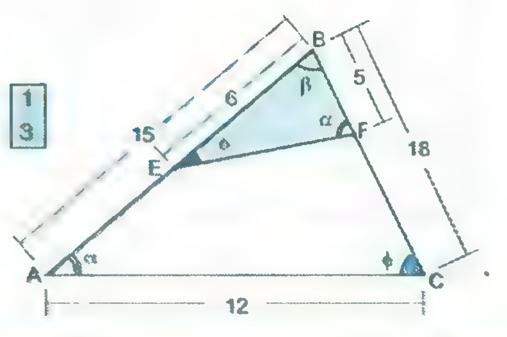
Resolución:

- Del gráfico vemos que:

$\frac{EB}{BC} = \frac{BF}{BA}$ es decir $\frac{6}{18} = \frac{5}{15} = \boxed{\frac{1}{3}}$

y m∠EBF = m∠ABC

luego el Δ EBF ~ Δ ABC
por el caso **L - A - L**



Observación:

La proporción $\frac{EB}{BC} = \frac{BF}{BA}$, nos indica que EB y BF son proporcionales a BC y BA,

Luego:

$\overline{EB}$ es homólogo con $\overline{BC}$ ➡ m∠BFE = m∠BAC = α

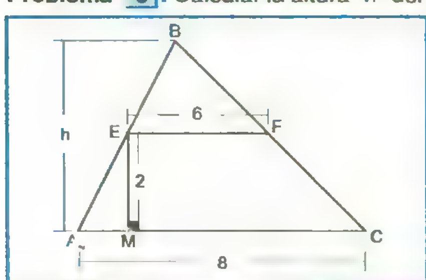
$\overline{BF}$ es homólogo con $\overline{BA}$ ➡ m∠BEF = m∠BCA = ϕ

- Δ EBF ~ Δ ABC (**L - A - L**)

➡ $\frac{EB}{BC} = \frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AC}$ ➡ $\frac{6}{18} = \frac{EF}{12}$

➡ EF = 4 **Rpta.: B**

Problema 3: Calcular la altura "h" del Δ ABC, si EF // AC, EF = 6 ; AC = 8 ; EM = 2



A) 8 B) 9

C) 10 D) 11

E) 12

Resolución:

Lados homólogos:
$\overline{EF} \leftrightarrow \overline{AC}$
Alturas homólogas:
$\overline{BP} \leftrightarrow \overline{BQ}$

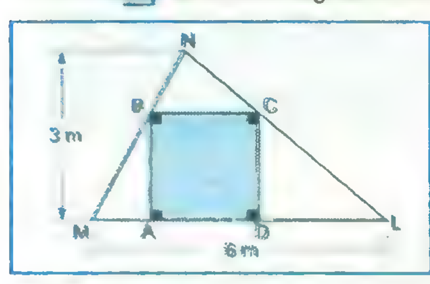
- Δ EBF ~ Δ ABC (**A - A**)

$$\Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{BP}{BQ}$$

$$\Rightarrow \frac{\not{6}}{\not{8}} = \frac{h-2}{h}$$

$\therefore$ $h = 8$ *Rpta. A*

Problema 4: Calcular la longitud del lado del cuadrado ABCD.



A) 1 m B) 2 m

C) 2,5 m D) 3 m

E) 1,5 m

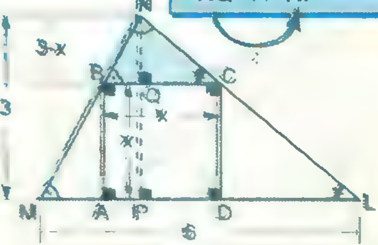
Lados homólogos:
$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{ML}$
Alturas homólogas:
$\overline{NQ} \leftrightarrow \overline{NP}$

Resolución:

- Sea "x" la longitud pedida
- Δ BNC ~ Δ MNL(**A - A**)

$$\Rightarrow \frac{BC}{ML} = \frac{NQ}{NP} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3-x}{3}$$

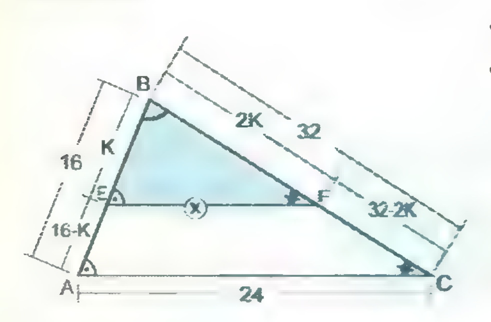
Resolviendo: $x = 2\text{ m}$ **Rpta. B**



Problema 5: En un Δ ABC: AB = 16 ; BC = 32 ; AC = 24, se traza $\overline{EF}$ // AC (E en AB y F en BC) de modo que el perímetro del triángulo EBF es igual al perímetro del trapecio AEFC. Hallar "EF".

A) 18 **B)** 16 **C)** 15 **D)** 14 **E)** 12

Resolución:



- Sea EF = x = ?
- En el Δ ABC, por Thales:

$\Rightarrow \dfrac{BE}{16} = \dfrac{BF}{32} \Rightarrow \dfrac{BE}{1} = \dfrac{BF}{2} = K$

$\Rightarrow$ BE = K   BF = 2K

$\Rightarrow$ AE = 16 - K

CF = 32 - 2K

- Según datos: Perímetro Δ EBF = Perímetro ⏢ AEFC

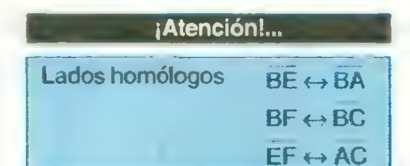
$\Rightarrow K + 2K + \cancel{x} = (16 - K) + \cancel{x} + (32 - 2K) + 24 \Rightarrow$ K = 12

- Δ EBF ~ Δ ABC (**A - A**)

$\Rightarrow \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{EF}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{K}{16} = \dfrac{x}{24}$

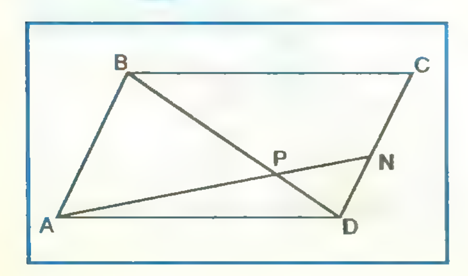
$\Rightarrow \dfrac{12}{16} = \dfrac{x}{24}$ x = 18   **Rpta. A**



¡Atención!...

Lados homólogos $\overline{BE} \leftrightarrow \overline{BA}$
$\overline{BF} \leftrightarrow \overline{BC}$
$\overline{EF} \leftrightarrow \overline{AC}$

Problema 6: ABCD es un paralelogramo donde 4BP = 3BD y AB = 12. Calcular "NC"

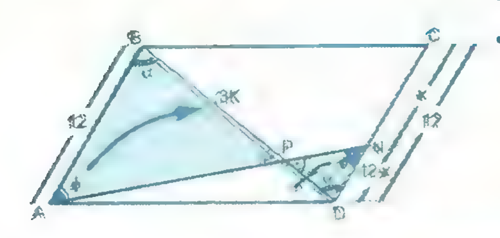


A) 2 **B)** 4

C) 6 **D)** 8

E) 10

Resolución:



- Sea $NC = x$ ➡ $ND = 12 - x$
- Según datos:

$4BP = 3BD$ ➡ $\frac{BP}{3} = \frac{BD}{4} = K$

➡ $BP = 3K$ $BD = 4K$

➡ se deduce que $PD = K$

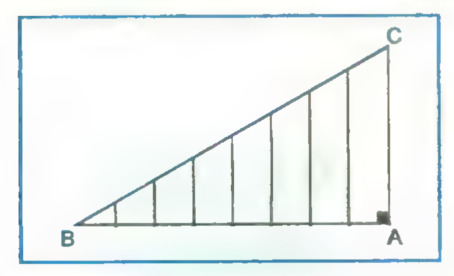
- $\Delta BPA \sim \Delta DPN$ (A - A)

Lados homólogos:
BP ↔ PD (→ φ)
AB ↔ ND (→ •)

➡ $\frac{BP}{PD} = \frac{AB}{ND}$

➡ $\frac{3\cancel{K}}{\cancel{K}} = \frac{12}{12 - x}$ ➡ $12 - x = 4$ ➡ $x = 8$ **Rpta. D**

Problema 7 : El cateto $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC se divide en 8 partes congruentes. Por los puntos de división se trazan 7 segmentos paralelos al cateto $\overline{AC}$, tal como se indica en la figura. Si: AC = 10 m, la suma de las longitudes de los 7 segmentos es:

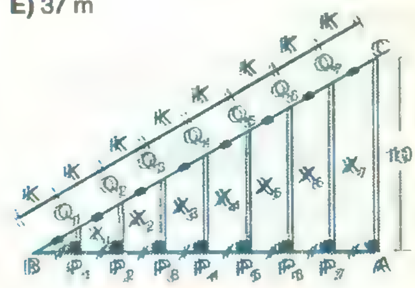


A) 33 m **B)** 34 m

C) 35 m **D)** 36 m

E) 37 m

Resolución:



- Debemos de calcular:

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_7 = ?$

- Por semejanza de triángulos:

$\triangle BP_1Q_1 \sim \triangle BAC$ ➡ $\frac{x_1}{10} = \frac{K}{8K}$ ➡ $x_1 = \frac{1}{8}(10)$

$\triangle BP_2Q_2 \sim \triangle BAC$ ➡ $\frac{x_2}{10} = \frac{2K}{8K}$ ➡ $x_2 = \frac{2}{8}(10)$

Análogamente:

$x_3 = \frac{3}{8}(10)$	$x_4 = \frac{4}{8}(10)$	$x_5 = \frac{5}{8}(10)$	$x_6 = \frac{6}{8}(10)$	$x_7 = \frac{7}{8}(10)$

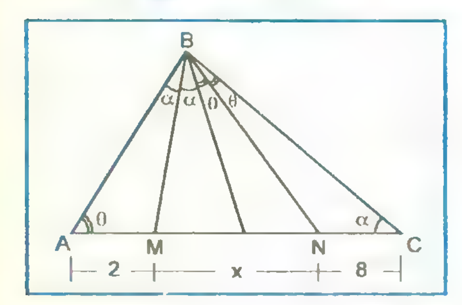
- Luego: $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = \frac{1}{8}(10) + \frac{2}{8}(10) + \frac{3}{8}(10) + \ldots\ldots + \frac{7}{8}(10)$

$$= \frac{10}{8}(1+2+3+\ldots+7)$$

$$= \frac{10}{8}(28)$$

$\therefore$ $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_7 = 35$ m **Rpta.:C**

Problema 8 : Si AM = 2 ; NC = 8, hallar "MN"



A) 3 **B)** 4

C) 5 **D)** 6

E) 7

Resolución:

Lados homólogos:
MB ↔ NC (→ θ)
AM ↔ BN (→ α)

- El Δ MBN, por tener sus tres ángulos iguales resulta ser equilátero:

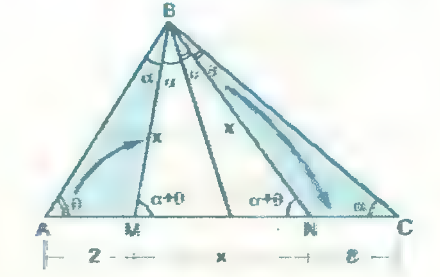
➡ MB = BN = MN = x

- Δ AMB ~ Δ BNC **(A - A)**

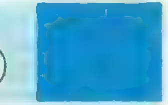
➡ $\frac{MB}{NC} = \frac{AM}{BN}$

$\frac{x}{8} = \frac{2}{x}$

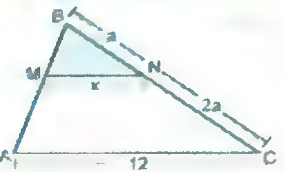
➡ $x^2 = 16$ $\therefore$ $x = 4$ **Rpta.:B**



TALLER DE PROBLEMAS N° 27



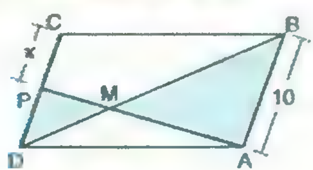
Problema 1: Si MN // AC, hallar x.



Resolución:

Rpta.: x = 4

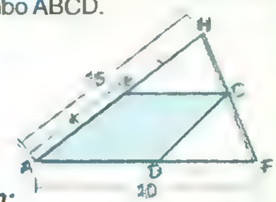
Problema 2: ABCD es un paralelogramo, hallar x, si BM = 2MD.



Resolución:

Rpta. x = 5

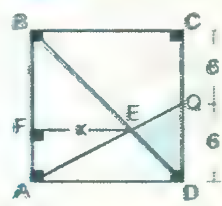
Problema 3: Calcular la longitud del lado de rombo ABCD.



Resolución:

Rpta. x = 6

Problema 4: ABCD es un cuadrado, hallar x.



Resolución:

Rpta. x = 8

Problema 5 : Un triángulo cuyos lados miden 3 ; 4 y 5 metros es semejante a otro triángulo mayor de perímetro 60 metros. El mayor lado de este triángulo mide:

Resolución:

Rpta. 25m

Problema 6 : Hallar x

Resolución:

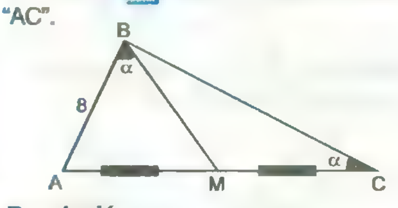
Rpta. $x = 9$

Problema 7 : Hallar x.

Resolución:

Rpta. $x = 10$

Problema 8 : $\overline{BM}$ es mediana, hallar "AC".



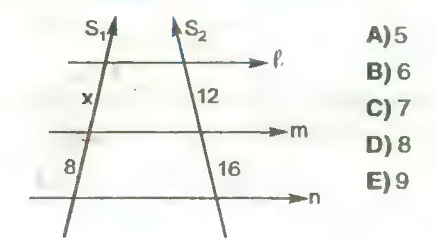
Resolución:

Rpta. $AC = 8\sqrt{2}$

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

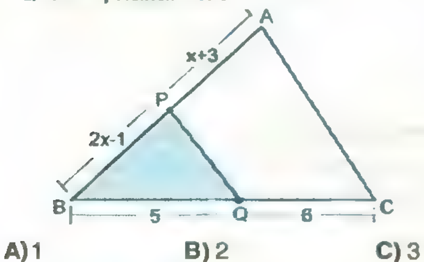
NIVEL I

Problema 1: Si $\vec{\ell} \parallel \vec{m} \parallel \vec{n}$, hallar "x"



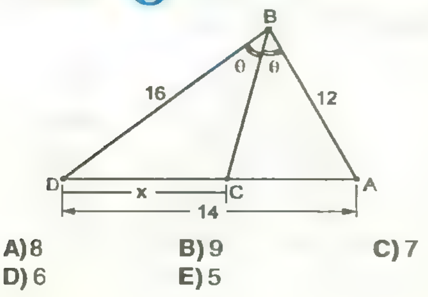
A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

Problema 2: En el triángulo ABC, $PQ \parallel \overline{AC}$, hallar "x".



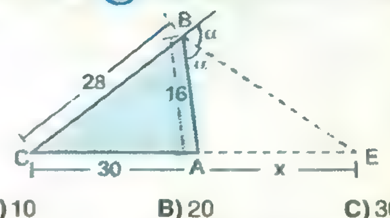
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Problema 3: Hallar x.



A) 8 B) 9 C) 7
D) 6 E) 5

Problema 4: Hallar x.

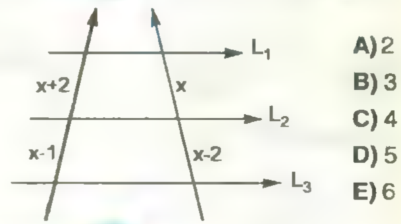


A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

Problema 5: En un triángulo ABC la bisectriz interior del ángulo A detemima sobre el lado opuesto dos segmentos que miden 3 y 5 cm. Si AB = 10 cm, Calcular AC.

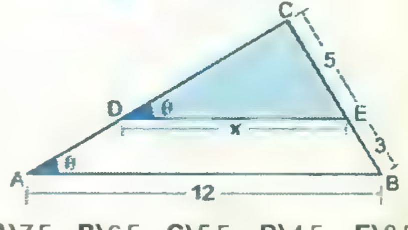
A) 2 cm B) 3 cm C) 4 cm
D) 5 cm E) 6 cm

Problema 6: Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$, hallar x.



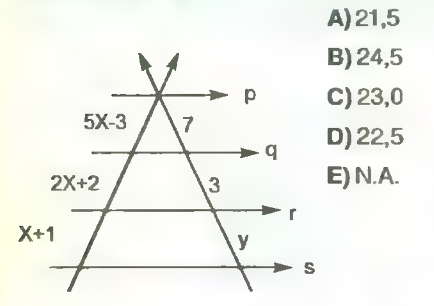
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Problema 7: Hallar x.



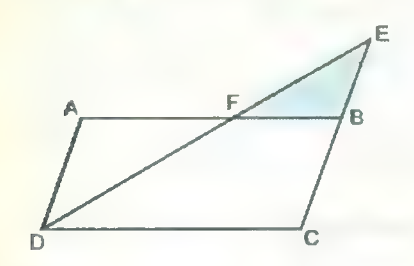
A) 7,5 B) 6,5 C) 5,5 D) 4,5 E) 8,5

Problema (8) : Siendo $\vec{p} // \vec{q} // \vec{r} // \vec{s}$, indicar el valor de x + y



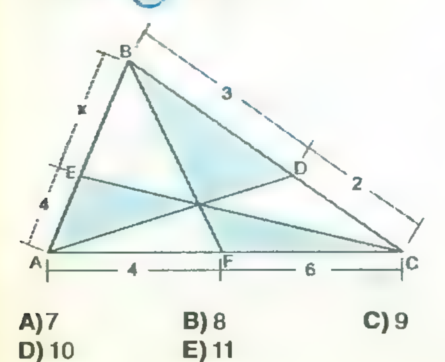
A) 21,5
B) 24,5
C) 23,0
D) 22,5
E) N.A.

Problema (9) : ABCD es un paralelo-gramo donde BF = 3AF y AD = 6. Hallar "EC".



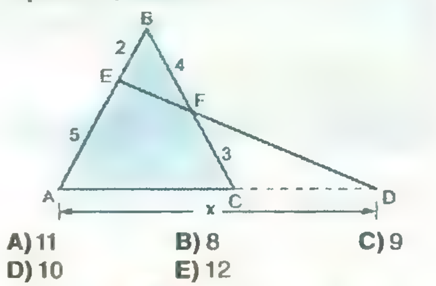
A) 18 B) 21 C) 24
D) 30 E) 36

Problema (10) : Hallar "x"



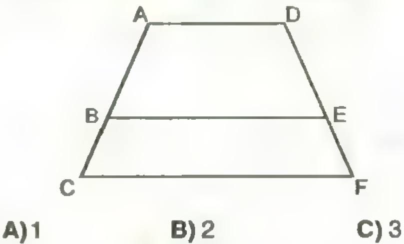
A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

Problema (11) : Si el triángulo ABC es equilátero , hallar "x"



A) 11 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

Problema (12) : En la figura: AD // BE // CF , si AB = 3BC y DF = 12, hallar EF



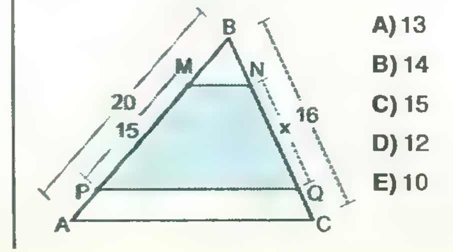
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Problema (13) : En un triángulo ABC, se traza la bisectriz BE Si: AB = 20 ; BC = 25; BE = 20, hallar "AC"

A) 15 B) 20 C) 30
D) 35 E) 40

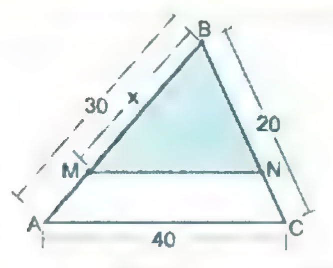
Problema (14) : En la figura:

$\overline{MN} // \overline{PQ} // \overline{AC}$; Hallar x.



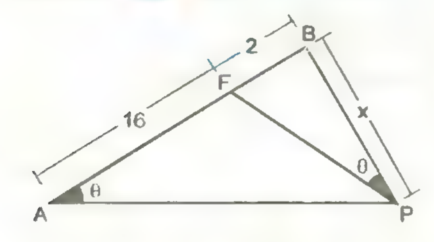
A) 13
B) 14
C) 15
D) 12
E) 10

Problema 15: En la figura MN // AC Hallar "x" si el perímetro del trapecio AMNC es igual al perímetro del triángulo MBN



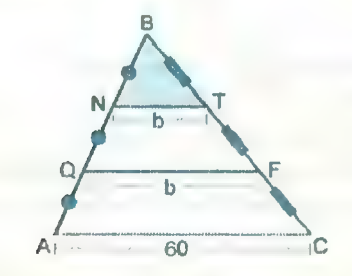
A) 13 B) 17 C) 19
D) 21 E) 27

Problema 16: Hallar "x"



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Problema 17: Si , NT // $\overline{QF}$ // $\overline{AC}$ los valores de a y b son:

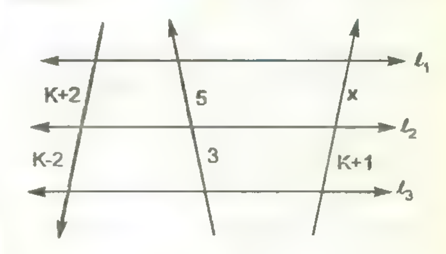


A) 50 y 25 B) 45 y 15 C) 40 y 20
D) 40 y 30 E) 30 y 20

Problema 18: En el triángulo rectángulo ABC (m∠B = 90°), AB = 6, BC = 8. Se traza la $\overline{BH}$ altura y la bisectriz $\overline{AD}$ que se cortan en "E" Calcular "BE"

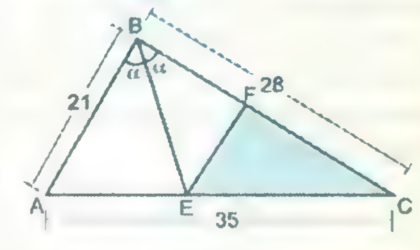
A) 2 B) 3 C) 4
D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

Problema 19: Siendo $\overleftrightarrow{\ell_1}$ // $\overleftrightarrow{\ell_2}$ // $\overleftrightarrow{\ell_3}$: hallar "x".



A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

Problema 20: Si $\overline{EF}$ // AB. Hallar EF.



A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 10

Clave de Respuestas

1. B	6. C	11. D	16. B
2. C	7. A	12. C	17. C
3. A	8. B	13. C	18. B
4. D	9. C	14. D	19. E
5. E	10. C	15. E	20. A

NIVEL II

Problema 1: Las bases de un trapecio miden 6 cm y 8 cm y la altura mide 2 cm. Calcular la altura del mayor triángulo que se forma al prolongar los lados no paralelos.

A) 6 cm B) 7 cm C) 8 cm
D) 9 cm E) 10 cm

Problema 2: El perimetro de un triángulo es 32 cm. Una bisectriz interior determina sobre el lado opuesto dos segmentos de 3 y 5 centímetros. ¿Cuánto mide el mayor lado del triángulo?

A) 9 cm B) 8 cm C) 15 cm
D) 17 cm E) N.A.

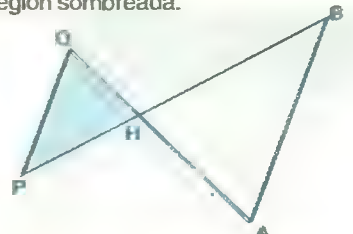
Problema 3: Los lados de un triángulo ABC miden BC = 6, CA = 8, AB = 4 respectivamente. Por un punto M de $\overline{AB}$ se traza la paralela $\overline{MN}$ al lado $\overline{BC}$. Hallar la longitud de $\overline{AM}$ de modo que el perímetro del triángulo MAN sea igual al perímetro del trapecio BMNC.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Problema 4: Calcular una de las alturas iguales de un triángulo isóceles cuyos lados congruentes miden 13 m. cada uno y la base 10 m.

A) $\frac{120}{13}$ m B) $\frac{130}{12}$ m C) 8 m
D) 9 m E) 7 m

Problema 5: En la figura $\overline{PQ} // \overline{AB}$, PQ = 5 m, AB = 10 m. Si se cumple que : PB + QA = 60 m. Calcular el perímetro de la región sombreada.



A) 20 m B) 35 m C) 15 m
D) 25 m E) 30 m

Problema 6: En un triángulo isósceles ABC: AB = BC = 10 ; AC = 5. Se traza MN // $\overline{AC}$ (M en AB y N en $\overline{BC}$) de tal manera que MN = NC -BN. Hallar "NC".

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Problema 7: En un trapecio PQRT, ($\overline{QR} // \overline{PT}$) se toma "M" en $\overline{PQ}$ y "N" en $\overline{RT}$ de tal manera que $\overline{MN}$ es paralela a las bases y MQ / MP = 5/7. Calcular MN si QR = 18, PT = 30.

A) 13 B) 15 C) 20
D) 23 E) 27

Problema 8: En un triángulo ABC, AB = 3 m ; BC = 6 m, AC = 5 m ¿Cuántos metros debe medir la paralela $\overline{MN}$ al lado AC para que el perímetro del triángulo BMN sea igual al perímetro del trapecio AMNC?

A) $\frac{35}{9}$ B) $\frac{20}{9}$ C) $\frac{40}{3}$
D) 4 E) 3

Problema 9 : En un triángulo isósceles ABC: AB = AC = 7 ; BC = 13 Se traza las cevianas AF , $\overline{BH}$ y $\overline{CG}$ concurrentes de manera que: AG = 5 ; AH = 3. Calcular FC - FB

A) 1 B) 2 C) 3
D) 7 E) 8

Problema 10 : En un triángulo ABC:
AB + BC = 10 ; BC - AC = 1;
AB + AC + BC = 15.

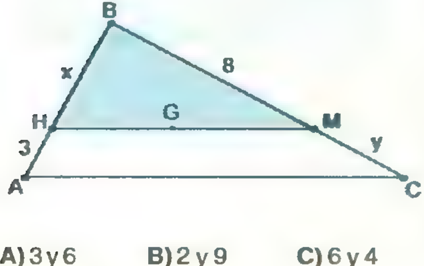
La bisectriz del ángulo "B" determina sobre AC dos segmentos cuyas medidas son:

A) 2 y 3 B) 3 y 4 C) 5 y 2
D) 1 y 4 E) 1 y 3

Problema 11 : En un triángulo ABC : AB = 8 cm, BC = 10 cm ; AC = 12 cm por un punto M de $\overline{AC}$ que está a 3 cm de C, se traza $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$ (N en $\overline{BC}$). Hallar MN.

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

Problema 12 : Siendo "G" el baricentro del triángulo ABC, Calcular x e y, si $\overline{HM}$ // AC

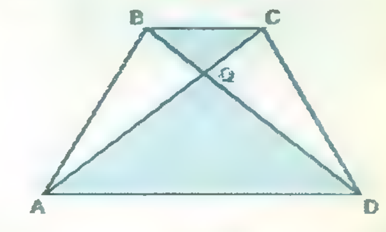


A) 3 y 6 B) 2 y 9 C) 6 y 4
D) 5 y 4 E) 3 y 9

Problema 13 : En el trapecio ABCD,

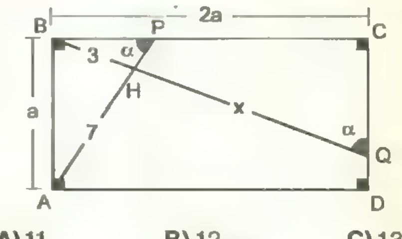
$\frac{BC}{AD} = \frac{2}{5}$; si AQ + QD = 45

Hallar BQ + CQ.



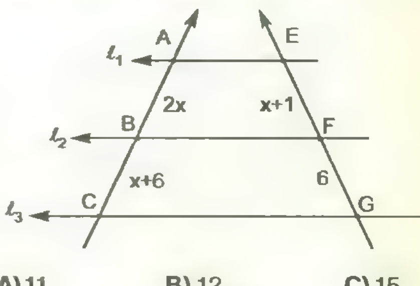
A) 16 B) 18 C) 20
D) 22 E) 24

Problema 14 : En el rectángulo ABCD, AH = 7 ; HP = 2 ; BH = 3, hallar "HQ".



A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

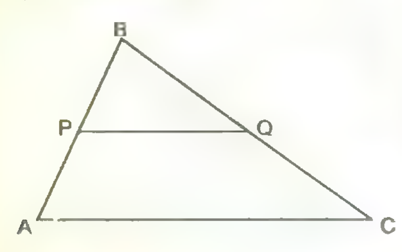
Problema 15 : Siendo $\overleftrightarrow{\ell_1}$ // $\overleftrightarrow{\ell_2}$ // $\overleftrightarrow{\ell_3}$, hallar el menor valor de "AC"



A) 11 B) 12 C) 15
D) 16 E) 18

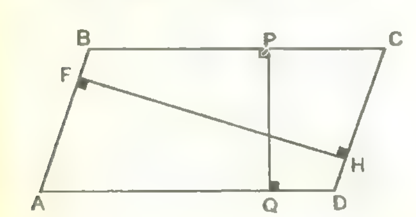
Problema 16 : Si $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

y $\frac{PQ}{AC} = \frac{2}{5}$, hallar $\frac{BQ}{QC}$



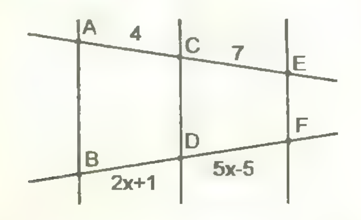
A) 2/3 B) 3/4 C) 1/2
D) 1/5 E) 2/5

Problema 17 : En el romboide ABCD: AB = 6 ; AD = 16 ; HF = 8, Hallar PQ.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Problema 18 : En la figura AB // CD // $\overline{EF}$. Calcular DF - BD

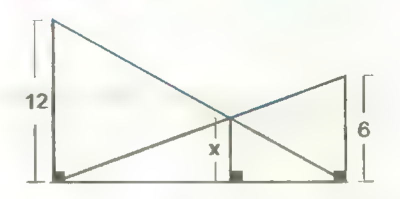


A) 7,5 B) 6,5 C) 7
D) 6 E) 9

Problema 19: ¿Cuál es la altura de una torre cuya sombra mide 144 m, cuando un poste de 5 m. proyecta una sombra de 12m?

A) 60 m B) 30 m C) 45 m
D) 75 m E) N.A.

Problema 20 : Calcular x.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

Clave de Respuestas

1. C	6. D	11. B	16. A
2. C	7. D	12. C	17. B
3. C	8. A	13. B	18. A
4. A	9. D	14. E	19. A
5. D	10. A	15. B	20. C

6.8 Relaciones Métricas en el Triángulo

PROYECCIÓN ORTOGONAL

6.8.1 Proyección Ortogonal de un Punto

- La Proyección Ortogonal de un punto sobre una recta **es el pie de la perpendicular** trazado del punto a dicha recta (Ver **Fig. 1**)
- La Proyección Ortogonal de un punto sobre un plano **es el pie de la perpendicular** trazado del punto a dicho plano (Ver **Fig. 2**)

Fig. 1

A

Pie

L

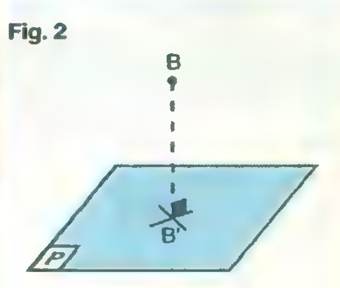
A'

El punto **A** no pertenece a la recta "*L*".

- **A** es el punto proyectado
- *L* es la recta de proyección

A' es la *proyección ortogonal* de **A** sobre la recta "*L*".

Fig. 2



El punto **B** no pertenece al plano **P**

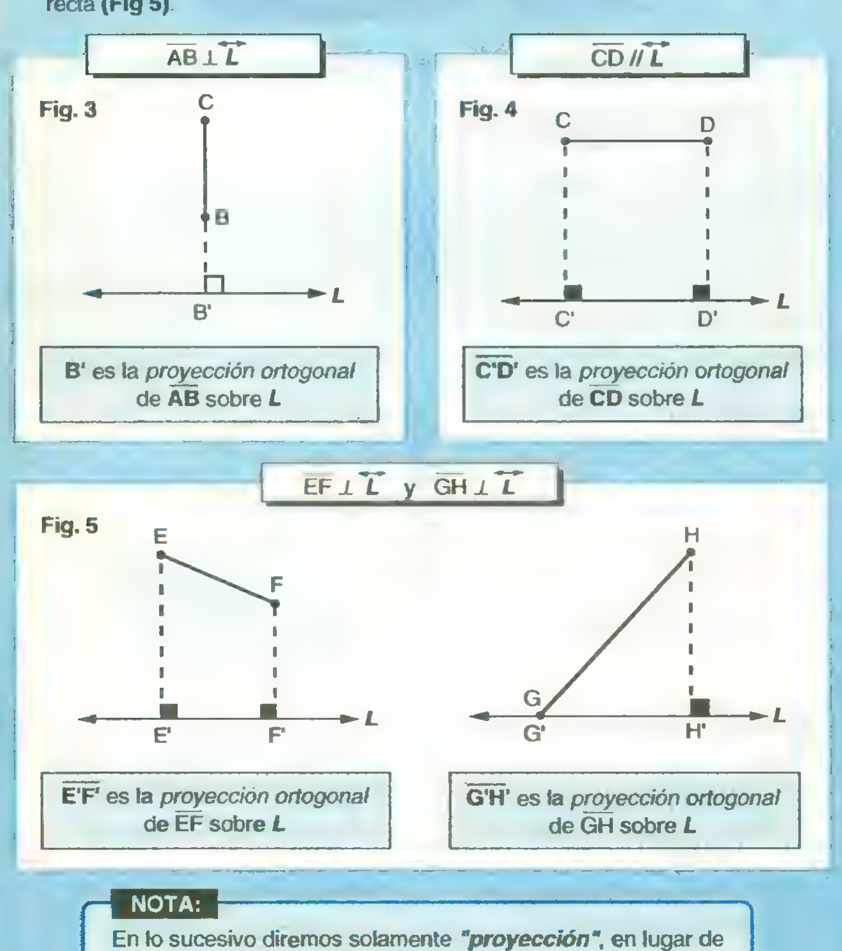
- **B** es el punto proyectado
- **P** es el plano de proyección

B' es la *proyección ortogonal* de **B** sobre el plano **P**

6.8.2 Proyección Ortogonal de un Segmento

La Proyección Ortogonal de un segmento sobre una recta:

- Es un punto si el segmento es perpendicular a la recta **(Fig. 3)**.
- Es un segmento congruente al segmento dado, si éste es paralelo a la recta **(Fig. 4)**.
- Es un segmento de menor longitud al segmento dado, si éste es oblicuo a la recta **(Fig 5)**.



B' es la *proyección ortogonal* de $\overline{AB}$ sobre ***L***

$\overline{C'D'}$ es la *proyección ortogonal* de $\overline{CD}$ sobre ***L***

$\overline{E'F'}$ es la *proyección ortogonal* de $\overline{EF}$ sobre ***L***

$\overline{G'H'}$ es la *proyección ortogonal* de $\overline{GH}$ sobre ***L***

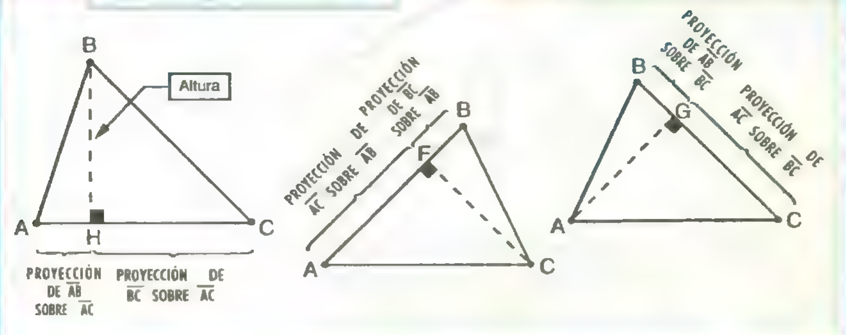
NOTA:

En lo sucesivo diremos solamente ***"proyección"***, en lugar de *"proyección ortogonal"*.

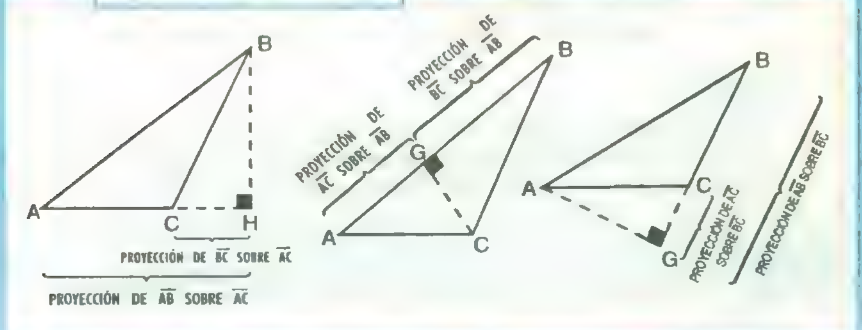
6.8.3 Aplicaciones en el Triángulo

En el triángulo es importante conocer la proyección de un lado sobre otro lado, para ello siempre se traza una altura. Veamos algunos ejemplos:

En el triángulo Acutángulo:



En el triángulo Obtusángulo:

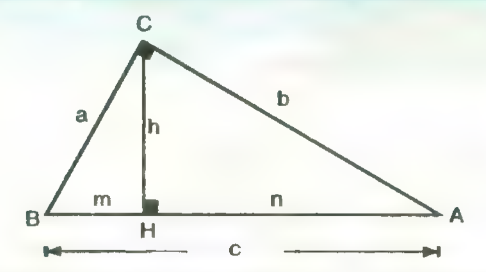


Conclusiones:

1. En el triángulo acutángulo la proyeccion de un lado sobre otro, está contenido íntegramente en este último lado
2. En el triángulo obtusángulo la proyección de un lado sobre uno de los lados que forman el ángulo obuso, contiene a la prolongación de este último lado.

6.9 RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

6.9.1 Elementos de un triángulo rectángulo



- **a y b** : son las longitudes de los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$
- **c** : es la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$
- **h** : es la altura relativa a la hipotenusa
- **m** : es la longitud de la proyección del cateto $\overline{BC}$ sobre la hipotenusa, o simplemente proyección del cateto "a" sobre la hipotenusa
- **n** : es la longitud de la proyección del cateto $\overline{AC}$ sobre la hipotenusa, o simplemente proyección del cateto "b" sobre la hipotenusa

NOTA:

Por razones de comodidad, a veces cuando decimos "cateto" nos referimos al lado que forma el angulo recto o a su longitud, según sea el caso. Lo mismo sucederá con los términos "hipotenusa", "proyección", etc.

6.9.2 Principales teoremas sobre relaciones métricas en el ◺

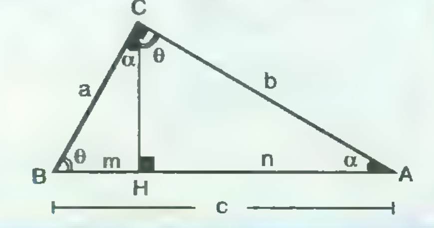
Teorema 1 En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de su proyección por la hipotenusa.

En la figura, se cumpe que:

$$a^2 = m \cdot c$$

y

$$b^2 = n \cdot c$$



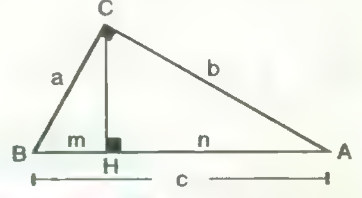
DEMOSTRACIÓN:

Afirmaciones	Razones
❶ $\triangle BHC \sim \triangle ABC$ $\Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow$ $\boxed{a^2 = m \cdot c}$	❶ Primer caso de semejanza **A-A**
❷ $\triangle CHA \sim \triangle ABC$ $\Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow$ $\boxed{b^2 = n \cdot c}$	❷ Primer caso de semejanza **A-A**

Teorema **Teorema de Pitágoras**

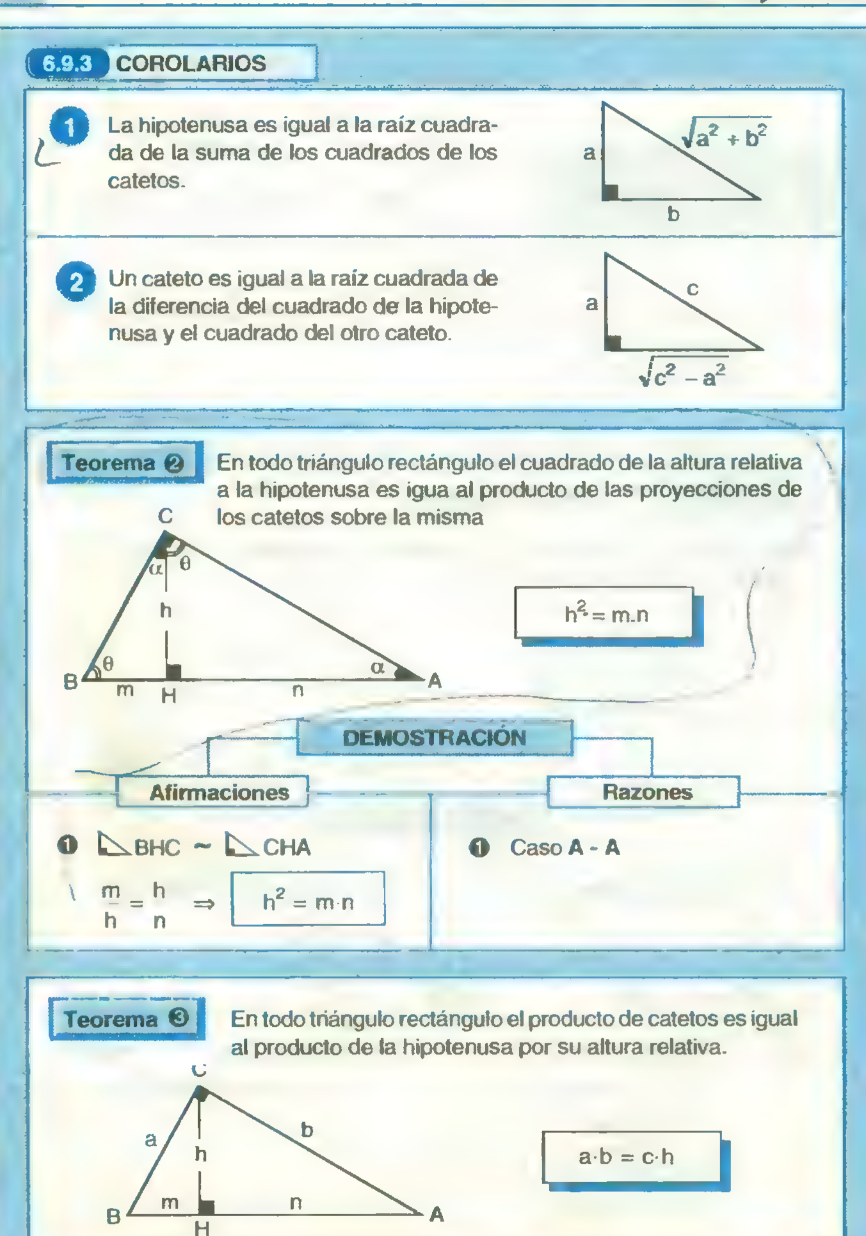
En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



DEMOSTRACIÓN:

Afirmaciones	Razones
❶ $a^2 = mc$ ...(α) $b^2 = nc$ ...(β)	❶ Teorema 1
❷ $a^2 + b^2 = mc + nc$ $a^2 + b^2 = (m + n)c$ $a^2 + b^2 = c \cdot c$ $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$	❷ Sumando miembro a miembro α y β y factorizando "c".



6.9.3 COROLARIOS

1 La hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.

2 Un cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia del cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.

Teorema ❷ En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igua al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma

$$h^2 = m.n$$

DEMOSTRACIÓN

Afirmaciones	Razones
❶ ◺BHC ~ ◺CHA $\frac{m}{h}=\frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m\cdot n$	❶ Caso **A - A**

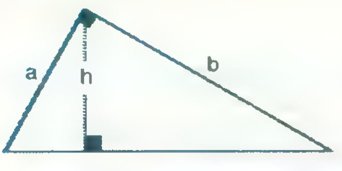
Teorema ❸ En todo triángulo rectángulo el producto de catetos es igual al producto de la hipotenusa por su altura relativa.

$$a\cdot b = c\cdot h$$

DEMOSTRACIÓN

Afirmaciones	Razones
1. $a^2 = c\cdot m$ ...(α)	1. Teorema 1
2. $b^2 = cn$ ...(β)	
3. $a^2b^2 = c^2mn$	2. Multiplicando miembro a miembro (α) y (β)
4. $m\cdot n = h^2$	3. teorema 3
$a^2b^2 = c^2h^2$ $a\cdot b = c\cdot h$	4. Reemplazando el paso 3 en el paso 2 y simplificando.

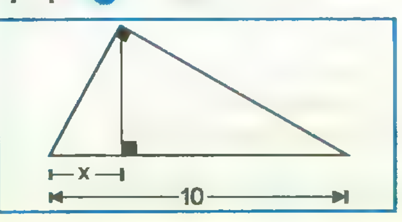
Teorema 5 En todo triángulo rectángulo la suma de las inversas de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la inversa de la altura relativa a la hipotenusa.



$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 1: Hallar "x".

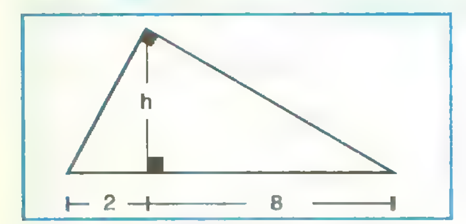


Resolución:

- Por el teorema **1** :

$6^2 = 10x \Rightarrow x = 3,6$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Calcular "h".



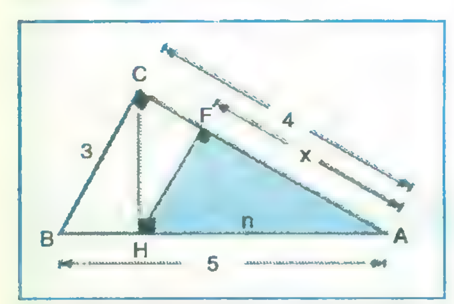
Resolución:

- Por el teorema **3** :

$h^2 = (2)(8)$

$\Rightarrow$ $\boxed{h = 4}$ ***Rpta.***

Ejemplo 3: Calcular "x".



Resolución:

- Según el teorema **1** :

$\triangle$ ABC: $4^2 = n \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{16}{5}$

$\triangle$ CHA: $n^2 = 4x$

$\Rightarrow \left(\dfrac{16}{5}\right)^2 = 4x$

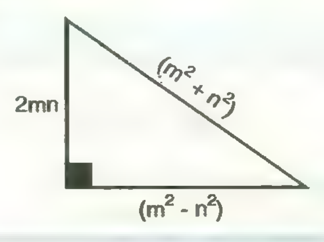
$\therefore$ $\boxed{x = \dfrac{64}{25}}$ ***Rpta.***

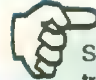
6.9.4 TRIADAS PITAGÓRICAS

Todo triángulo Pitagórico tiene sus lados expresados por números enteros positivos. Dichos lados tienen la siguiente forma:

Siendo: "m" y "n" números positivos.

Además: m > n



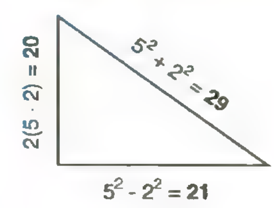


Observación:

Si elegimos valores para "m" y "n" (números primos enteros entre sí) tal que (m + n) resulte un número impar, se obtienen triángulos Pitagóricos cuyas medidas de sus lados también son números primos entre si.

Ejemplo 1:

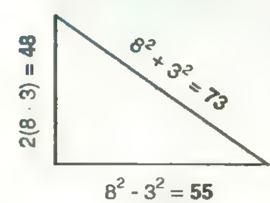
Cuando; m = 5 y n = 2



Triada: **20, 21 y 29**

Ejemplo 2:

Cuando; m = 8 y n = 3



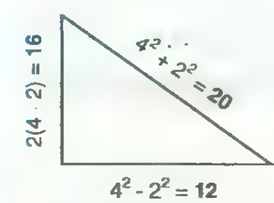
Triada: **48, 55 y 73**

Observación:

Cuando los valores de "m" y "n" (no son primos entre sí) o cuya suma de "m" y "n" sea un número par, se obtienen triángulos Pitagóricos cuyas medidas de sus lados está expresada por números que tienen un divisor común.

Ejemplo 1:

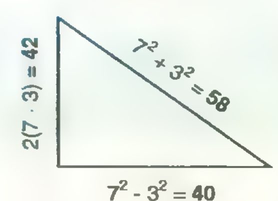
Cuando; m = 4 y n = 2



Triada: **12, 16 y 20**

Ejemplo 2:

Cuando; m = 7 y n = 3



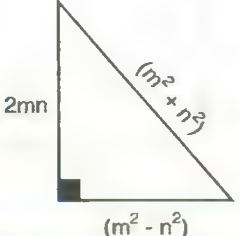
Triada: **40, 42 y 58**

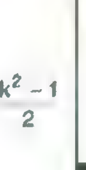
• Caso Particular:

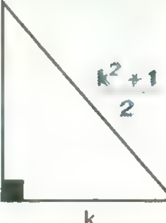
Cuando se tiene dos números enteros "m" y "n" pero consecutivos,

entonces se cumplirá: $m = \frac{k+1}{2}$ y $n = \frac{k-1}{2}$ siendo: k = impar

Luego:

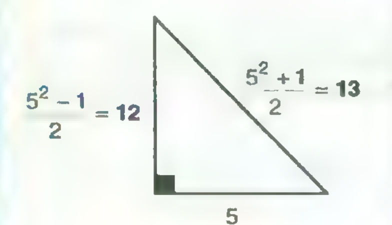






Ejemplo 1

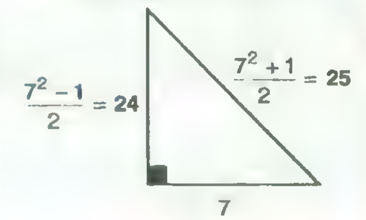
Cuando: k = 5



Triada: **5, 12 y 13**

Ejemplo 2

Cuando: k = 7



Triada: **7, 24 y 25**

Las triadas más usuales son:

Cateto	Cateto	Hipotenusa
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
11	60	61
13	84	85
20	21	29

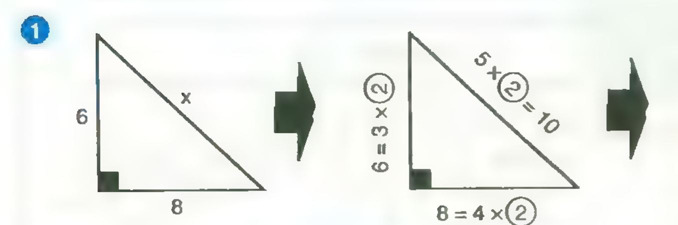
Observación:

Si multiplicamos cada término que conforman una triada por una constante "k" (siendo: k ≥ 2) los nuevos términos que se obtengan también conformarán una ***triada Pitagórica****.*

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Aplicando triadas hallar los lados desconocidos:

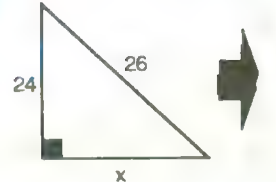
1

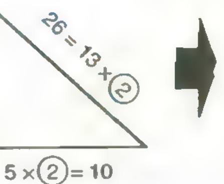


Como se observará se han duplicado (multiplicado por 2) a cada elemento de la primera triada (ver cuadro), donde "x" toma el valor de 10.

∴

Rpta.

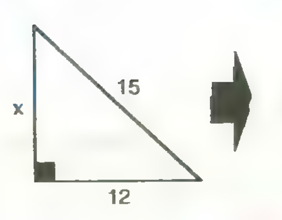




Se han duplicado los elementos de la segunda triada (ver cuadro), donde "x" toma el valor de 10.

∴

Rpta.



3 × (3) = 9

15 = 5 × (3)

12 = 4 × (3)

Se han triplicado los elementos de la primera triada (ver cuadro), donde "x" toma el valor de 9.

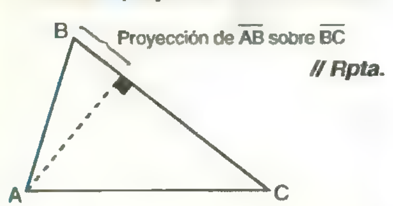
∴

Rpta.

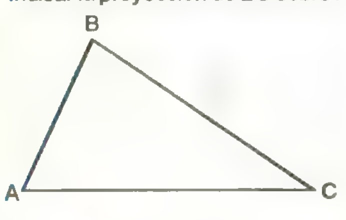
TALLER DE EJERCICIOS Nº 28

Ejercicio 1 :

- Indicar la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$

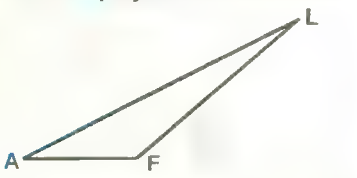


- Indicar la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

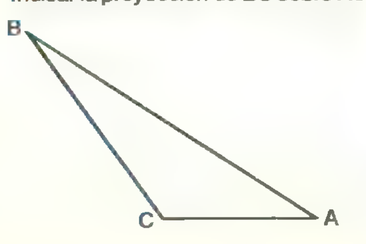


Ejercicio 2 :

- Indicar la proyección de $\overline{AL}$ sobre $\overline{AF}$

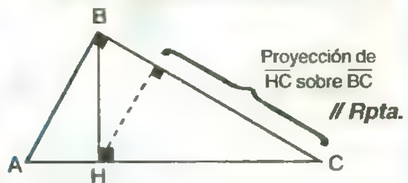


- Indicar la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

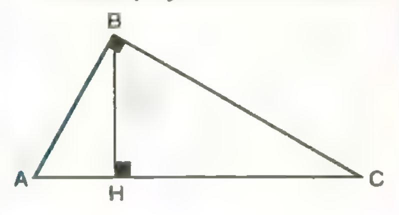


Ejercicio 3 :

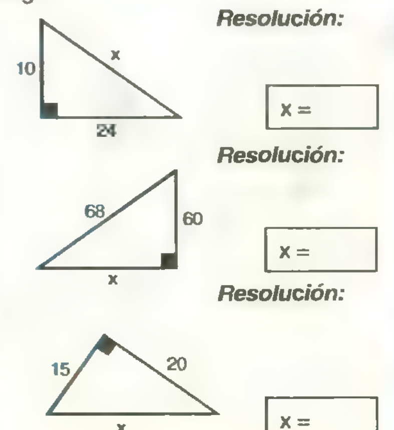
- Indicar la proyección de $\overline{HC}$ sobre $\overline{BC}$



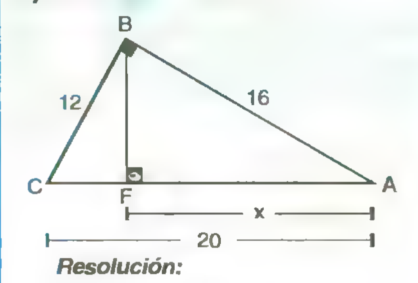
- Indicar la proyección de $\overline{AH}$ sobre $\overline{AB}$



Ejercicio 4 : Aplicando triadas pitagóricas hallar "x" en cada triángulo rectángulo.



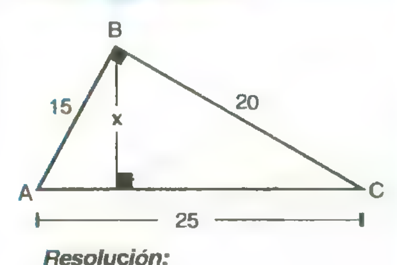
Ejercicio 5 : Calcular "x".



Resolución:

Rpta. x = 64/5

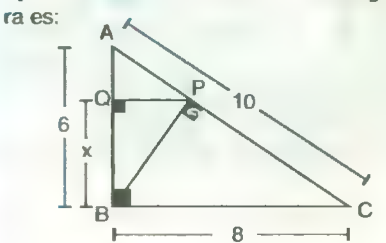
Ejercicio 6 : Calcular "x".



Resolución:

Rpta. x = 12

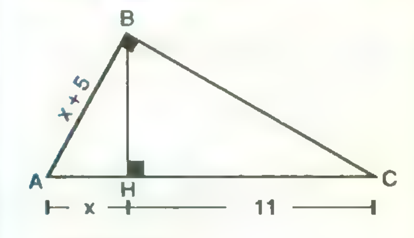
Ejercicio 7 : El valor de "x" en la figura es:



Resolución:

Rpta. x = 96/25

Ejercicio 8 : Hallar "x".



Resolución:

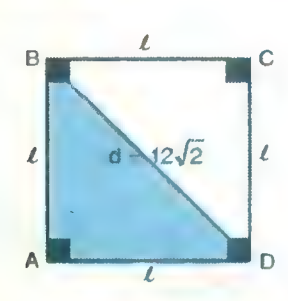
Rpta. x = 25

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M SOBRE RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Problema 1: La diagonal de un cuadrado es de $12\sqrt{2}$ m. Hallar su perímetro.

A) 48 m **B)** 36 m **C)** 24 m **D)** 40 m **E)** 50 m

Resolución:



- Sea el cuadrado ABCD, cuyas longitudes de sus lados es "ℓ"
- En el ⊿ ABD, aplicamos el teorema de pitágoras:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 \Rightarrow \left(12\sqrt{2}\right)^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$\Rightarrow (12)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\ell^2 \Rightarrow 144 \cdot 2 = 2\ell^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{144} = \ell \quad \therefore \quad \boxed{\ell = 12}$$

Luego: Perímetro □ ABCD = (sumas de sus 4 lados)

$$= 4\ell$$

$$= 4(12) = 48 \text{ m.}$$

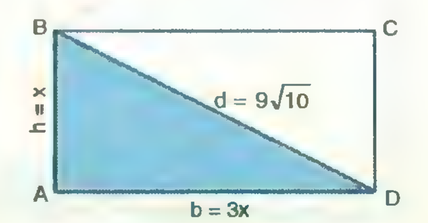
El perímetro del cuadrado es de 48 m **Rpta. A**

Problema 2: La base de un rectángulo es el triple de su altura. Si su diagonal mide $9\sqrt{10}$ m. ¿Cuál es su perímetro?.

A) 60 m **B)** 72 m **C)** 80 m **D)** 96 m **E)** 100 m

Resolución:

- Sean: altura del □ ABCD = x
  base del □ ABCD = 3x



- En el ◺ ABD: Por el teorema de pitágoras:

$$BD^2 = BA^2 + AD^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + (3x)^2$$

$$81\cancel{(10)} = \cancel{10}x^2$$

$$\sqrt{81} = x \qquad \therefore \quad \boxed{x = 9}$$

Luego: Perímetro ▭ ABCD $= 2b + 2h = 2\cdot(b + h) = 2\cdot(3x + x) = 8x$

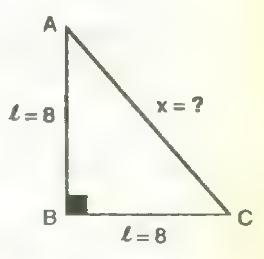
$= 8(9) = 72$ m.

El perímetro del rectángulo es de 72 m. ***Rpta. B***

Problema 3: Un cateto de un triángulo rectangulo isósceles es de 8 m. Hallar la longitud de la hipotenusa.

A) 8 m **B)** 9 m **C)** $8\sqrt{3}$ m **D)** $8\sqrt{2}$ m **E)** $9\sqrt{2}$ m

Resolución:



- Por el teorema de pitágoras:

$$x^2 = \ell^2 + \ell^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8^2 + 8^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 2(8)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2(8)^2} = \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8^2}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 8\sqrt{2}\text{ m}}$$

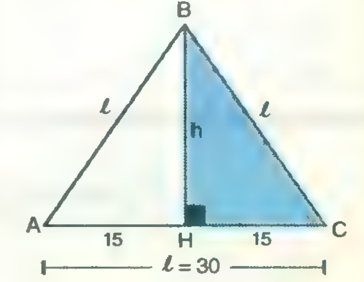
La longitud de la hipotenusa es de $8\sqrt{2}$ m. ***Rpta. D***

Problema 4: Hallar la altura de un triángulo equilátero de 30 m de lado.

A) 10 m **B)** 15 m **C)** $10\sqrt{3}$ m **D)** 12 m **E)** $15\sqrt{3}$ m

Resolución:

- En el ◣ BHC; aplicamos el teorema de pitágoras:



$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \quad \Rightarrow \quad (30)^2 = h^2 + (15)^2$$

$$(30)^2 - (15)^2 = h^2$$

$$(30 + 15)\,(30 - 15) = h^2$$

$(45)(45) = h^2$

$\sqrt{3 \cdot (15)^2} = h^2$

$3. (15)^2 = h$

$\therefore \quad \boxed{h = 15\sqrt{3}}$

Recuerda que:

Tnángulo equilátero es aquel triángulo cuyas longitudes de sus lados son iguales y cada uno de sus internos miden 60°.

La altura del triángulo mide $15\sqrt{3}$ m **Rpta. E**

Problema 4: Hallar las dimensiones de un rectángulo, cuya diagonal mide $3\sqrt{58}$ m. y su altura mide los 3/7 de lo que mide la base.

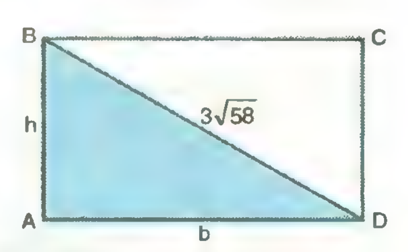
A) 8 y 15 **B)** 13 y 24 **C)** 9 y 21 **D)** 15 y 20 **E)** 8 y 23

Resolución:

- Del enunciado: $h = \frac{3}{7}b$ ....❶
- En el ◣BAD, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$BD^2 = BA^2 + AD^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(3\sqrt{58}\right)^2 = h^2 + b^2 \quad ....❷$$



Reemplazamos: ❶ en ❷

$$3^2\left(\sqrt{58}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}b\right)^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 9(58) = \frac{9b^2}{49} + b^2$$

$$9(58) = \frac{58}{49}b^2 \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot 49 = b^2$$

$$\sqrt{9 \cdot 49} = b \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 7 = b$$

$$\therefore \quad \boxed{b = 21}$$

Las dimensiones del Rectángulo son:

base: $b = 21$ m

altura: $h = \frac{3}{7}b = \frac{3}{7}(21m) = 9m$

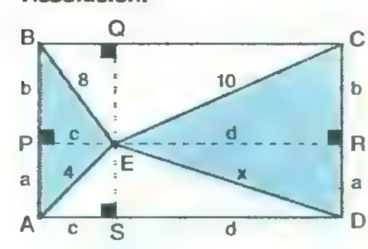
Las dimensiones del rectángulo son: 9 m y 21 m.

Rpta. C

Problema 5: En un rectángulo ABCD se considera un punto interior "E", cumpliéndose: EA = 4; EC = 10; EB = 8. Hallar: ED

A) $2\sqrt{13}$ B) 5 C) 6 D) $2\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{15}$

Resolución:



- En el ◣APE: Por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + c^2 = 4^2 \quad ...❶$$

- En el ◣ERC: Por el teorema de Pitágoras:

$$b^2 + d^2 = 10^2 \quad ...❷$$

Sumamos miembro a miembro ❶ y ❷

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4^2 + 10^2 = 16 + 100 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 116} \quad ..❶$$

- En el ◣BPE: Por el teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = 8^2$ .. ❸
- En el ◣ERD: Por el teorema de Pitágoras: $a^2 + d^2 = x^2$ ...❹

Sumamos miembro a miembro ❸ y ❹ $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8^2 + x^2}$ ...❷

Igualamos las ecuaciones ❷ y ❶

$$8^2 + x^2 = 116 \quad \Rightarrow \quad 64 + x^2 = 116 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 52 = 4(13)$$

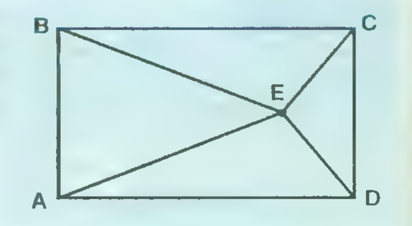
$$x = \sqrt{4(13)} = 2\sqrt{13} \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{13} \quad \therefore \quad \boxed{ED = 2\sqrt{13}}$$

El segmento ED es igual a $2\sqrt{13}$ ***Rpta. A***

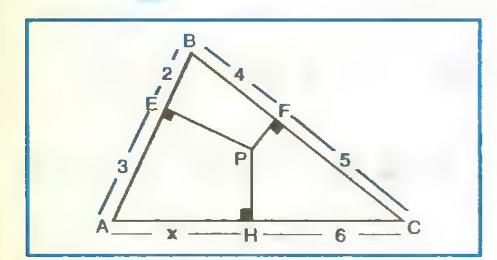
Propiedad:

Para todo punto interior o exterior de un rectángulo, la suma de los cuadrados de las distancias a 2 vértices opuesto es igual a la suma de los cuadrados de las distancias de este mismo punto a los otros dos vértices.

$$\boxed{AE^2 + EC^2 = BE^2 + ED^2}$$



Problema 6 : En la figura, "P" es un punto interior cualquiera del triángulo ABC. Hallar x.



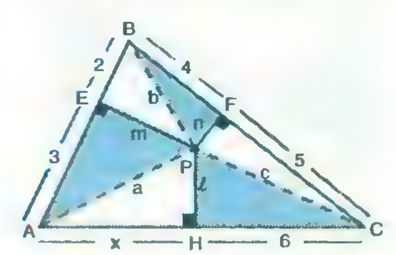
A) 4 **B)** 5

C) $4\sqrt{2}$ **D)** $5\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$

Resolución:

- Debemos de formar triángulos rectángulos para aplicar las propiedades conocidas



- Por el teorema de Pitágoras:

$\triangle$ PEA : $m^2 + 3^2 = a^2$

$\triangle$ PFB : $n^2 + 4^2 = b^2$

$\triangle$ PHC : $\ell^2 + 6^2 = c^2$

Σ MAM: $m^2 + n^2 + \ell^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ...❶

$\triangle$ PHA : $x^2 + \ell^2 = a^2$

$\triangle$ PEB : $m^2 + 2^2 = b^2$

$\triangle$ PFC : $n^2 + 5^2 = c^2$

Σ MAM: $x^2 + m^2 + n^2 + \ell^2 + 2^2 + 5^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ..❷

- Igualando los primeros miembros de ❶ y ❷

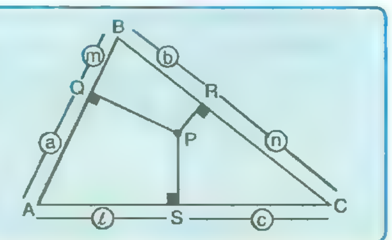
$$\cancel{m^2} + \cancel{n^2} + \cancel{\ell^2} + 3^2 + 4^2 + 6^2 = x^2 + \cancel{m^2} + \cancel{n^2} + \cancel{\ell^2} + 2^2 + 5^2$$

$\Rightarrow$ $3^2 + 4^2 + 6^2 = x^2 + 2^2 + 5^2$ $\Rightarrow$ **(Propiedad)** $x^2 = 32$ $\Rightarrow$ $x = 4\sqrt{2}$ ***Rpta. C***

Propiedad:

En todo triángulo, si "P" es un punto interior cualquiera desde el cual se han trazado perpendiculares hacia los lados, se cumple lo siguiente:

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2 + n^2 + \ell^2$$



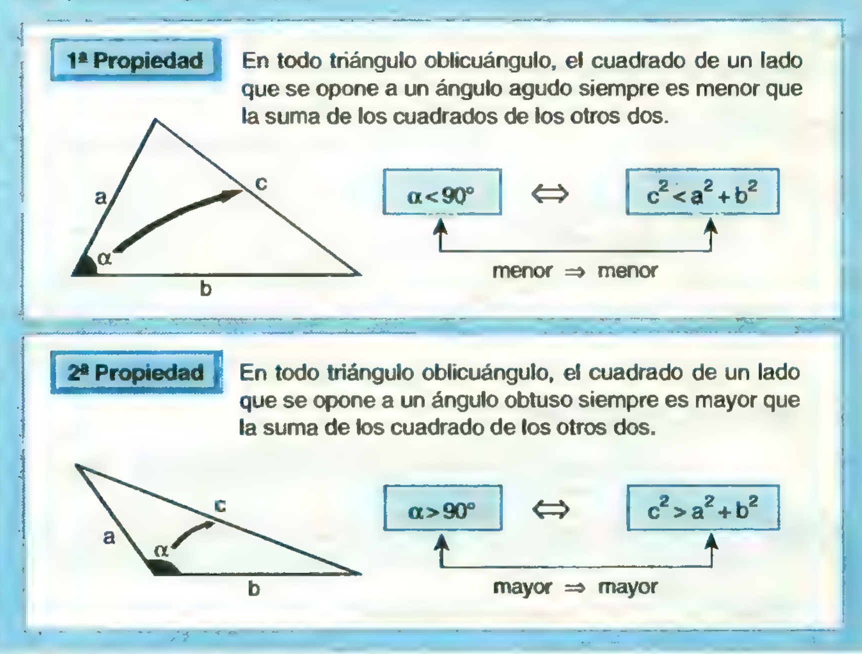
6.10 RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

6.10.1 Introducción

Debemos recordar que el triángulo oblicuángulo es aquel que no tiene ningún ángulo interior recto. O sea un triángulo oblicuángulo o bien es triángulo acutángulo o bien es triángulo obtusángulo.

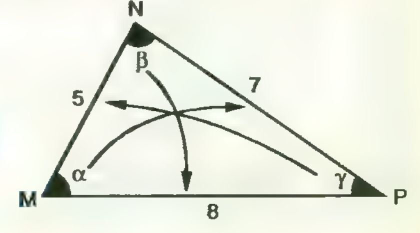
6.10.2 Cómo reconocer si un triángulo es acutángulo u obtusángulo

Se aplican las siguientes propiedades:



Ejemplo 1: Los lados de un triángulo MNP miden MN = 5 , NP = 7 ; MP = 8. ¿El triángulo es acutángulo u obtusángulo?.

Resolución:



- Según las propiedades anteriores:

Como: $7^2 < 5^2 + 8^2 \Rightarrow \boxed{\alpha < 90^\circ}$

$8^2 \leq 5^2 + 7^2 \Rightarrow$ $\boxed{\beta \leq 90°}$

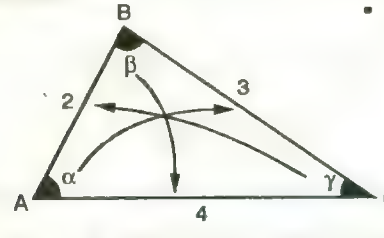
$5^2 \leq 7^2 + 8^2 \Rightarrow$ $\boxed{\gamma \leq 90°}$

- Como los tres ángulos internos son agudos (menores que 90°) entonces:

El Δ MNP es acutángulo *Rpta.*

Ejemplo 2: Los lados de un triángulo ABC miden: AB = 2, BC = 3, y AC = 4. ¿El triángulo es acutángulo u obtusángulo?.

Resolución:



- Aplicamos las propiedades anteriores:

$3^2 \leq 2^2 + 4^2 \Rightarrow$ $\boxed{\alpha \leq 90°}$

$4^2 \geq 2^2 + 3^2 \Rightarrow$ $\boxed{\beta \geq 90°}$

$2^2 \leq 3^2 + 4^2 \Rightarrow$ $\boxed{\gamma \leq 90°}$

- Como en el Δ ABC, $\beta > 90°$,

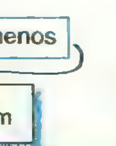
El triángulo ABC **Es obtusángulo (obtuso en B)** *Rpta.*

6.10 PRINCIPALES TEOREMAS SOBRE RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLIGUÁNGULO

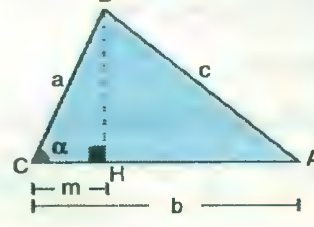
Teorema 1 **1er Teorema de Euclides**

En todo triángulo, el cuadrado de un lado que se opone a un ángulo **agudo** es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos **menos** el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre aquel.

Si $\boxed{\alpha < 90°} \Rightarrow \boxed{\text{menos}}$



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2bm}$$

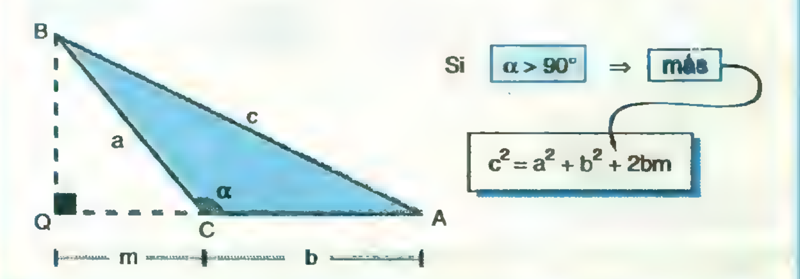


DEMOSTRACION

Afirmaciones	Razones
❶ En el ◺ BHC: $BH^2 = a^2 - m^2$ ....(I)	❶ Teorema de Pitágoras.
❷ $HA = b - m$	❷ Sustracción de segmentos.
❸ En el ◺ BHA: $BH^2 = c^2 - HA^2$; $BH^2 = C^2 - (b - m)^2$ ....(II)	❸ Teorema de Pitágoras y reemplazando lo afirmado en el paso nº 2.
❹ $c^2 - (b - m)^2 = a^2 - m^2$; $c^2 - (b^2 - 2bm + \cancel{m^2}) = a^2 - \cancel{m^2}$; $\therefore$ $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2bm}$	❹ Igualando los segundos miembros de (I) y (II) y simplificando.

Teorema 2 **2do Teorema de Euclides**

En todo triángulo, el cuadrado del lado que se opone a un ángulo **obtuso** es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos **más** el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre aquel.



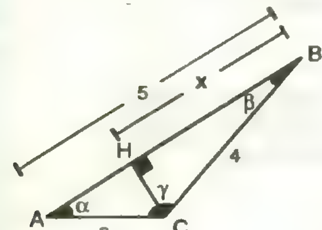
Ejemplo 3: Los lados de un Δ ABC miden AB = 5, BC = 4, AC = 2
Calcular:

a) La proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AB}$
b) La proyección de $\overline{AC}$ sobre $\overline{AB}$
c) La proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$
d) La proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$
e) La proyección de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$

Resolución:

- Según las longitudes de los lados se verifican que $AB^2 > BC^2 + AC^2$ luego el Δ ABC es obtuso en C ($\gamma > 90°$)

a)



- Sea "x" la proyección de BC sobre AB
- Por el primer teorema de **Euclides**

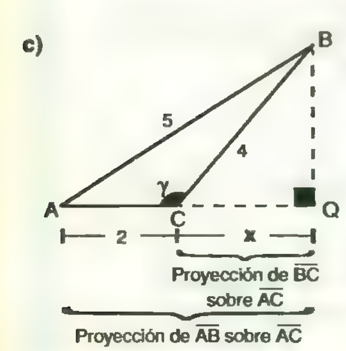
$$2^2 = 4^2 + 5^2 - 2(5)x \Rightarrow x = \frac{37}{10}$$ ***Rpta.***

$\beta < 90° \Rightarrow$ menos

b) Del gráfico anterior AH es la proyección de AC sobre AB.

$$\Rightarrow AH = 5 - x \Rightarrow AH = 5 - \frac{37}{10} \Rightarrow AH = \frac{13}{10}$$ ***Rpta.***

c)



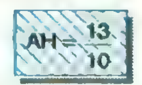
- Por el segundo Teorema de **Euclides:**

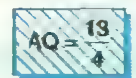
$$5^2 = 2^2 + 4^2 + 2(2)x \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$ ***Rpta.***

$\gamma > 90° \Rightarrow$ más

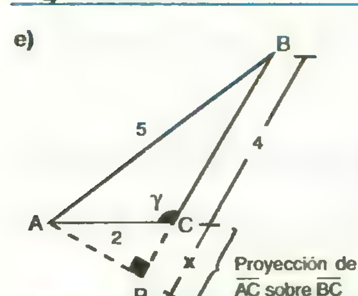
d) Del gráfico anterior: AQ = Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

$$\Rightarrow AQ = 2 + x = 2 + \frac{5}{4} \Rightarrow AQ = \frac{13}{4}$$ ***Rpta.***





e)



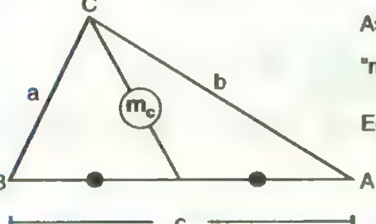
- Por el segundo teorema de **Euclides:**

$5^2 = 2^2 + 4^2 + 2(4)x \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{8}}$ ***Rpta.***

$\boxed{\gamma > 90°} \Rightarrow$ más

Teorema 3 **Teorema de la Mediana**

En todo triángulo la suma de los cuadrados de los lados laterales a una mediana es igual al doble del cuadrado de la mediana más la mitad del cuadrado del lado donde cae la mediana.



Así en la figura:

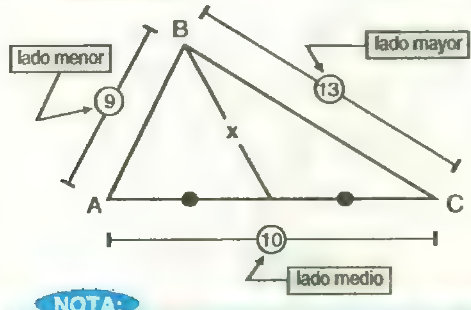
"m_c" es la mediana relativa al lado "c".

Entonces:

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

Ejemplo 4 : Los lados de un triángulo miden 9; 10 y 13 metros. Calcular la longitud de la mediana relativa al lado medio.

Resolución:



- Sea "x" la longitud de la mediana pedida.
- Entonces por el teorema de la mediana:

$$9^2 + 13^2 = 2x^2 + \frac{10^2}{2}$$

$$\Rightarrow 81 + 169 = 2x^2 + 50$$

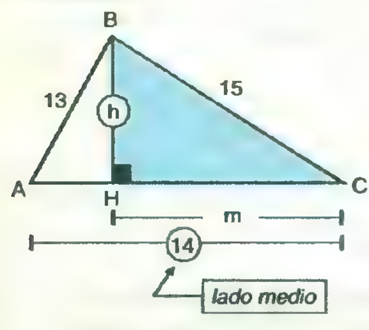
$$200 = 2x^2 \quad \therefore \boxed{x = 10\text{ m}}$$ ***Rpta.***

NOTA:

El **lado medio** en un triángulo escaleno es el lado que no es ni el menor ni el mayor

Ejemplo 5 : Los lados de un triángulo miden 13; 14 y 15 metros. Calcular la altura relativa al lado medio.

Resolución:



- Sea ABC el triángulo y "h" la altura pedida.
- Del gráfico vemos que para calcular "h" nos hace falta conocer "m".

Luego por Euclides en el Δ ABC:

$$13^2 = 14^2 + 15^2 - 2\,(14)\,m$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m = 9}$$

- En el $\triangle$ BHC, por el teorema de Pitágoras:

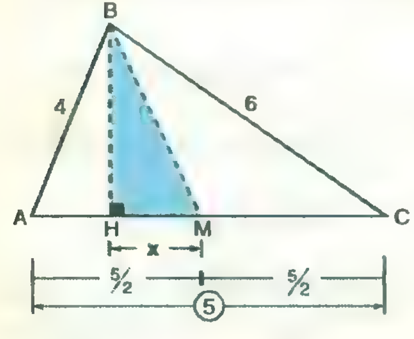
$$h^2 + m^2 = 15^2$$

$$\Rightarrow \quad h^2 + 9^2 = 15^2 \quad \therefore \quad \boxed{h = 12\text{ m}}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 6 : En un triángulo ABC: AB = 4, BC = 6, AC = 5. Calcular la progresión de la mediana $\overline{BM}$ sobre $\overline{AC}$.

Resolución:

- Según las longitudes de los lados deducimos que el Δ ABC es acutángulo



- En la figura "x" es la proyección pedida.

Por Euclides, en el Δ ABC:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot HC$$

$$\Rightarrow \quad 4^2 = 6^2 + 5^2 + 2(5)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 10\left(x + \frac{5}{2}\right) = 36 + 25 - 16$$

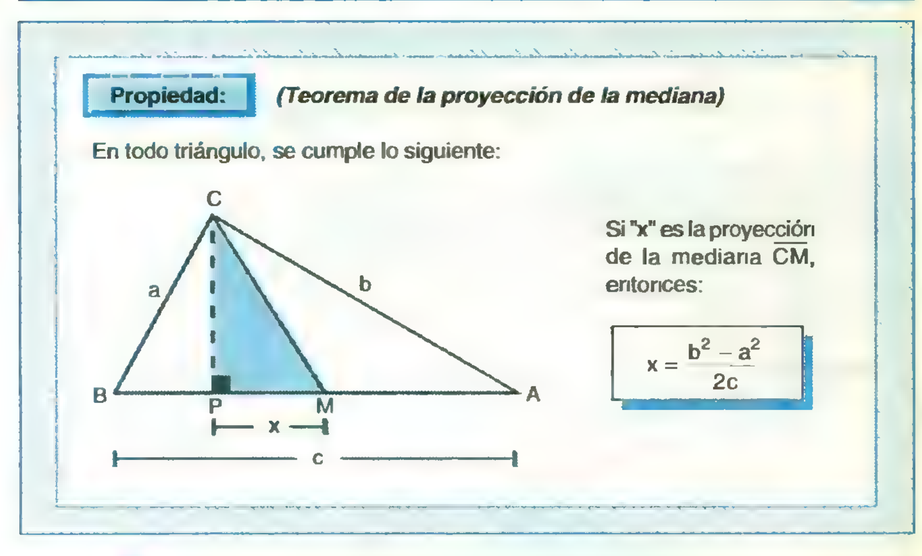
$$10x + 25 = 45$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2}$$ ***Rpta.***

NOTA: De este problema se deduce la siguiente propiedad:

Propiedad: *(Teorema de la proyección de la mediana)*

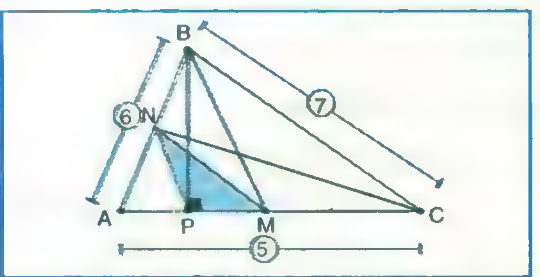
En todo triángulo, se cumple lo siguiente:



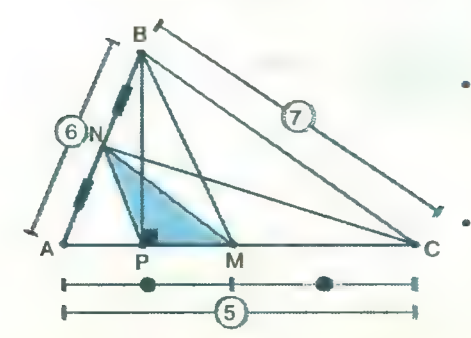
Si "x" es la proyección de la mediana $\overline{CM}$, entonces:

$$x = \frac{b^2 - a^2}{2c}$$

Ejemplo 7: En la figura, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son medianas, $\overline{BP}$ es altura. Calcular el perímetro del triángulo MNP.



Resolución:



- Sea: $2p_{MNP}$ = perímetro del Δ MNP

$\Rightarrow$ $2p_{MNP} = MN + NP + PM = ?$ ...❶

- En el Δ ABC; por el teorema de los puntos medios:

$$MN = \frac{BC}{2} \Rightarrow \boxed{MN = 3{,}5}$$ ...❷

- En el ◺ BPA, por el teorema de la mediana que cae en la hipotenusa:

$$NP = \frac{AB}{2} \Rightarrow \boxed{NP = 3}$$ ...❸

- Finalmente en el Δ ABC, vemos que $\overline{PM}$ es la proyección de la mediana $\overline{BM}$ sobre $\overline{AC}$. Entonces por el teorema de la proyección de la mediana:

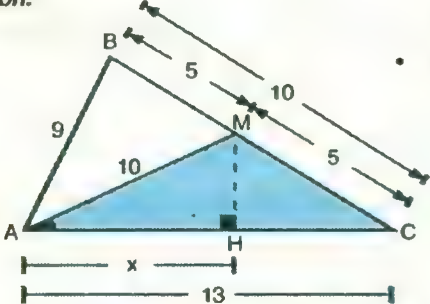
$$PM = \frac{BC^2 - AB^2}{2AC} \quad \Rightarrow \quad PM = \frac{7^2 - 6^2}{2(5)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{PM = 1{,}3} \quad \ldots.❹$$

Reemplazando ❷ , ❸ y ❹ en ❶

Rpta.

Ejemplo 8: En un triángulo ABC: AB = 9, BC = 10, AC = 13, calcular la proyección de la mediana $\overline{AM}$ sobre $\overline{AC}$.

Resolución:



- Sea "x" la proyección pedida.

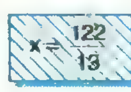
- Primero calculamos la mediana AM.

En el Δ ABC, por el teorema de la mediana:

$$9^2 + 13^2 = 2AM^2 + \frac{10^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{AM = 10}$$

- Ahora en el Δ AMC, aplicamos el 1er Teorema de Euclides:

$$5^2 = 10^2 + 13^2 - 2\,(13)x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\cancel{244}}{\cancel{26}} = \frac{122}{13}$$



Rpta.

TALLER DE PROBLEMAS Nº 29

Problema 1 : De los siguientes triángulos indicar los ángulos que son obtusos.

Resolución:

Rpta. a° y d°

Problema 2 : En un triángulo ABC: AB = 3; BC = 5, AC = 6. Calcular la proyección de AB sobre AC.

Resolución:

Rpta. 5/3

Problema 3 : Los lados de un triángulo miden 4; 5 y 8 metros. ¿Cuánto mide la proyección del lado mayor sobre el lado medio?

Resolución:

Rpta. 7,3

Problema 4 : Calcular: x

Resolución:

Rpta. x = 0,75

Problema 5: Los lados de un triángulo miden 4; 5 y 6 metros. Calcular la mediana relativa al lado menor.

Resolución:

Rpta. $\sqrt{\dfrac{53}{2}}$ m

Problema 7 : En el triángulo ABC Calcular la altura "h"

Resolución:

Rpta. h = 24

Problema 6 : En un triángulo PQR: PQ = 13cm , QR = 5 cm , PR = 16cm. Calcular la proyección de la mediana $\overline{QM}$ sobre $\overline{PR}$

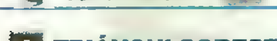
Resolución:

Rpta. 4,5 cm

Problema 8: En el triángulo ABC, $\overline{BM}$ es mediana. Hallar "x"

Resolución:

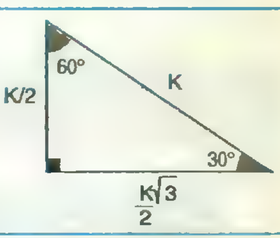
Rpta. x = 1,5



4 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

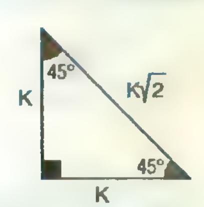
A NOTABLE DE 30° Y 60°

- Cateto opuesto a 30° = $\dfrac{\text{Hipotenusa}}{2}$
- Cateto opuesto a 60° = $\left(\dfrac{\text{Hipotenusa}}{2}\right)\sqrt{3}$



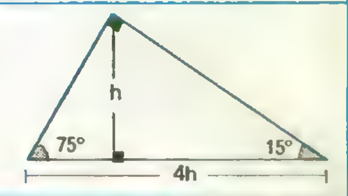
B NOTABLE DE 45° Y 45°

- Los catetos son iguales
- Hipotenusa = cateto x $\sqrt{2}$
- Cateto = $\dfrac{\text{Hipotenusa}}{\sqrt{2}}$



C NOTABLE DE 15° Y 75°

- Altura relativa a la hipotenusa = $\dfrac{\text{Hipotenusa}}{4}$

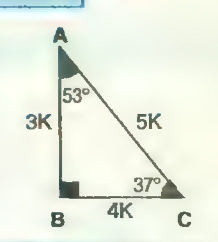


D NOTABLE DE 37° Y 53° (Relación Aproximada)

- Las longitudes de los lados están en la relación de 3; 4 y 5

Es decir:

$$\frac{AB}{3} = \frac{BC}{4} = \frac{AC}{5}$$

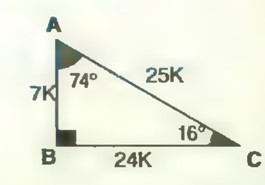


E NOTABLE DE 16° Y 74° (Relación Aproximada)

- Las longitudes de los lados están en la relación de 7; 24 y 25

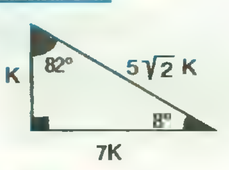
osea

$$\frac{AB}{7} = \frac{BC}{24} = \frac{AC}{25}$$



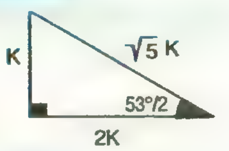
F NOTABLE DE 8° Y 82° (Relación Aproximada)

- El cateto opuesto a 8° es un séptimo del otro cateto



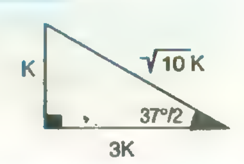
G NOTABLE DE 53°/2 (Relación Aproximada)

- El cateto opuesto a 53°/2 (ó 26°30') es la mitad del otro cateto.



H NOTABLE DE 37°/2 (Relación Aproximada

- El cateto opuesto a 37°/2 (ó 18°30') es la y tercera parte del otro cateto.



I NOTABLE DE 22°30' Y 67°30'

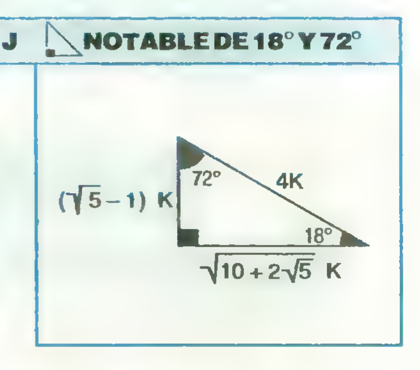
$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ K

22°30' 45° K

22°30' 45°

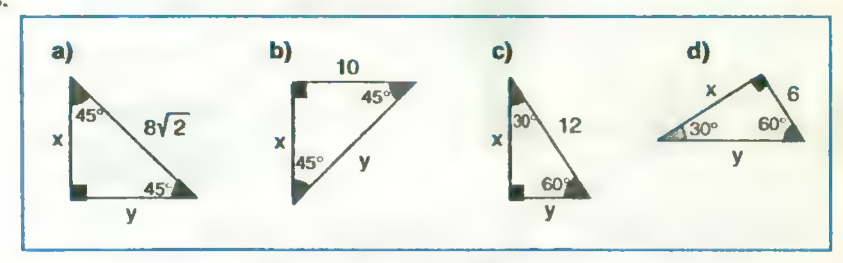
$(\sqrt{2}+1)$ K

J NOTABLE DE 18° Y 72°



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Ejercicio 1: Hallar los lados desconocidos en cada uno de los siguientes triángulos:



Resolución:

a) La longitud de la hipotenusa es igual a la longitud de uno de los catetos multiplicado por $\sqrt{2}$, osea:

$$8\cancel{\sqrt{2}} = x\cancel{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 8}$$

Como el Δ es isósceles dos de sus lados son de igual longitud; x = y = 8

b) La hipotenusa (y) es igual al cateto (10) multiplicado por $\sqrt{2}$; o sea:

$$y = 10\sqrt{2} \qquad \text{además:} \qquad \boxed{x = 10}$$

c) La longitud del cateto que se opone el ángulo de 30°, es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

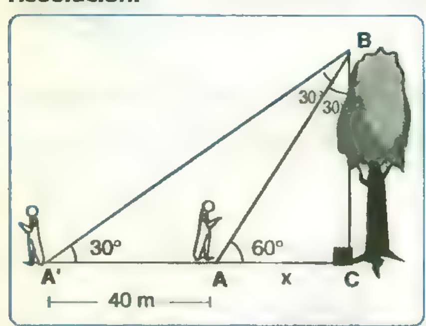
$$y = \frac{\cancel{12}}{\cancel{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 6}$$

y la longitud del cateto que se opone al ángulo de 60°, es igual a la longitud del cateto que se opone al ángulo de 30°, por $\sqrt{3}$.

$$\text{Osea:} \qquad x = y\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 6\sqrt{3}}$$

Ejercicio 2: Una persona observa la aparte superior de un árbol con un ángulo de 60°. Al retroceder 40 m. el ángulo de elevación es de 30°. Hallar la distancia a la que se encuentra actualmente del árbol.

Resolución:



En el ⊿ ACB: Sea: $\overline{AC} = x$

$\overline{AB} = 2\overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} = 2x$ ......(1)

En el ΔA'BA: ∠ Por exterior:

$\angle BAC = \angle BA'A + \angle A'BA$

$60° = 30° + \angle A'BA$

$\therefore$ $\boxed{\angle A'BA = 30°}$

Como se observará el Δ A'BA, resulta ser isósceles, siendo:

$\overline{A'A} = \overline{AB} = 40$ m ......(2)

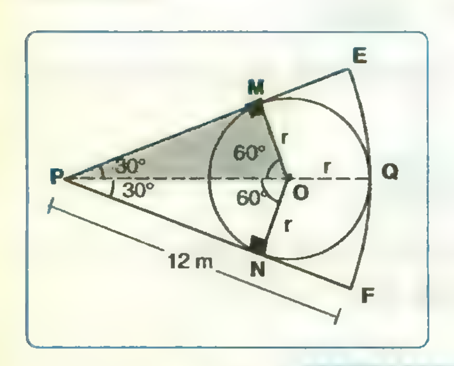
Luego igualamos (1) y (2): $2x = 40$ m.

$\therefore$ $\boxed{x = 20 \text{ m.}}$

Rpta. La distancia a la que se encuentra actualmente la persona del árbol es: A'C = x + 40 = 20 + 40 = 60 m.

Ejercicio 3: Calcular el radio de una circunferencia inscrita en un sector circular de 60° y de radio igual a 12 m.

Resolución:



En el ⊿ OMP: $\overline{OM} = r$

$\overline{PO} = 2\,\overline{OM} \Rightarrow$ $\boxed{\overline{PO} = 2r}$

De la figura: $\overline{PE} = \overline{PF} = \overline{PQ} = 12$ m.

$\therefore$ $\boxed{PQ = 12}$

Además: $\overline{PO} + \overline{OQ} = \overline{PQ}$

$2r + r = 12 \Rightarrow 3r = 12$

$\therefore$ $\boxed{r = 4\text{m}}$

Rpta. El radio de la circunferencia inscrita mide 4 m.

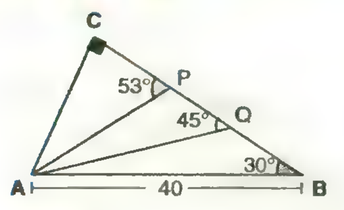
TALLER DE EJERCICIOS Nº 30

Ejercicio 1 : En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz del ángulo recto la cual intercepta a la hipotenusa $\overline{AC}$ en "D". Hallar "BD" si: $m\angle A = 75°$ y $AC = 36$ m

Resolución:

Rpta. $BD = 6\sqrt{3}$ m

Ejercicio 2 : Hallar PQ si AB = 40 m.



Resolución:

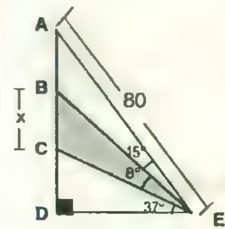
Rpta. PQ = 5m

Ejercicio 3 : La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide "a". Hallar la longitud de la bisectriz del ángulo recto si uno de los ángulos mide 15°. Dar la respuesta en términos de "a"

Resolución:

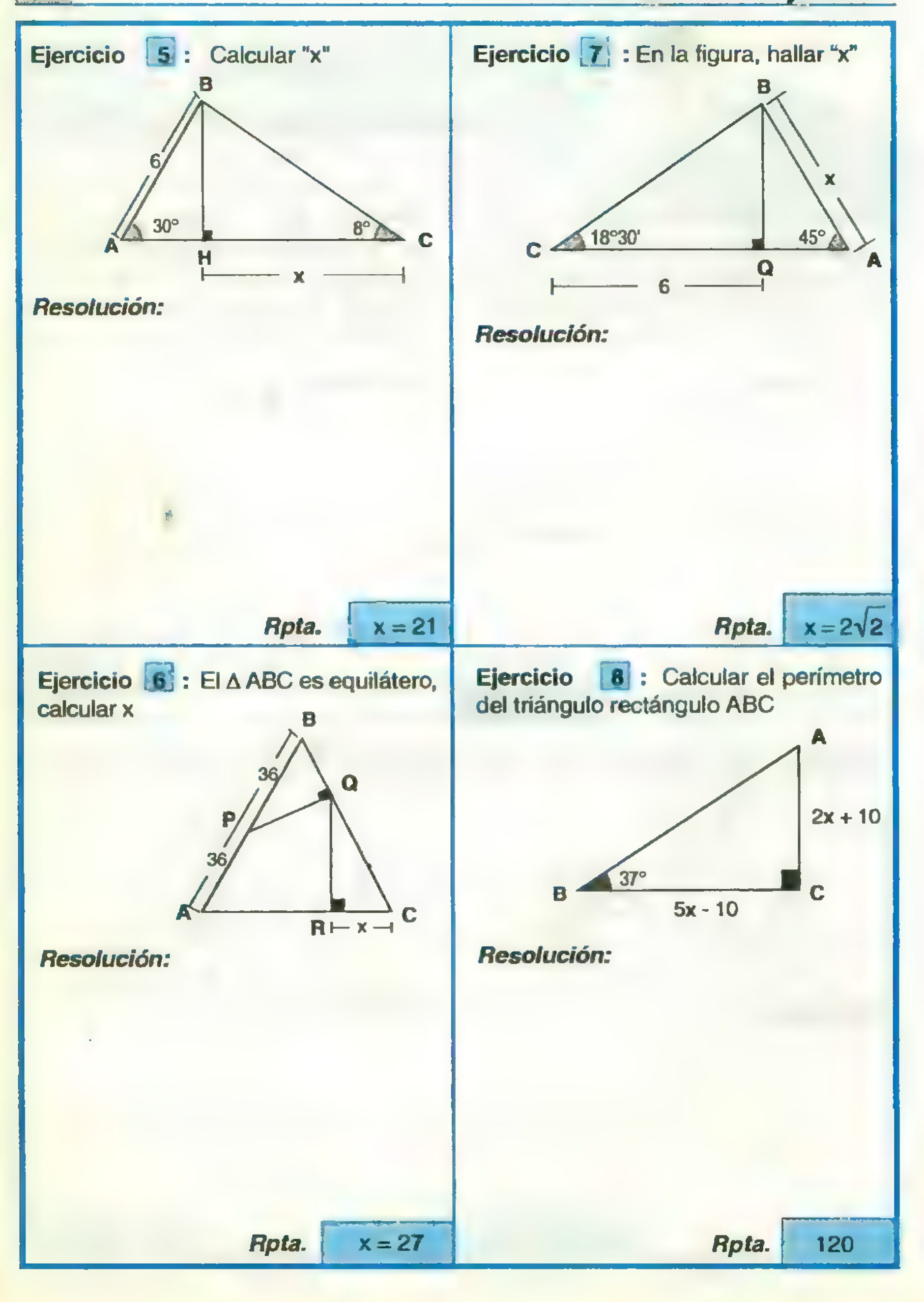
Rpta. $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

Ejercicio 4 : En la siguiente figura calcular "x"



Resolución:

Rpta. x = 10



Ejercicio 5 : Calcular "x"
B
6
30°
8°
A
H
C
x
Resolución:
Rpta. x = 21
Ejercicio 7 : En la figura, hallar "x"
B
x
C
18°30'
45°
Q
A
6
Resolución:
Rpta. x = 2√2
Ejercicio 6 : El Δ ABC es equilátero, calcular x
B
36
Q
P
36
A
R
x
C
Resolución:
Rpta. x = 27
Ejercicio 8 : Calcular el perímetro del triángulo rectángulo ABC
A
2x + 10
B
37°
C
5x - 10
Resolución:
Rpta. 120

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1 En el triángulo rectángulo que aparece, el perímetro es:

(Figura: triángulo rectángulo de hipotenusa $x + 8$, cateto vertical x y cateto horizontal $x + 7$)

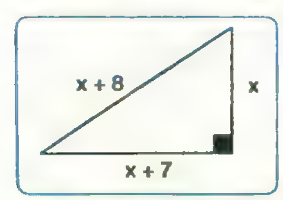
A) 18 **B)** 27 **C)** 21
D) 36 **E)** 30

Resolución:

- El perímetro del triángulo rectángulo es: Perímetro ◿ $= x + x + 7 + x + 8$

Perímetro ◿ $= 3x + 15$ ....(1)

- Vemos que nos falta calcular el valor de "x"



Por el teorema de Pitágoras.

$$(x + 7)^2 + x^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + 14x + 49 + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 16x + 64$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 3 = 0$$

$x = 5$ ...(2)

(se descarta porque es negativo)

Recuerda Que:

Cuadrado de un Binomio:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

- Reemplazando (2) en (1): Perímetro ◿ $= 3(5) + 15 = 30$ **Rpta E**

2 El segmento perpendicular a un diámetro desde un punto de la circunferencia mide 12 cm. Si uno de los segmentos que determina el diámetro mide 4 cm. Calcular el radio de la circunferencia.

A) 5 cm **B)** 20 cm **C)** 10 cm **D)** 15 cm **E)** 25 cm

Resolución:

- En la figura, $\overline{CH}$ es el segmento perpendicular al diámetro y $\overline{AH}$ es el segmento que mide 4 cm.

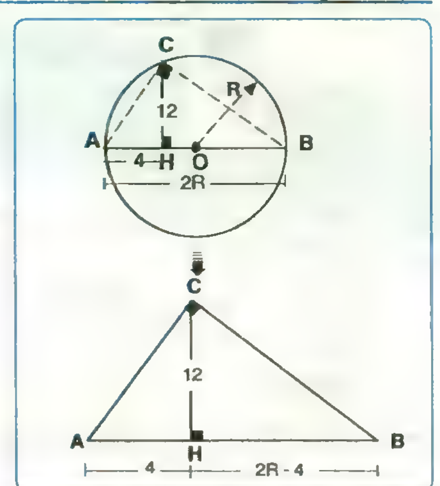
Por relaciones métricas, en el ◺ ACB:

$CH^2 = AH.\ HB \Rightarrow 12^2 = 4(2R - 4)$

$\cancel{144} = \cancel{8}(R - 2)$

$18 = R - 2$

$\therefore$ **R = 20 cm** **Rpta. B**

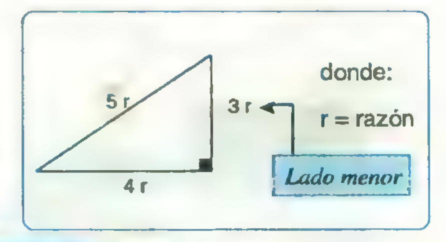


3 Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas a los términos de una progresión aritmética. Si el perímetro de este triángulo es 48 m, calcular la medida del lado menor.

A) 15 m **B)** 14 m **C)** 12 m **D)** 20 m **E)** 16 m

Resolución:

- El triángulo rectángulo que tiene sus lados en progresión aritmética es el de 37° y 53°

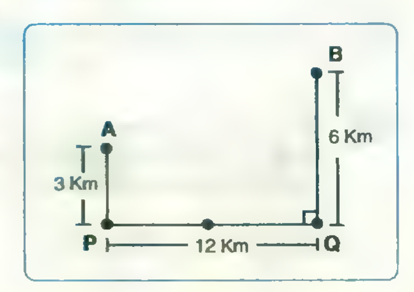


- Según Datos: Perímetro del ◺ = 48

$3r + 4r + 5r = 48 \Rightarrow$ **r = 4**

- Luego: **Lado menor = 3r = 3 (4) = 12 m** **Rpta. C**

4 Según el gráfico, una persona debe ir de A a B tocando un punto del segmento PQ. ¿Cuál es la menor distancia que debe recorrer?



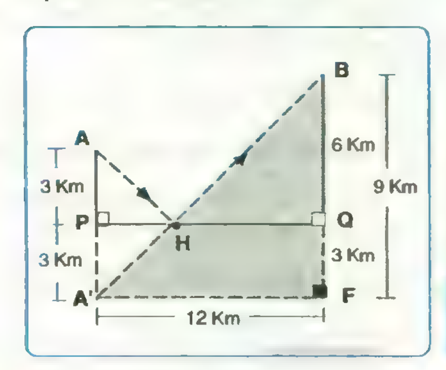
A) 15 Km **B)** $\left(3+\sqrt{180}\right)$ Km

C) $\left(6+\sqrt{153}\right)$ Km **D)** $9\sqrt{5}$ Km

E) 2 Km

Resolución:

- En este tipo de problema, primero hallamos el punto del segmento PQ que se debe tocar para realizar el menor recorrido. Dicho punto se halla prolongando $\overline{AP}$ hasta A' tal que A'P = PA = 3Km, luego trazamos $\overline{A'B}$ que con $\overline{PQ}$ se cortaran en el punto "H" deseado. Veamos:



- Debemos de calcular AH + HB, pero como A'H = AH (¿Por que?) entonces lo que se busca es:

A'H + HB = A'B = ?

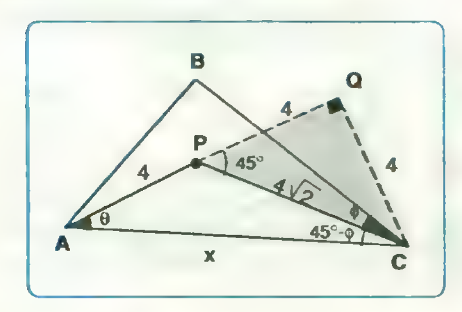
- Por el Teorema de Pitágoras en el ⊿ A'FB:

$$A'B = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\text{ Km}$$ **Rpta. A**

5 En el gráfico, calcular "x" si m ∠ C = 45°; m ∠ PAC = m ∠ PCB

A) $4\sqrt{5}$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{2}$

Resolución:



- Sea: m ∠ PAC = m ∠ PCB = φ

Como: m ∠ C = 45°
m ∠ PCA = 45° - φ

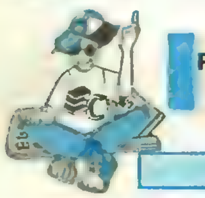
- En el Δ APC, el ∠ exterior P mide 45°, entonces prolongamos $\overline{AP}$ hasta Q para obtener el ◺PQC, que será notable de 45° y 45°.

PQ = QC = 4

- En el ◺ AQC, por el Teorema de Pitágoras:

$AC^2 = AQ^2 + QC^2$ ➡ $x^2 = 8^2 + 4^2$ ➡ ∴

Rpta. A



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE RELACIONES MÉTRICAS Y TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

NIVEL I

Problema 1: Los catetos de un triángulo rectángulo miden **3 y 4** metros. La altura relativa a la hipotenusa mide.

A) 1,2 m B) 2,1 m C) 2,3 m
D) 2,4 m E) 4,8 m

Problema 2: Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 2 y 5. El cateto menor mide.

A) $\sqrt{14}$ B) $\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{3}$
D) 2 E) 3

Problema 3: En un triángulo rectángulo un cateto mide 5 metros y su proyección sobre la hipotenusa mide 4 m. Calcular la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa.

A) 2m B) 9/2m C) 9/4 m
D) 13/4m E) 1 m

Problema 4: En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, AB = 21, AC = 35, hallar BC

A) 21 B) 23 C) 25 D) 28 E) 29

Problema 5: En un triángulo oblicuángulo los lados miden 5; 6 y 10. Calcular la proyección del lado menor sobre el lado menor el lado mayor.

A) 4,45 B) 2,25 C) 3,50
D) 4,50 E) 5,10

Problema 6: En un triángulo ABC: AB = 7; BC = 5 ; AC = 3. Calcular la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 2,2 B) 3,0 C) 2,0 D) 1,5 E) 2,5

Problema 7: Los lados de un triángulo miden 7; 6 y $\sqrt{97}$. Calcular la longitud de la mediana relativa al menor lado.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Problema 8: Los lados congruentes de un triángulo isósceles miden 5m cada uno. Si la base mide 6 m ¿Cuánto mide una de las alturas iguales?

A) $\frac{18}{5}$m B) $\frac{24}{5}$m C) $\frac{32}{5}$m
D) $\frac{16}{5}$m E) NA

Problema 9: La altura de un triángulo rectángulo determina sobre la hipotenusa dos segmentos que miden 9 m y 16 m. El perímetro del triángulo es:

A) 40 m B) 50 m C) 60 m
D) 65 m E) 70 m

Problema 10: En un triángulo rectángulo la relación entre los catetos es de 3 a 5. La relación entre las proyecciones de estos catetos sobre la hipotenusa es:

A) 3 a 5 B) 3 a $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$ a 5
D) 9 a 25 E) 9 a 10

Problema : En un triángulo ABC: m ∠ B = 130°, m ∠ C = 20°, AB = 14 m. ¿Cuánto mide la altura que parte del vértice B?

A) 5 m **B)** 6 m **C)** 7 m **D)** 8 m **E)** 9 m

Problema : En un cuadrilátero ABCD: m ∠ B = m ∠ D = 90° , AB = 15, BC = 20, AD = 24, hallar "CD"

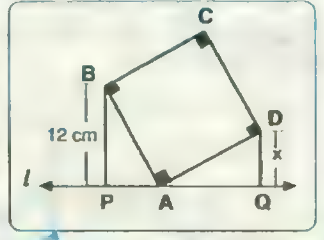
A) 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 13

Problema : En la siguiente figura: AB + BC = 33, Hallar BH

A) 9
B) 8
C) 7
D) 10
E) 11

Problema : El perímetro del cuadrado ABCD es 52 cm. Hallar "x".

A) 3 cm
B) 5 cm
C) 7 cm
D) 8 cm
E) 9 cm



Problema : En un triángulo rectángulo ABC recto en B, m ∠ A - m ∠C = 60°, AC = 12 cm, la altura BH mide:

A) 2 m **B)** 3 m **C)** 4 m **D)** 5 m **E)** 6 m

Problema 16 : En un triángulo rectángulo ABC, m ∠ B = 90°, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 9 y 4 metros. Calcular la distancia del punto medio del cateto AB a la hipotenusa AC.

A) 3 m **B)** 2 m **C)** 4 m **D)** 5 m **E)** 6 m

Problema : En un triángulo ABC: m ∠ A = 45° ; m ∠ C = 30°. Se traza la altura $\overline{BQ}$ y la ceviana $\overline{BN}$ de modo que: AN = BC = 2. Calcular m ∠ NBC.

A) 8° **B)** 9° **C)** 12° **D)** 15° **E)** 16°

Problema : En un triángulo rectángulo ABC la altura BH y la mediana BM trisecan al ángulo recto B. ¿Cuántos mide el ángulo C?

A) 15° **B)** 37° **C)** 30° **D)** 18° **E)** 45°

Problema : Los catetos de un triángulo rectángulo son entre si como 2 es a 3. Si la altura reltiva a la hipotenusa mide $6\sqrt{13}$ cateto mayor mide.

A) 24 **B)** 27 **C)** 9 **D)** 6 **E)** 39

Problema : Los lados de un triángulo rectángulo tienen medidas que forman una progresión aritmética de razón 7 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

A) 35 cm **B)** 28 cm **C)** 21 cm
D) 45 cm **E)** 29 cm

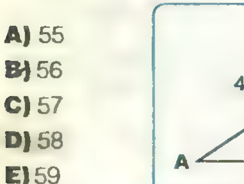
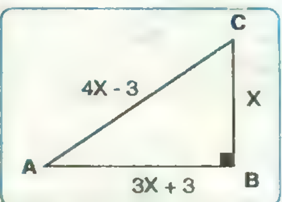
Clave de Respuestas

1. D	2. A	3. C	4. D	5. A
6. E	7. D	8. B	9. C	10. D
11. C	12. B	13. A	14. B	15. B
16. A	17. D	18. C	19. E	20. A

NIVEL II

Problema 1: Calcular el perímetro del triángulo ABC:

A) 55
B) 56
C) 57
D) 58
E) 59

Problema 2: Los lados de un triángulo miden 9 ; 18 y 16. Disminuyendo una cantidad "x" a cada lado, el triángulo resultante es un triángulo rectángulo. Hallar "x"

A) 0,25 **B)** 0,5 **C)** 0,75 **D)** 1 **E)** 2

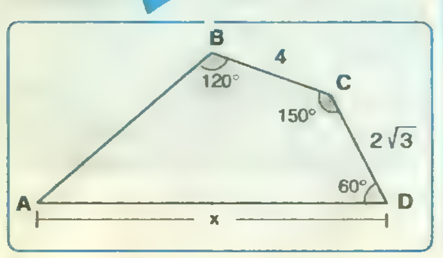
Problema 3: En un triángulo rectángulo los catetos se diferencian en 10 cm. Si la hipotenusa mide 50 cm, calcular la altura trazada del vértice del ángulo recto.

A) 18 cm **B)** 12 cm **C)** 24 cm
D) 15 cm **E)** 16 cm

Problema 4: Determinar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que el perímetro es 48 m y la diferencia de los catetos 4 m.

A) 20 m **B)** 22 m **C)** 25 m **D)** 30 m **E)** 18 m

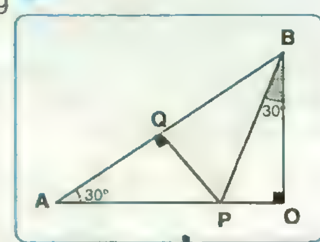
Problema 5: Hallar: "x"



A) $6\sqrt{3}$ **B)** $8\sqrt{3}$ **C)** $9\sqrt{3}$
D) 9 **E)** 10

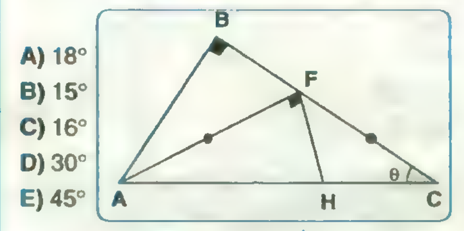
Problema 6: Hallar: PQ + PB
Si: OB = 9

A) $5\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{3}$
C) 8
D) 9
E) $9\sqrt{3}$

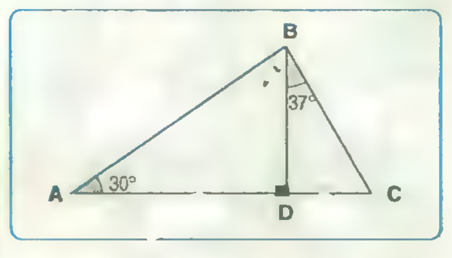


Problema 7: Si: AF = FC , AB = 6, FH = 4 Hallar: θ

A) 18°
B) 15°
C) 16°
D) 30°
E) 45°



Problema 8: Si: BD = 12 , hallar el perímetro del Δ ABC



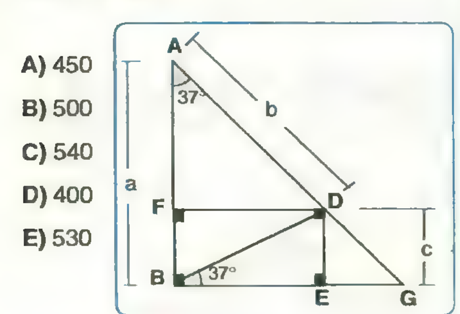
A) $2\sqrt{3}+10$ **B)** $3\sqrt{3}+12$

C) $12\left(4+\sqrt{3}\right)$ **D)** $10\left(2+\sqrt{3}\right)$

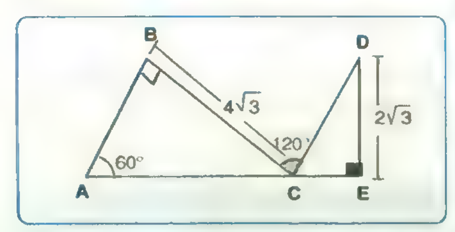
E) $15\left(1+\sqrt{3}\right)$

Problema 9 : Hallar: "a + b + c"
Si: BD = 150

A) 450
B) 500
C) 540
D) 400
E) 530



Problema 10: Hallar la distancia entre A y D



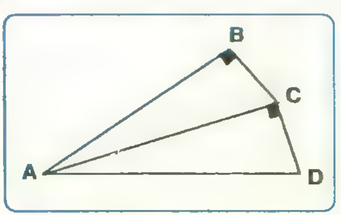
A) $4\sqrt{13}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $3\sqrt{13}$
D) $5\sqrt{13}$ E) $6\sqrt{13}$

Problema 11 : En la figura:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 100$

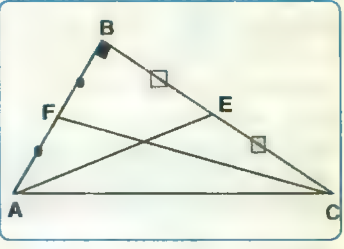
Hallar AD

A) $5\sqrt{3}$
B) 5
C) $5\sqrt{2}$
D) 6
E) $6\sqrt{2}$



Problema 12 : En la figura:
$CF^2 + AE^2 = 100$. Hallar AC

A) $6\sqrt{5}$
B) $4\sqrt{5}$
C) 10
D) $5\sqrt{6}$
E) 8



Problema 13 : La altura de un rectángulo es los 2/5 de la longitud de su base.

Si su diagonal mide $\sqrt{116}$ m ¿Cuál es su perímetro?

A) 26 m B) 28 m C) 29 m
D) 30 m E) 32 m

Problema 14 : En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, AB = 12, BC = 9. Se traza la altura $\overline{BH}$. Calcular la proyección de $\overline{BH}$ sobre $\overline{AB}$.

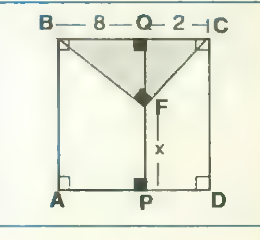
A) 5 B) 4 C) 102/15
D) 72/25 E) 108/25

Problema 15 : En un triángulo rectángulo ABC, recto en B; BC = a, AC = b, BH es altura. Calcular la proyección de HC sobre $\overline{BC}$.

A) a^2/b B) a^5/b^4 C) a^3/b^2
D) a^6/b^5 E) a^4/b^2

Problema 16 : Hallar "FP" si ABCD es un cuadrado.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

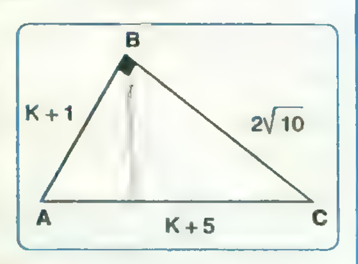


Problema 17 : Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de razón "r". Si la altura relativa a la hipotenusa mide 12. Hallar "r".

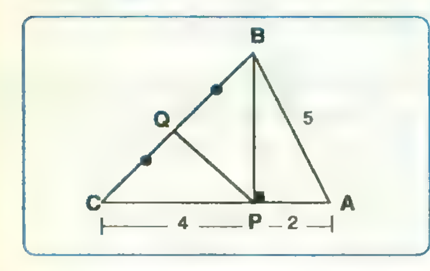
A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Problema 18 : En la figura calcular la proyección del cateto mayor sobre la hipotenusa.

A) 15/2
B) 28/3
C) 50/7
D) 40/7
E) 30/7



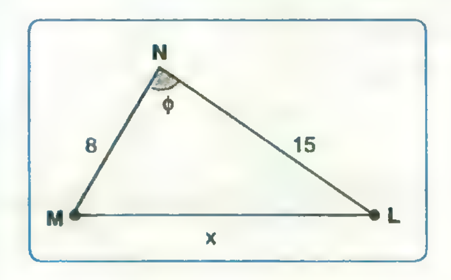
Problema 19 : En la figura, hallar "PQ"



A) $\sqrt{32}/2$ B) $\sqrt{33}/2$ C) $\sqrt{35}/2$

D) $\sqrt{37}/2$ E) $\sqrt{39}/2$

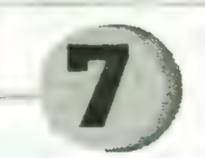
Problema 20 : En la figura: $\phi > 90°$
Hallar la suma de los valores enteros de "x".



A) 100 B) 98 C) 96
D) 104 E) 110

Clave de Respuestas

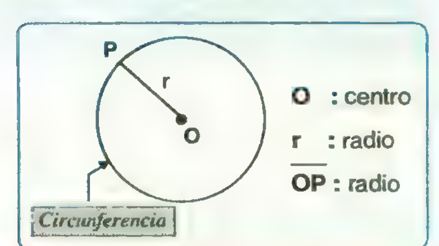
1. B	2. D	3. C	4. A	5. B
6. E	7. D	8. C	9. C	10. A
11. C	12. B	13. B	14. E	15. C
16. C	17. C	18. D	19. D	20. A



CIRCUNFERENCIA

7.1 DEFINICIÓN

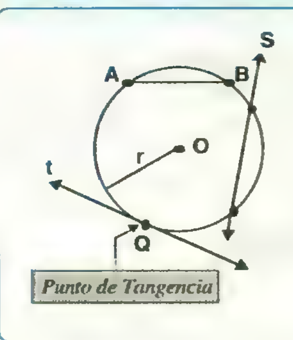
Es el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se llama **radio.**



Observaciones:

- ***Lugar Geométrico.-*** *Se llama así a un conjunto de puntos de una línea que gozan de una misma propiedad.*
- ***Círculo.-*** *Es la porción de plano limitado por la circunferencia.*
- ***radio.-*** *Tiene dos significados: es el segmento que une el centro con un punto de la circunferencia, o también es la longitud de dicho segmento.*

7.2 ELEMENTOS BÁSICOS EN LA CIRCUNFERENCIA:



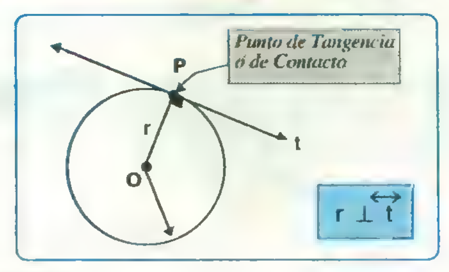
- ***O: centro***
- ***r: radio***
- ***$\overline{AB}$: Cuerda.*** *Es un segmento que une dos puntos de la circunferencia. Cuando pasa por el centro se llama* ***diámetro*** *(o cuerda máxima).*
- ***$\overleftrightarrow{t}$: recta tangente o simplemente tangente.-*** *Es una recta que toca en un punto a la circunferencia.*
- ***$\overleftrightarrow{s}$: recta secante o simplemente secante.-*** *Es una recta que corta en 2 puntos a la circunferencia.*

7.3 TEOREMAS FUNDAMENTALES EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA I :

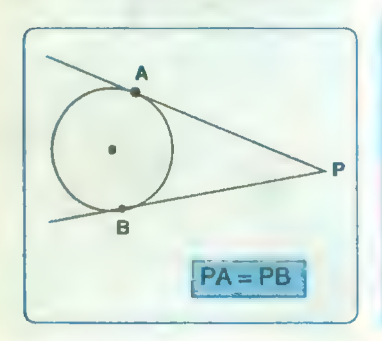
Teorema del radio y la Tangente.

Todo radio que llega al punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente.



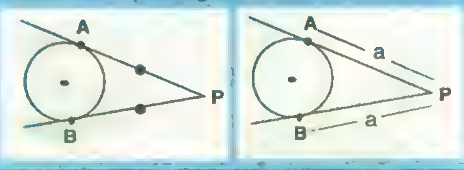
TEOREMA II : Teorema de las 2 tangentes.

Si desde un punto exterior se trazan dos tangentes a una misma circunferencia, los segmentos de tangente comprendidos entre los puntos de tangencia y el punto exterior son iguales.



REGLA PRÁCTICA

Si en un problema se presentan 2 tangentes a una circunferencia, colocaremos una misma marca a dos letras iguales. Así:

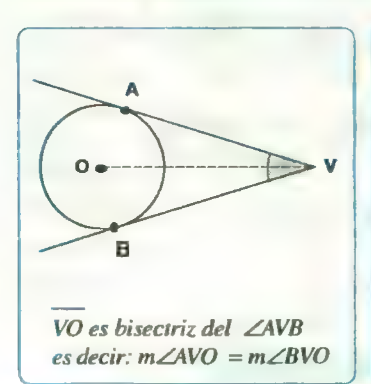


Demostración:

	Afirmaciones	Razones
	1. Trazamos los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y luego $\overline{OP}$	1. Trazo Auxiliar
	2. $\overline{OA} \perp \overline{PA}$ y $\overline{OB} \perp \overline{PB}$	2. Teorema I
	3. $\triangle OAP \cong \triangle OBP$	3. Porque tienen igual cateto e igual hipotenusa.
	$\therefore$ PA = PB	

TEOREMA III: **Teorema de la bisectriz del ∠ formado por las 2 tangentes.**

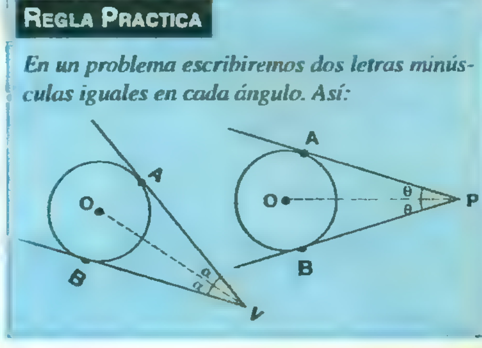
El segmento que une el vértice del ángulo formado por dos tangentes con el centro de la circunferencia **es bisectriz** del ángulo.



$\overline{VO}$ es bisectriz del $\angle AVB$
es decir: $m\angle AVO = m\angle BVO$

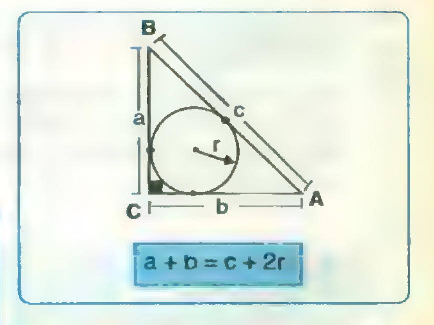
REGLA PRACTICA

En un problema escribiremos dos letras minúsculas iguales en cada ángulo. Así:



TEOREMA IV: **Teorema de Poncelet**

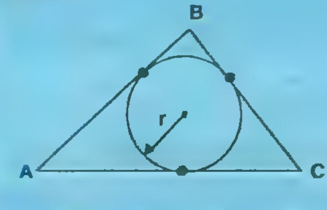
En todo triangulo rectángulo, la suma de catetos es igual a la hipotenusa más el doble del radio de la circunferencia inscrita.



Recuerda Que:

- *Cuando decimos "suma de catetos" nos referimos a la suma de sus longitudes.*
- *Circunferencia inscrita en un triángulo es la circunferencia que es tangente a los tres lados. Al radio de esta circunferencia también se le llama **inradio**.*

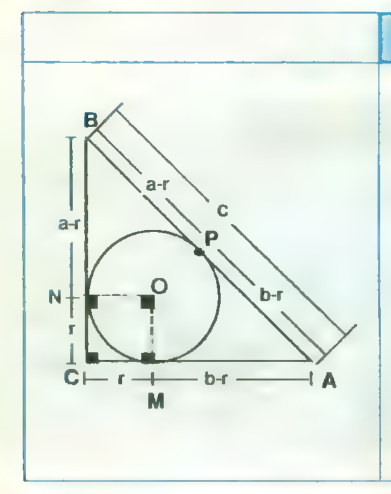
Ejemplo:



* *La circunferencia está **inscrita** en el ΔABC*

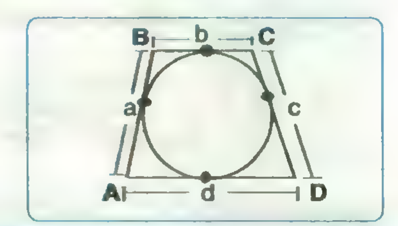
* *El ΔABC está **circunscrito** a la circunferencia*

Demostración:

	Afirmaciones	Razones
	1. Trazamos los radios OM y ON, luego OM ⊥ AC y ON ⊥ BC 2. OMCN es un cuadrado NC = r y MC = r 3. BP = BN = a - r AP = AM = b - r 4. BP + AP = BA a - r + b - r = c ∴ $a + b = c + 2r$	1. Trazo auxiliar y Teorema I 2. Por ser un rectángulo equilátero 3. Teorema II 4. Postulado: "el todo es igual a la suma de sus partes".

Teorema V: **Teorema de Pitot.**

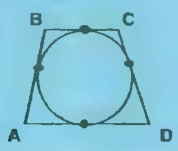
En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, se cumple que dos lados opuestos suman igual que los otros dos.



Recuerda Que:

- *Un cuadrilátero está circunscrito a una circunferencia cuando sus cuatro lados son tangentes a dicha circunferencia*

Ejemplo:



* *El cuadrilátero ABCD está circunscrito a la circunferencia.*

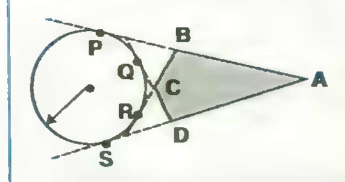
* *La circunferencia está inscrita en el cuadrilátero ABCD*

Teorema VI: **Teorema de Steiner.**

Antes de enunciar este Teorema daremos la siguiente definición.

- **Cuadrilátero Ex-inscrito.-** Es el cuadrilátero que tiene las prolongaciones de sus cuatro lados tangentes a una misma circunferencia.

Ejemplos:

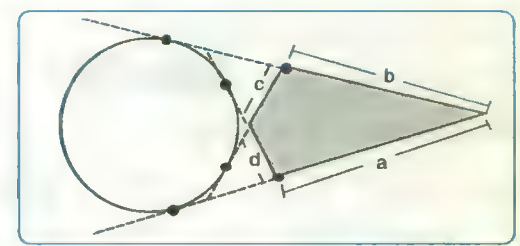


El ⏢ ABCD es **ex-inscrito** porque:

La prolongación del lado $\overline{AB}$ es tangente en P
La prolongación del lado $\overline{BC}$ es tangente en R
La prolongación del lado $\overline{DC}$ es tangente en Q
La prolongación del lado $\overline{AD}$ es tangente en S

El **Teorema de Steiner** dice que en todo cuadrilátero ex-inscrito la diferencia de dos lados opuestos es igual a la diferencia de los otros dos.

$$a - c = b - d$$



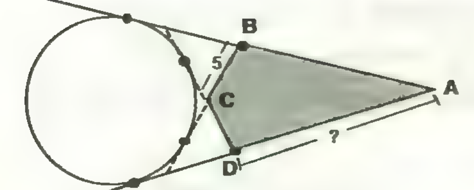
PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M. SOBRE CIRCUNFERENCIA

Problema 1: En la siguiente figura se cumple que:

AB = CD + 6; BC = 5, hallar "AD".

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

Resolución:



- Según datos del problema:

$$AB = CD + 6 \Rightarrow AB - CD = 6$$

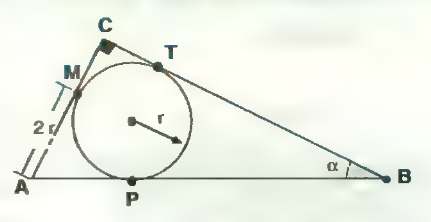
- Por el Teorema de **Steiner:**

$$AD - BC = AB - CD$$

$$AD - 5 = 6$$

$$\therefore\ AD = 11$$ Rpta. A

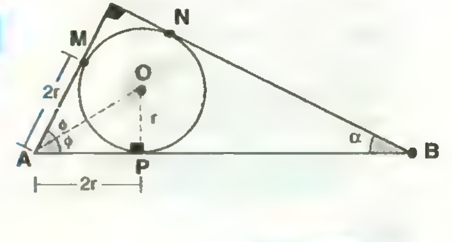
Problema 2: Calcular "α" si AM = 2r, "M" es punto de tangencia.



A) 30° B) 15° C) 45°
D) 37° E) 60°

Resolución:

En este tipo de problema **el radio se debe llevar al punto de tangencia** para aplicar el Teorema **I**. Entonces trazamos $\overline{OP}$. Luego $\overline{OP} \perp \overline{AB}$.



- Por el Teorema **III** y el Teorema **II**

  $\overline{AO}$ es bisectriz del $\angle A$ y $AP = AM = 2r$

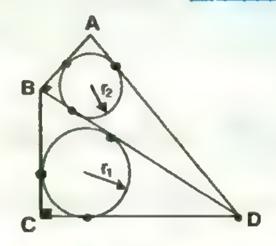
- El ⊿OPA, es notable de 53°/2

  Como: $OP = \dfrac{AP}{2} \Rightarrow \phi = \dfrac{53°}{2}$

  $m\angle A = 53°$

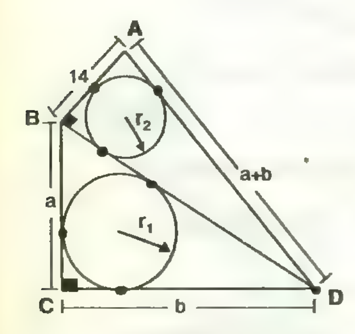
- En el ◺ABC: $m\angle A + m\angle B = 90°$ ➡ $53° + \alpha = 90°$ ∴ $\alpha = 37°$ **Rpta. D**

Problema 3: Hallar: $r_1 + r_2$ si AB = 14, y AD = BC + CD



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución:



- Sea BC = a, CD = b, entonces por dato:

  $AD = a + b$

- Por Poncelet:

  En el ◺BCD: $a + b = BD + 2r_1$

  En el ◺ABD: $14 + BD = a + b + 2r_2$

  $\sum$M.A.M. $\cancel{a+b} + 14 + \cancel{BD} = \cancel{BD} + \cancel{a+b} + 2r_1 + 2r_2$

  $14 = 2r_1 + 2r_2$

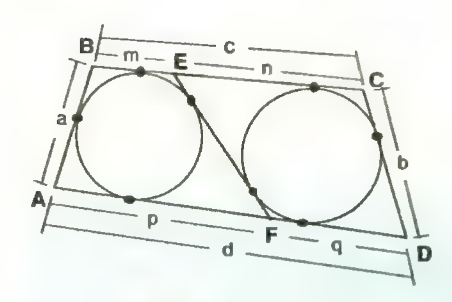
  ∴ $r_1 + r_2 = 7$ **Rpta. C**

Problema 4: En el siguiente figura:

$AB + CD = 50$; $BC + AD = 80$ Calcular "EF"

A) 3 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

Resolución:



- Para facilitar la resolución del problema colocamos las letras indicadas en la figura. Entonces, según datos:

$$\boxed{a + b = 50} \quad y \quad \boxed{c + d = 80}$$

- Por el Teorema de Pitot:

⏢ ABEF: $a + EF = m + p$

⏢ FECD: $b + EF = n + q$

$\sum$**MAM:** $a + b + 2EF = \underbrace{m + n} + \underbrace{p + q}$

Pero el gráfico: $\boxed{m + n = c}$ y $\boxed{p + q = d}$ ➡ $\underbrace{a + b} + 2EF = \underbrace{c + d}$

Reemplazando datos: $50 + 2EF = 80$

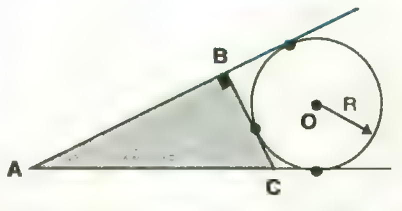
∴

Rpta. C

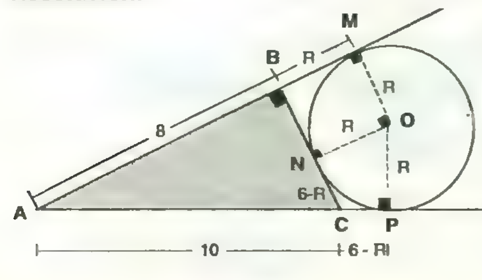
Problema 5: En el gráfico:

$AB = 8$, $BC = 6$, hallar "R"

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7



Resolución:



- En el ◺ ABC, por Pitagoras:

$$AC = \sqrt{8^2 + 6^2} \Rightarrow \boxed{AC = 10}$$

- Llevamos el radio a los puntos de tangencia M, N y P, luego:

cuadrado OMBN: $\boxed{MB = BN = R}$

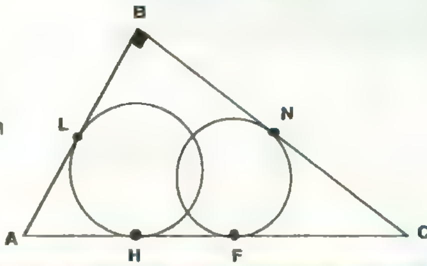
y como $BC = 6$ $\Rightarrow$ $\boxed{NC = 6 - R}$

- Por el Teorema de las dos tangentes:

  i) $CN = CP = 6 - R$

  ii) $AM = AP \Rightarrow 8 + R = 10 + 6 - R \Rightarrow \therefore$ $R = 4$ **Rpta. B**

Problema 6: Calcular el inradio del $\triangle$ABC si HF = BL, BN = 4 cm.



A) 1 cm **B)** 2 cm **C)** 3 cm

D) 4 cm **E)** 5 cm

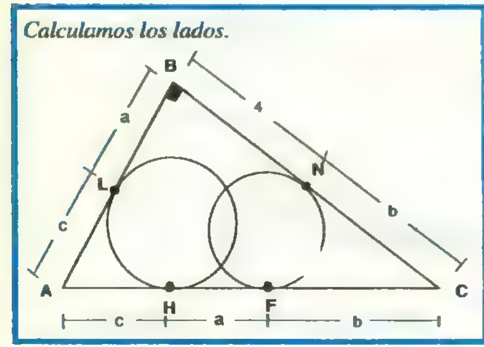
Resolución:

Recuerda Que:

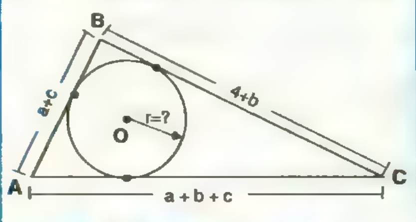
- *El **inradio** es el radio de la **circunferencia inscrita**. En la figura de este problema ninguna de las dos circunferencias que aparecen es la circunferencia inscrita, por lo tanto ninguno de sus radios es la incógnita.*

- *El radio pedido lo calcularemos por el Teorema de Poncelet pero primero debemos de calcular los lados del triángulo rectangulo. Veamos.*

Calculamos los lados.



Ahora que ya conocemos los lados, dibujamos la circunferencia inscrita. No hace falta dibujar las otras 2 circunferencias.



- Por el Teorema de las 2 tangentes: $CF = CN = b$ y $AH = AL = c$

- Por dato: $HF = BL$, sea $HF = a \Rightarrow BL = a$

- Finalmente, en el $\triangle$ABC, por Poncelet: $AB + BC = AC + 2r$

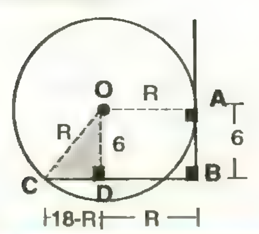
$$(\cancel{a} + \cancel{c}) + (4 + \cancel{b}) = (\cancel{a} + \cancel{b} + \cancel{c}) + 2r \Rightarrow \therefore$$

Rpta. B

Problema **7**: Calcular "R"

A) 10 B) 11
C) 12 D) 13
E) 15

Resolución:



- Llevamos el radio al punto de tangencia "A" y trazamos $\overline{OC}$ y $\overline{OD} \perp \overline{BC}$, con el fin de formar el triángulo rectángulo ODC.

- En el ⊿ODC, por el Teorema de Pitágoras:

$$(18 - R)^2 + 6^2 = R^2$$

$$18^2 - 36R + \cancel{R^2} + 6^2 = \cancel{R^2}$$

$$324 + 36 = 36R.$$

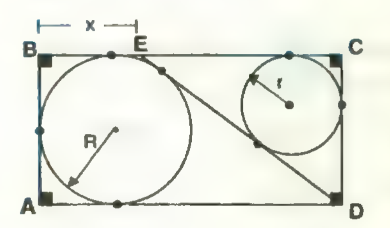
$\therefore$ $\boxed{R = 10}$ **Rpta. A**

> ***Recuerda Que:***
>
> ***Cuadrado de un binomio:***
>
> $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
>
> $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Problema 8: Del gráfico:

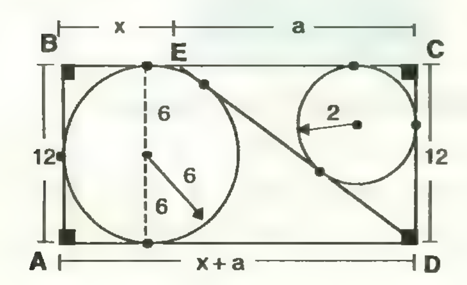
R = 6, r = 2, hallar "BE"

A) 6 B) 12 C) 8
D) 10 E) 13



Resolución:

- Sea EC = a ⇒ BC = AD = x + a



- Por Pitot:

⏢ABED: x + x + a = 12 + ED

$\boxed{2x + a - 12 = ED}$ .. (1)

- Por Poncelet:

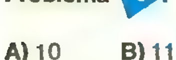
◺ECD: a + 12 = ED + 2 (2)

$\boxed{a + 8 = ED}$ .. (2)

Igualando los primeros miembros de (1) y (2): $2x + a - 12 = a + 8$

$\therefore$ $\boxed{x = 10}$ **Rpta. D**

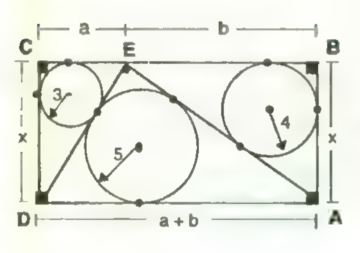
Problema 9: Hallar "AB" en la figura.



A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

Resolución:



Por Poncelet:

$\triangle$ DCE: $x + a = DE + 2$ (3)

$\triangle$ ABE: $x + b = EA + 2$ (4)

$\triangle$ DEA: $DE + EA = (a + b) + 2$ (5)

$\sum$MAM: $2x + a + b + DE + EA = DE + EA + a + b + 24$

$2x = 24$

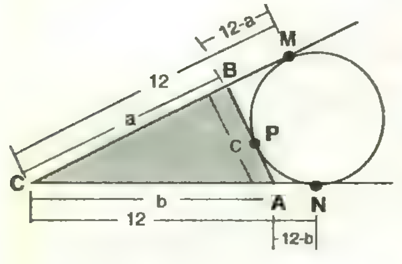
$\therefore$ $\boxed{x = 12}$ **Rpta. C**

Problema 10: Calcular el semiperímetro del Δ ABC

A) 12 B) 13 C) 14

D) 15 E) 16

Resolución:



Sea p_{ABC} = semiperímetro del ΔABC.

$$p_{ABC} = \frac{a + b + c}{2} = ?$$

Por el Teorema de las 2 tangentes:

i) $CN = CM = 12$

ii) $BP = BM = 12 - a \Rightarrow \boxed{BP = 12 - a}$

iii) $PA = AN = 12 - b \Rightarrow \boxed{PA = 12 - b}$

- Pero del gráfico: $c = BP + PA \Rightarrow c = 12 - a + 12 - b \Rightarrow \boxed{a + b + c = 24}$

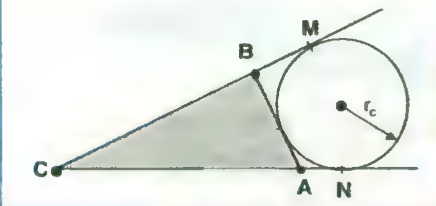
- Finalmente $p_{ABC} = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{24}{2} = 12 \Rightarrow \boxed{p_{ABC} = 12}$ **Rpta. A**

TEORíA ADICIONAL

Circunferencia Ex-inscrita a un triángulo.- Es aquella circunferencia que es tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.

Ejemplo:

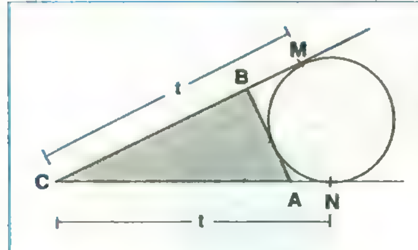
Circunferencia ex-inscrita relativa a $\overline{AB}$



Nota.

* *Todo triángulo tiene tres circunferencias ex-inscritas. Una relativa a cada lado.*
* *r_c es el ex-radio relativo al lado AB*

TEOREMA VII: Teorema de la Circunferencia Ex-inscrita



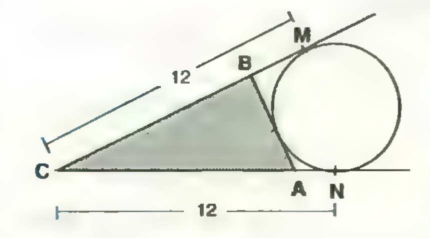
"El semiperímetro del triángulo es igual a la longitud de uno de los segmentos de tangente".

$$p_{ABC} = t$$

p_{ABC} = *semiperímetro del ΔABC*

t = *longitud de uno de los segmentos de tangente.*

Ejemplo: *El problema 10 se resolvería en forma inmediata. Veamos:*

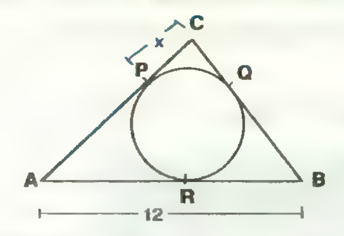


Resolución:

*Por el **Teorema de la circunferencia ex-inscrita***

$\boxed{p_{ABC} = 12}$ ***Rpta.***

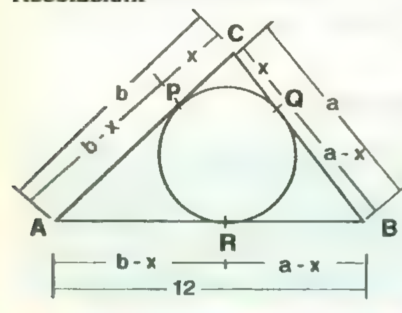
Problema 11: El semiperímetro del Δ ABC es 20. Hallar x.



A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10

Resolución:



- Según datos: $\dfrac{a+b+12}{2}=20 \Rightarrow \boxed{a+b=28}$
- Por el Teorema de las 2 tangentes:

  $CP = CQ = x$, $\boxed{AR = AP = b - x}$ y $\boxed{RB = BQ = a - x}$

- Del gráfico: $AR + RB = 12$

  $b - x + a - x = 12$

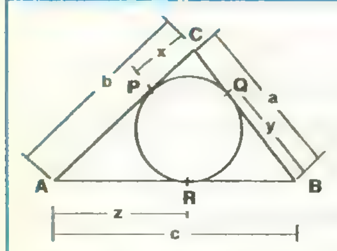
  $(a + b) - 2x = 12$

  $28 - 2x = 12$

  $\therefore \boxed{x = 8}$ **Rpta. C**

Nota: A partir de este problema se deduce el siguiente teorema.

TEOREMA VIII



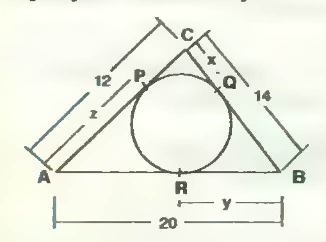
Si p_{ABC} es el semiperímetro del ΔABC, entonces se cumple que:

$$x = p_{ABC} - c$$

$$y = p_{ABC} - b$$

$$z = p_{ABC} - a$$

Ejemplo: Calcular x, y, z.



Resolución:

- $p_{ABC} = \dfrac{12+14+20}{2} = 23$
- Por el Teorema **VIII:**

  $x = 23 - 20 = 3$

  $y = 23 - 12 = 11$

  $z = 23 - 14 = 9$ **Rpta.**

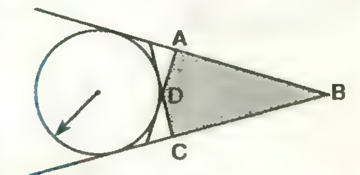
TALLER DE PROBLEMAS Nº 31

Problema 1 : En un triángulo rectángulo, la suma de los catetos es 23 metros. El inradio mide 3 m. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Resolución:

Rpta. 17

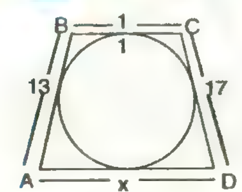
Problema 3 : En el cuadrilátero ABCD: AB = 12 cm, BC = 15 cm, CD = 5 cm. Hallar "AD"



Resolución:

Rpta. AD = 8

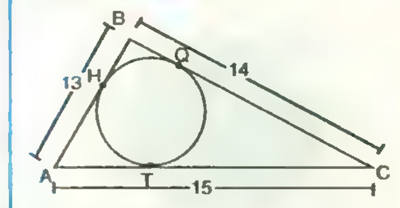
Problema 2 : Hallar: x



Resolución:

Rpta. 19

Problema 4 : Hallar: "BQ"



Resolución:

Rpta. BQ = 6

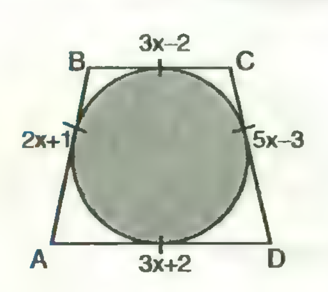
Problema 5 : Calcular: θ si "O" es centro de la circunferencia.

Resolución:

Rpta. $\theta = 10^\circ$

Problema 6 : Calcular el perímetro del cuadrilátero ABCD.

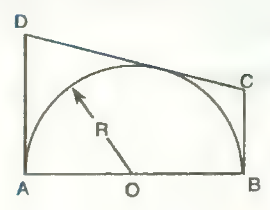
Resolución:



Rpta. 24

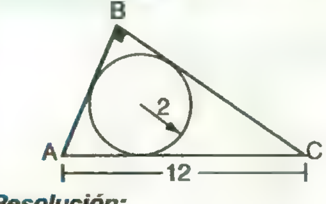
Problema 7 : El perímetro del cuadrilátero ABCD es 60. Hallar "CD"; R = 6

Resolución:



Rpta. 24

Problema 8 : Calcular el perímetro del triángulo rectángulo ABC



Resolución:

Rpta. 28

7.4 ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

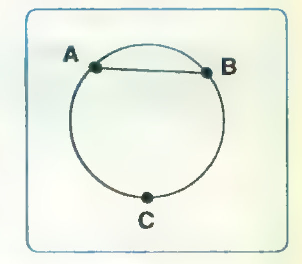
7.4.1 DEFINICIONES PREVIAS

- **Arco de Circunferencia.-** Se denomina arco a una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

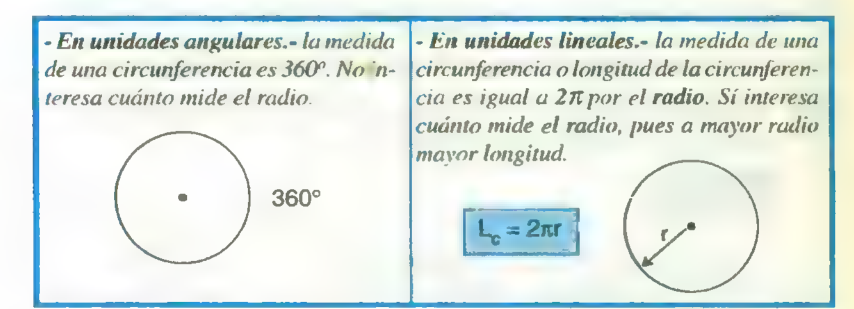
  De la figura:

  $\overset{\frown}{AB}$ es el arco menor correspondiente a la cuerda $\overline{AB}$

  $\overset{\frown}{ACB}$ es el arco mayor correspondiente a la cuerda AB



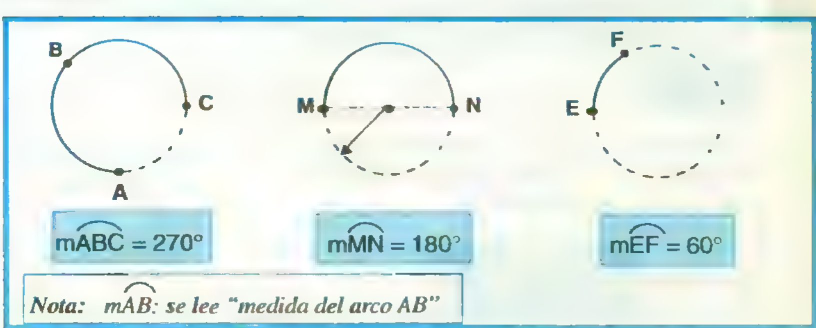
- **Medida de una circunferencia.-** Una circunferencia se puede medir tanto en unidades angulares como en unidades lineales.



*- **En unidades angulares.-** la medida de una circunferencia es 360°. No interesa cuánto mide el radio.*	*- **En unidades lineales.-** la medida de una circunferencia o longitud de la circunferencia es igual a 2π por el **radio**. Sí interesa cuánto mide el radio, pues a mayor radio mayor longitud.*

- **Medida de un arco.-** En este capítulo tanto la circunferencia como el arco se medirán en unidades angulares, específicamente en **grados sexagesimales.** Entonces la medida de un arco será una fracción de 360°.

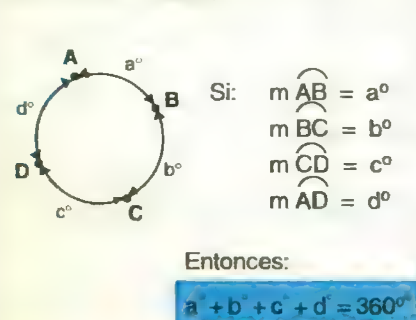
Ejemplos:



Nota: $m\overset{\frown}{AB}$: se lee "medida del arco AB"

7.4.2 SUMA DE ARCOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

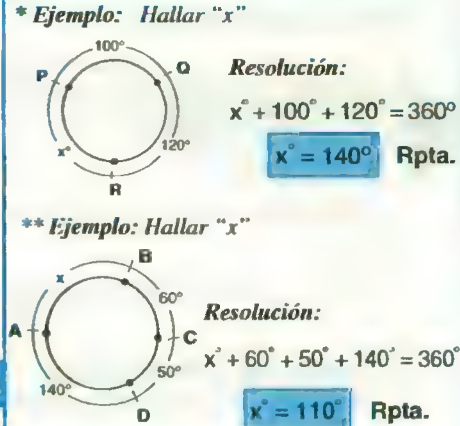
Si una circunferencia se divide en varios arcos, la suma de las medidas de todos esos arcos es 360°. Veamos:



Si: $m\overset{\frown}{AB} = a°$
$m\overset{\frown}{BC} = b°$
$m\overset{\frown}{CD} = c°$
$m\overset{\frown}{AD} = d°$

Entonces:

$$a° + b° + c° + d° = 360°$$



*** Ejemplo:* *Hallar "x"***

Resolución:

$x° + 100° + 120° = 360°$

$x° = 140°$ **Rpta.**

***** Ejemplo: Hallar "x"***

Resolución:

$x° + 60° + 50° + 140° = 360°$

$x° = 110°$ **Rpta.**

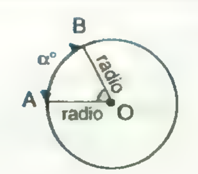
7.4.3 TEOREMAS SOBRE ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

I. **ÁNGULO CENTRAL.-** Es el ángulo que tiene como vértice el centro de la circunferencia y como lados dos radios de la misma.

TEOREMA:

La medida de un ángulo central es igual a la medida del arco opuesto. Así en la figura $m\overset{\frown}{AB} = \alpha°$.

Entonces: $m\angle AOB = \alpha°$



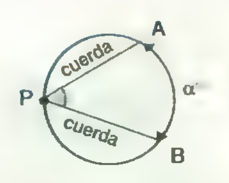
II. **ÁNGULO INSCRITO.-** Es el ángulo que tiene como vértice a un punto de la circunferencia y como lados a dos cuerdas.

TEOREMA:

La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco opuesto. Así en la figura si $m\overset{\frown}{AB} = \alpha°$;

Entonces:

$$m\angle APB = \frac{\alpha°}{2}$$

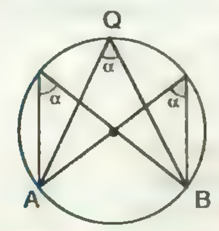


Demostración:

	Afirmaciones	Razones
	1. Trazamos los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OP}$	1. Trazo auxiliar.
	2. $m\angle AOB = \alpha^o$	2. Ángulo central
	3. El ΔPOA es isósceles: $m\angle OPA = m\angle OAP = \theta$ El ΔPOB es isósceles: $m\angle OPB = m\angle OBP = \phi$	3. Definición de triángulo isósceles y aplicación del Teorema que dice: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".
	4. $m\angle APB = \theta + \phi$	4. Suma de ángulos
	5. En el $\triangle$OAPB: $\alpha^o = 2\theta + 2\phi \Rightarrow \theta + \phi = \frac{\alpha^o}{2}$	5. Propiedad del cuadrilátero cóncavo.
	6. Entonces: $m\angle APB = \frac{\alpha^o}{2}$	6. Reemplazando lo obtenido en el paso 5, en el paso 4.

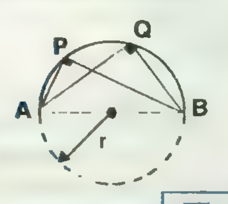
Corolarios

1. Todos los ángulos inscritos en un mismo arco tienen igual medida.



Nota: Al arco AQB se le llama: Arco capaz de todos los angulos que miden "α"

2. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es ángulo recto (mide 90º). O también todo ángulo que se opone a un diámetro es recto.



$\overline{AB}$: diámetro

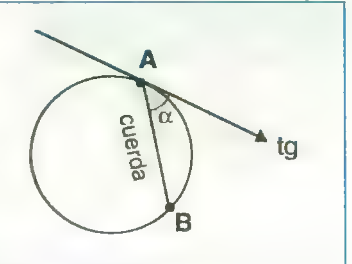
$m\angle APB = m\angle AQB = 90^o$

III. ÁNGULO SEMI-INSCRITO.- Es el ángulo que tiene como vértice un punto de la circunferencia y como lados a una cuerda y una tangente.

TEOREMA:

La medida de un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad de la medida del arco comprendido entre la cuerda y la tangente. En la figura si "α" es la medida del ángulo semi-inscrito, entonces:

$$\alpha = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$$

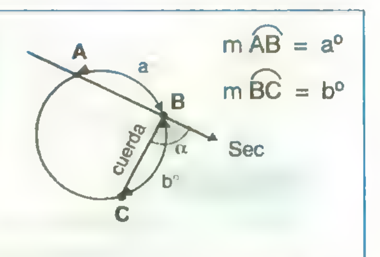


IV. ÁNGULO EX-INSCRITO.- Es el ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son una cuerda y una secante.

TEOREMA:

La medida de un ángulo ex-inscrito es igual a la semi-suma de las medidas de los arcos opuestos. Así en la figura "α" a la medida del ángulo ex-inscrito, a° y b° son las medidas de los arcos opuestos. Entonces:

$$\alpha = \frac{a^\circ + b^\circ}{2}$$

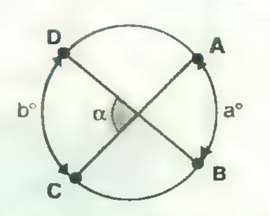


V. ÁNGULO INTERIOR.- Es uno de los cuatro ángulos que se forman cuando dos cuerdas se cortan, por lo tanto su vértice es un punto interior de la circunferencia y sus lados son dos segmentos de cuerda.

TEOREMA:

La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos opuestos. En la figura "α" es la medida de un ángulo interior, a° y b° son las medidas de los arcos opuestos. Entonces.

$$\alpha = \frac{a^\circ + b^\circ}{2}$$



Demostración:

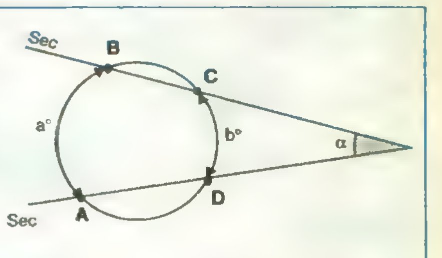
	Afirmaciones	Razones
	1. Trazamos $\overline{AD}$	1. Trazo auxiliar para formar un triángulo.
	2. $m\angle ADB=\dfrac{a^\circ}{2}; m\angle CAD=\dfrac{b^\circ}{2}$	2. Ángulo Inscrito.
	3. En el ΔAPD. $\alpha=\dfrac{a^\circ}{2}+\dfrac{b^\circ}{2}$ $\therefore \boxed{\alpha=\dfrac{a^\circ+b^\circ}{2}}$	3. Aplicación del Teorema del ángulo exterior en el triángulo.

VI. ÁNGULO EXTERIOR.- Es el ángulo cuyo vértice es un punto exterior de la circunferencia y sus lados pueden ser:
i) dos secantes **ii)** una secante y una tangente ó **iii)** dos tangentes.

TEOREMA:

La medida de un ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos opuestos.
En la figura "α" es la medida del ángulo exterior, a° y b°, las medidas de los arcos opuestos. Entonces:

$$\alpha=\frac{a^\circ-b^\circ}{2}$$



Demostración:

	Afirmaciones	Razones
	1. Trazamos $\overline{BD}$	1. Trazo auxiliar.
	2. $m\angle CBD=\dfrac{b^\circ}{2}; m\angle ADB=\dfrac{a^\circ}{2}$	2. Ángulo Inscrito.
	3. En el ΔBDP $\dfrac{a^\circ}{2}=\alpha+\dfrac{b^\circ}{2}$ $\therefore \boxed{\alpha=\dfrac{a^\circ-b^\circ}{2}}$	3. Teorema del ángulo exterior en el triángulo.

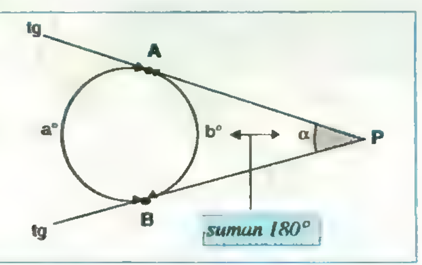
CASO PARTICULAR: Cuando los lados del ángulo exterior son dos tangentes, el ángulo exterior se llama **Ángulo Circunscrito**.

TEOREMA DEL ÁNGULO CIRCUNSCRITO

El ángulo circunscrito con el menor arco que se le opone suman 180°.

En la figura "α" es la medida del ángulo circunscrito y "b°" es la medida del menor arco que se le opone.

Entonces: $\alpha^\circ + b^\circ = 180^\circ$

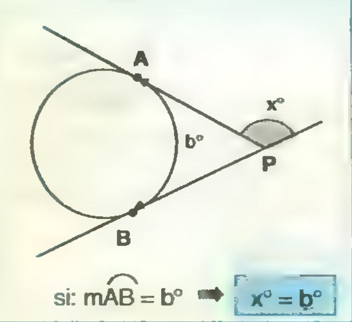


Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $\alpha^\circ = \dfrac{a^\circ - b^\circ}{2}$	1. Ángulo exterior en la circunferencia.
2. $a^\circ + b^\circ = 360^\circ \Rightarrow a^\circ = 360^\circ - b^\circ$	2. Suma de arcos de una circunferencia.
3. $\alpha^\circ = \dfrac{360^\circ - b^\circ - b^\circ}{2}$ $\alpha^\circ = 180^\circ - b^\circ \Rightarrow \therefore$ $\alpha^\circ + b^\circ = 180^\circ$	3. Reemplazando el paso 2 en el paso 1 y simplificando.

Colorario

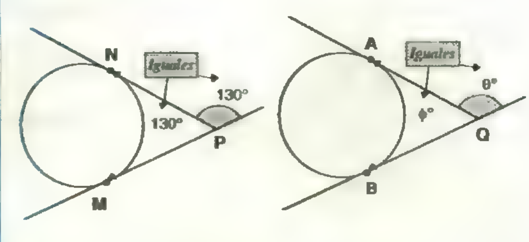
El adyacente al ángulo circunscrito mide igual que el menor arco opuesto.

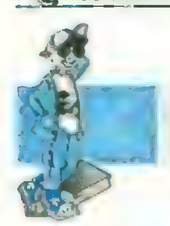


si: $m\overset{\frown}{AB} = b^\circ$ ➡ $x^\circ = b^\circ$

Regla Práctica .- En la práctica la medida del arco se escribe también en el ángulo adyacente al ángulo circunscrito.

Ejemplos:

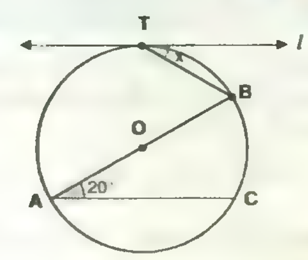




PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M. SOBRE ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Problema : En la figura:

$\overleftrightarrow{l} \parallel \overline{AC}$, "O" es centro. Calcular "x"



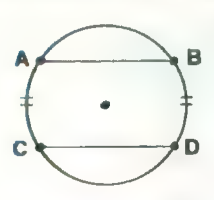
A) 30° B) 32° C) 33°
D) 35° E) 37°

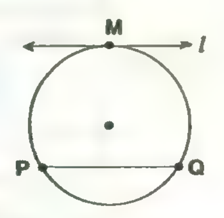
Resolución:

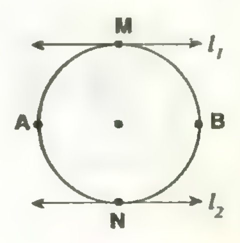
Antes de resolver este problema, daremos a conocer lo siguiente.

Propiedad de los arcos comprendidos entre paralelas.

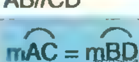
En una misma circunferencia los arcos comprendidos entre dos paralelas son congruentes. Veamos:







si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



$m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$

si: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overline{PQ}$

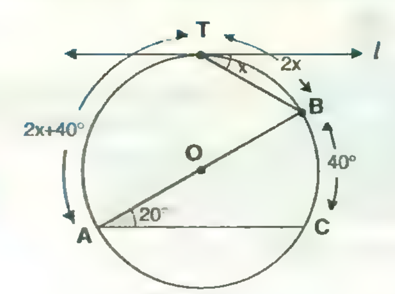
$m\overset{\frown}{PM} = m\overset{\frown}{MQ}$

si: $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

$m\overset{\frown}{MAN} = m\overset{\frown}{MBN} = 180°$

** La demostración queda para el alumno.*

- "x" es un ángulo semi-inscrito, por lo tanto: $x = \dfrac{m\overset{\frown}{TB}}{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{TB} = 2x$



- Por ángulo inscrito:

$$20° = \frac{m\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \boxed{m\overset{\frown}{BC} = 40°}$$

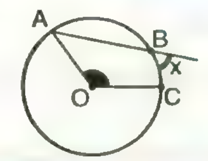
- Por la propiedad de los arcos comprendidos entre paralelas.

$$m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{TBC} \Rightarrow \boxed{m\overset{\frown}{AT} = 2x + 40°}$$

- Finalmente, como $\overset{\frown}{ATB}$ es una semicircunferencia, ya que $\overline{AB}$ es diámetro, medirá 180°. Entonces:

$$m\overset{\frown}{AT} + m\overset{\frown}{TB} = 180° \Rightarrow (2x + 40°) + 2x = 180° \Rightarrow \therefore \boxed{x = 35°}$$ **Rpta. D**

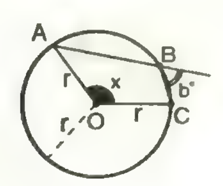
Problema 2: Hallar x, si "O" es centro.



A) 70° B) 75° C) 60°

D) 65° E) 80°

Resolución:



Sea: $\boxed{m\overset{\frown}{AB} = a°}$ y $\boxed{m\overset{\frown}{BC} = b°}$

- Según el gráfico, "x" es un ángulo exinscrito. Luego:

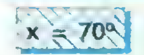
$$\boxed{x = \frac{a° + b°}{2}} \quad ..\ (1)$$

- Por ángulo central:

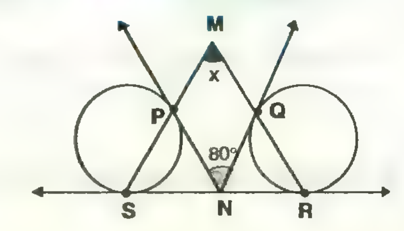
$$m\angle AOC = m\overset{\frown}{ABC}$$

$$\Rightarrow m\angle\overset{\frown}{ABC} = 140°$$

$$\boxed{a° + b° = 140°} \quad ..\ (2)$$

- Ahora reemplazamos (2) en (1) y se obtiene:  $\boxed{x = 70°}$ **Rpta. A**

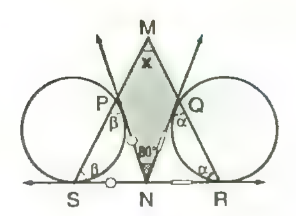
Problema 3: Siendo P, Q, R y S puntos de tangencia, hallar "x"



A) 50° B) 60° C) 70°

D) 80° E) 90°

Resolución:



- Por el Teorema de las 2 tangentes: NP = NS y NQ = NR, luego los triángulos SNP y QNR son isósceles, motivo por el cual tendrán 2 ángulos iguales cada triángulo.

- En el ΔSMR: $\alpha + \beta + x = 180°$ ... (1)

- En el ◊ PMQN:

  $\alpha + \beta = x + 80°$ ... (2)

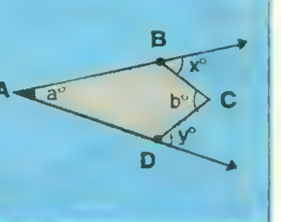
- (2) en (1):

  $x + 80° + x = 180°$

  $\therefore$ $x = 50°$ **Rpta. A**

Recuerda Que:

En todo cuadrilátero 2 ángulos interiores opuestos suman igual que los otros 2 ángulos exteriores opuestos.

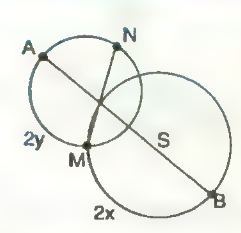


$a° + b° = x° + y°$

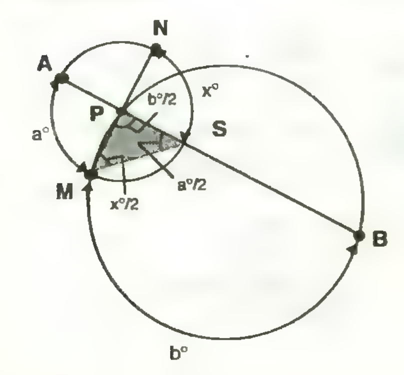
Problema 4: en el siguiente gráfico:

$m\overset{\frown}{AM} + m\overset{\frown}{MB} = 280°$. Hallar $m\overset{\frown}{NS}$.

A) 60° **B)** 70° **C)** 80°
D) 50° **E)** 40°



Resolución:



- Sea "x" la medida del arco pedido.

  Según datos: $a° + b° = 280°$

- Para facilitar la resolución trazamos MS, luego por el Teorema del ángulo inscrito:

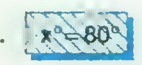
$m\angle S = \frac{a°}{2}$; $m\angle P = \frac{b°}{2}$; $m\angle M = \frac{x°}{2}$

- En el Δ SPM: $m\angle S + m\angle P + m\angle M = 180°$

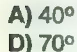
$$\frac{a°}{2} + \frac{b°}{2} + \frac{x°}{2} = 180°$$

$$\underbrace{a° + b°}_{} + x° = 360°$$

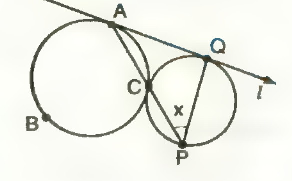
$$280° + x° = 360° \Rightarrow \therefore$$



Rpta. C

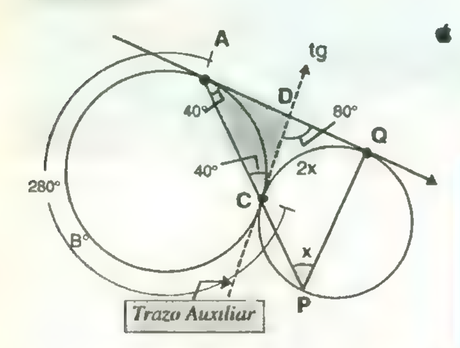
Problema 

: En la figura que se muestra, las circunferencias son tangentes en "C" y $\overleftrightarrow{l}$ es una tangente común externa. Si $m\widehat{ABC} = 280°$, hallar "x".



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

Resolución:



- Como una circunferencia mide 360° entonces:

$m\widehat{ABC} + m\widehat{AC} = 360° \Rightarrow$ $m\widehat{AC} = 80°$

¡ATENCIÓN!

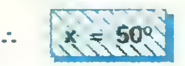
Cuando 2 circunferencias son tangentes en un punto, tal como "C", se recomienda trazar por dicho punto una tangente, con el fin de aplicar los teoremas conocidos.

- Por ángulo inscrito: $x = \dfrac{m\widehat{CQ}}{2} \Rightarrow m\widehat{CQ} = 2x$

- Por ángulo semi-inscrito: $m\angle DAC = m\angle DCA = \dfrac{m\widehat{AC}}{2} = \dfrac{80°}{2} = 40°$

- En el ΔADC, $\angle$exterior D = 40° + 40° = 80° (Teorema del $\angle$ exterior en el triángulo)

- Por el Teorema del $\angle$circunscrito: $80° + 2x = 180°$

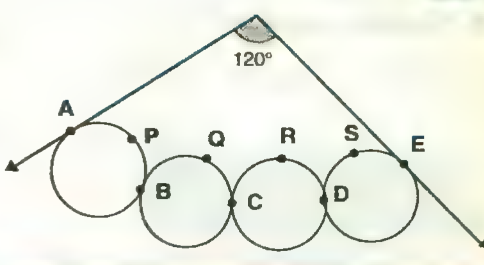
$\therefore$ 

Rpta. B

Problema 6 : En la figura calcular.

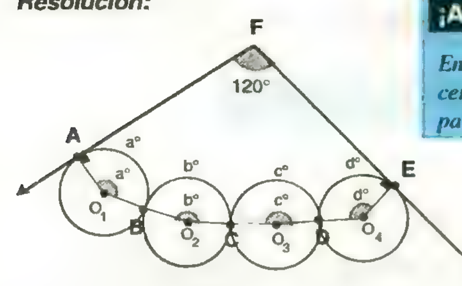
$m\overset{\frown}{APB} + m\overset{\frown}{BQC} + m\overset{\frown}{CRD} + m\overset{\frown}{DSE}$

si A, B, C, D y E son puntos de tangencia.



A) 300° B) 400° C) 500°
D) 600° E) 700°

Resolución:



¡ATENCION!

En este tipo de problema, se recomienda unir los centros de todas las circunferencias tangentes, para que de esta manera se forme un polígono.

- Sea: $a° + b° + c° + d° = ?$ la suma pedida, O_1, O_2, O_3 y O_4 los centros de cada circunferencia.

- Por ángulo central:

$m\angle AO_1B = a°$, $m\angle BO_2C = b°$,
$m\angle CO_3D = c°$, $m\angle DO_4E = d°$

- En el Eptágono $AO_1O_2O_3O_4EF$:

$$90° + a° + b° + c° + d° + 90° + 120° = 180° (7 - 2)$$

$\therefore$ $a° + b° + c° + d° = 600°$ **Rpta. D**

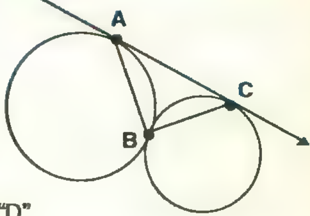
Recuerda Que:

Suma de ángulos interiores de un polígono:

$$S\angle i = 180° (n - 2)$$

donde: n = # de lados
= # de vértices

Problema 7 : Calcular la medida del ángulo ABC, si A, B y C son puntos de tangencia.

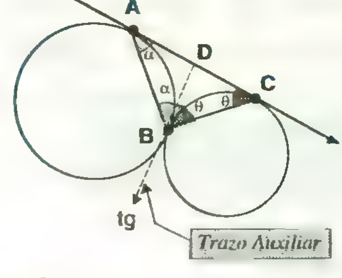


A) 75° B) 80° C) 90°
D) 95° E) 105°

Resolución:

- Trazamos por "B" una tangente que corta a $\overline{AC}$ en "D".

- Por ángulo semi-inscrito:



$$m\angle DAB = m\angle DBA = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2} = \alpha$$

$$m\angle DBC = m\angle DCB = \frac{m\overset{\frown}{BC}}{2} = \theta$$

- En el ΔABC:

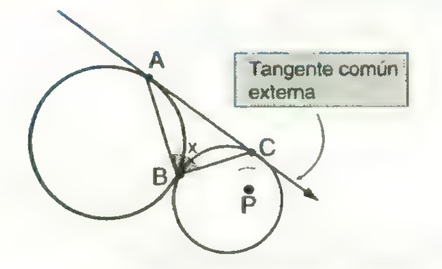
$$\alpha + (\alpha + \theta) + \theta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ$$

- Pero $m\angle ABC = \alpha + \theta \Rightarrow$ $m\angle ABC = 90^\circ$ **Rpta. C**

Nota : A partir de este problema se deduce la siguiente propiedad.

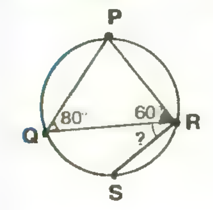
Propiedad:

Si a 2 circunferencias tangentes exteriores se le traza una tangente común externa, el ángulo formado al unir los puntos de tangencia es recto.



TALLER DE PROBLEMAS Nº 32

Problema 1 : Si: $m\overset{\frown}{QS} = m\overset{\frown}{SR}$, hallar la $m\angle QRS$.

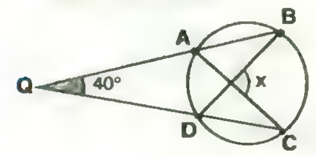


Resolución:

Rpta. 20°

Problema 2 : En la figura:

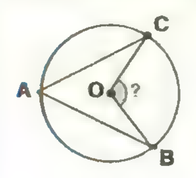
$m\overset{\frown}{BC} = 5\ m\overset{\frown}{AD}$. Calcular "x"



Resolución:

Rpta. x = 60°

Problema 3 : Si "O" es centro de la circunferencia y $m\overset{\frown}{AC} = 100°$; $m\overset{\frown}{AB} = 110°$. Calcular $m\angle COB$.



Resolución:

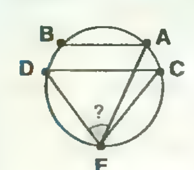
Rpta. 150°

Problema 4 : Hallar: x

Resolución:

Rpta. x = 20°

Problema 5: Si: $\overline{BA} // \overline{DC}$, $m\overset{\frown}{BA} = 72^\circ$, $m\angle AEC = 14^\circ$, hallar $m\angle AED$



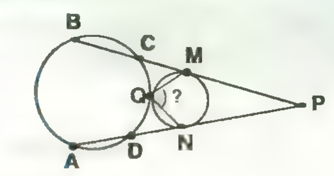
Resolución:

Rpta. 50°

Problema 7: Si:

$m\overset{\frown}{AB} = 120^\circ$, $m\overset{\frown}{CD} = 80^\circ$,

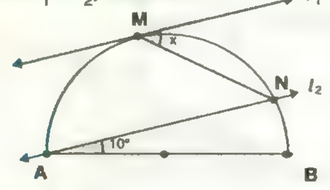
hallar la $m\angle MQN$



Resolución:

Rpta. 80°

Problema 6: La figura muestra a una semicircunferencia donde AB es diámetro. Si: $\overleftrightarrow{l_1} // \overleftrightarrow{l_2}$, hallar "x".

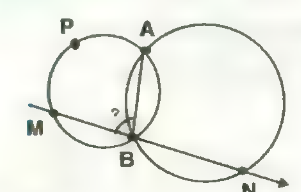


Resolución:

Rpta. x = 40°

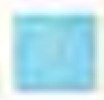
Problema 8: Si:

$m\overset{\frown}{APM} + m\overset{\frown}{ABN} = 300^\circ$. Calcular $m\angle MBA$

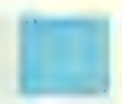


Resolución:

Rpta. 75°



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE CIRCUNFERENCIA



NIVEL I

Problema 1: Calcular "r"

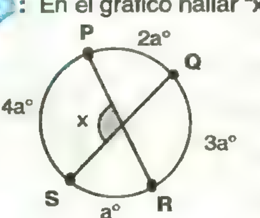
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Problema 2: Un cuadrilátero ABCD está circunscrito a una circunferencia. Si: AB = 16, BC = 20 y AD = 12. Calcular "CD"

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

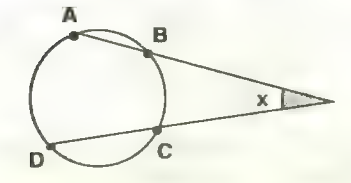
Problema 3: En el gráfico hallar "x"

A) 94°
B) 86°
C) 113°
D) 108°
E) 126°



Problema 4: Calcular "x" si:

$$m\overset{\frown}{AB}=\frac{m\overset{\frown}{BC}}{3}=\frac{m\overset{\frown}{CD}}{5}=\frac{m\overset{\frown}{AD}}{7}$$



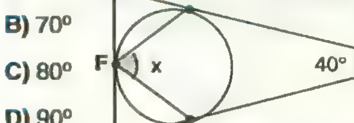
A) 22° 30' B) 45° C) 30°
D) 16° E) 18°

Problema 5: Si: AB = 13, BC = 9, CD = 7, hallar "AD"

A) 15
B) 14
C) 13
D) 16
E) 17

Problema 6: El valor de "x" es:

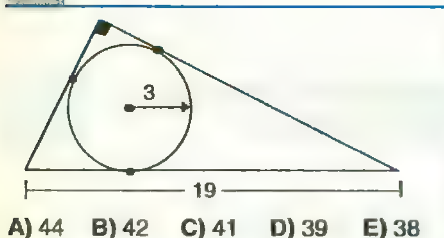
A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 90°
E) 75°



Problema 7: En la figura $m\overset{\frown}{AB} = 40°$ $m\overset{\frown}{AC} = 60°$. Hallar $m\overset{\frown}{BC}$.

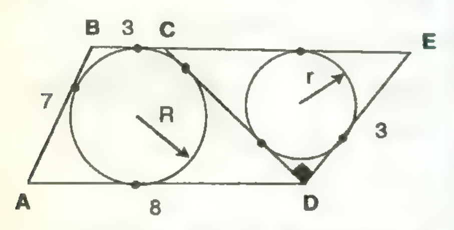
A) 50°
B) 70°
C) 65°
D) 80°
E) 90°

Problema 8: Calcular el perímetro del triángulo rectángulo mostrado.



A) 44 B) 42 C) 41 D) 39 E) 38

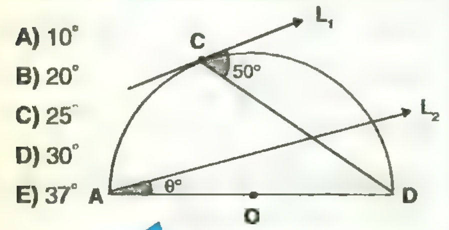
Problema 9 : Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo CDE si AB = 7; BC = 3; AD = 8, DE = 3



A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

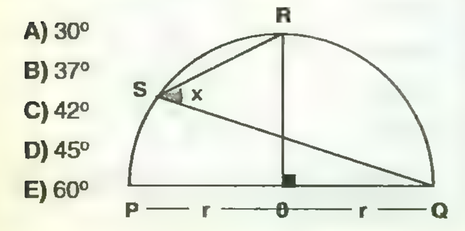
Problema 10 : Si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular θ°. La figura es semicircunferencia.

A) 10°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 37°



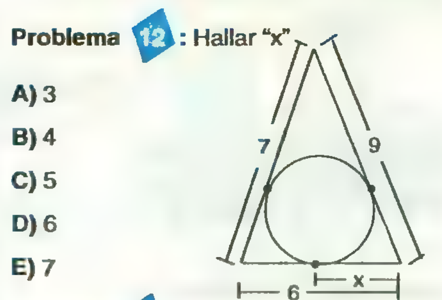
Problema 11 : En la semicircunferencia de diámetro PQ, hallar "x"

A) 30°
B) 37°
C) 42°
D) 45°
E) 60°

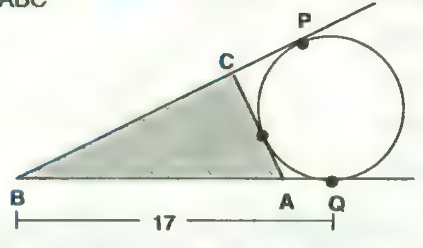


Problema 12 : Hallar "x"

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7



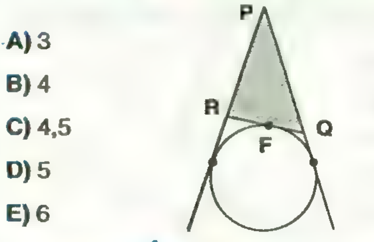
Problema 13 : Indicar el perímetro del Δ ABC



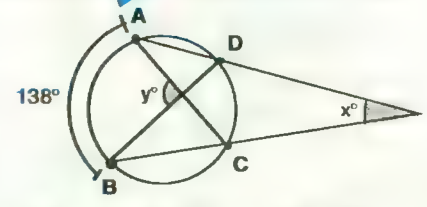
A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

Problema 14 : PQ = 12; QR = 9; PR = 13, si "F" es punto de tangencia, hallar "QF".

A) 3
B) 4
C) 4,5
D) 5
E) 6



Problema 15 : El valor de x° + y° es:



A) 144° B) 142° C) 140°
D) 138° E) 136°

Problema 16 : En la figura calcular "α" si el arco $\overset{\frown}{CD}$ mide 100° y además AC = AP.

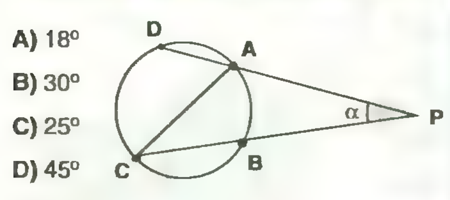
A) 18°

B) 30°

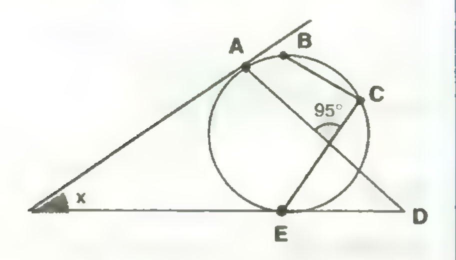
C) 25°

D) 45°

E) 22°30'

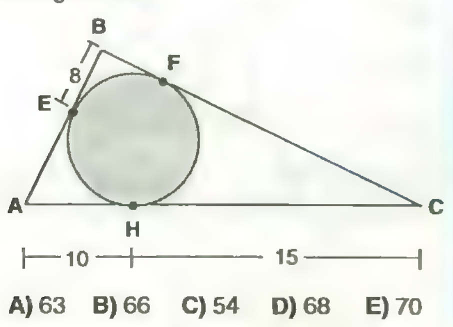


Problema 17 : Hallar "x" si $\overline{BC} // \overline{AD}$, A y E son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{AB} = \frac{2}{3} m\overset{\frown}{AE}$.



A) 78° B) 59° C) 43° D) 42° E) 64°

Problema 18 : Calcular el perímetro del triángulo ABC.



A) 63 B) 66 C) 54 D) 68 E) 70

Problema 19 : Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el ◺ABC, si: BD = MN y BE = 18

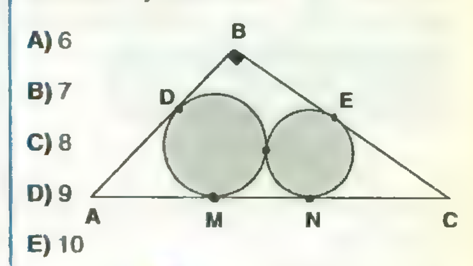
A) 6

B) 7

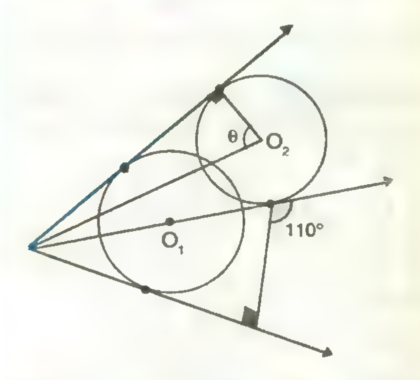
C) 8

D) 9

E) 10



Problema 20 : Si O_1 y O_2 son centro de las circunferencias mostradas, hallar "φ".



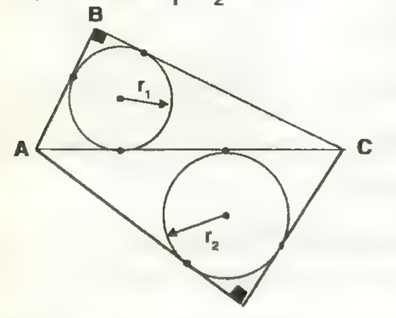
A) 80° B) 75° C) 70° D) 76° E) 60°

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. E	4. B	5. A
6. B	7. D	8. A	9. B	10. A
11. D	12. B	13. E	14. D	15. D
16. C	17. A	18. B	19. D	20. A

NIVEL II

Problema 1. Si el perímetro del cuadrilátero ABCD es 50 m, la diagonal $\overline{AC}$ mide 20 m, el valor de $r_1 + r_2$ es:



A) 3 m **B)** 4 m **C)** 5 m **D)** 6 m **E)** 7 m

Problema 2: Si m∠ABC = 2m∠ADC, calcular la m∠ADC. A, B y C son puntos de tangencia.

A) 72°

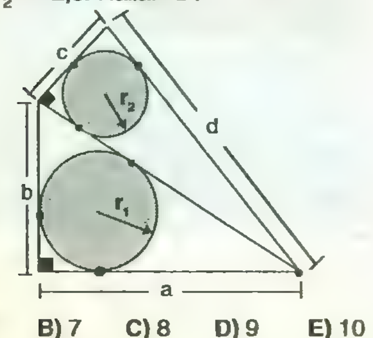
B) 68°

C) 44°

D) 76°

E) 74°

Problema 3: En la figura: a + b + c = 12, $r_1 + r_2 = 2{,}5$. Hallar "d".



A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

Problema 4: Si se cumple que: AB + CD = 14 m; BC + AD = 26 m. Hallar "PQ"

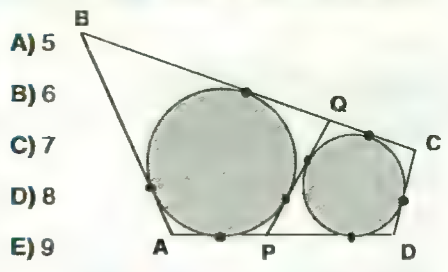
A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9



Problema 5: En la figura: AB - 7 = DC, AD = 3BC, calcular "AD"

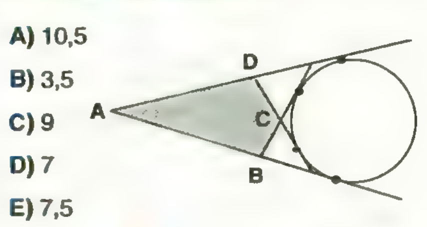
A) 10,5

B) 3,5

C) 9

D) 7

E) 7,5



Problema 6: En el gráfico, hallar "x"

A) 7

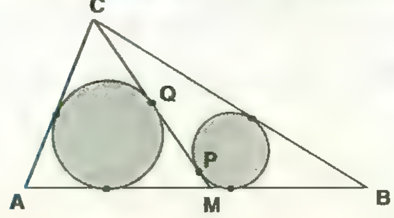
B) 8

C) 9

D) 10

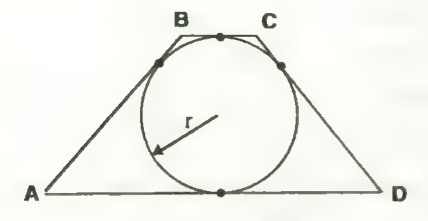
E) 11

Problema 7: En la figura BC = 10 ; AC = 4, calcular PQ, si $\overline{CM}$ es mediana.



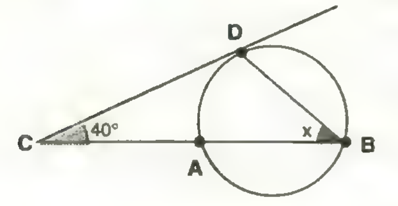
A) 1 B) 2 C) 5 D) 4 E) 3

Problema 8 : Calcular el perímetro del trapecio isósceles ABCD, si $m\angle A = 30^{\circ}$; r = 1



A) 20 B) 16 C) 10 D) 8 E) 4

Problema 9 : En la figura "D" es punto de tangencia, $\overset{\frown}{AB} = 80^{\circ}$. Hallar el valor de "x"



A) 40° B) 45° C) 50° D) 55° E) 60°

Problema 10 : En la figura mostrada. Calcular "α" si los arcos están en relación como se muestra la figura.

A) 36°

B) 63°

C) 72°

D) 45°

E) 54°

Problema 11 : En el gráfico mostrado hallar el valor de "α", "o" es centro de la circunferencia.

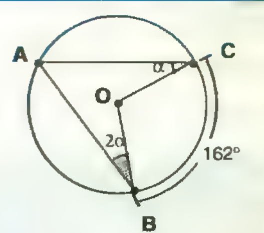
A) 81°

B) 54°

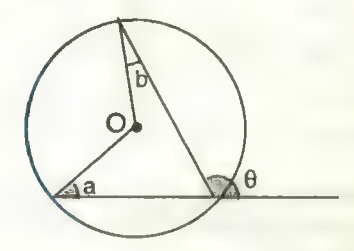
C) 27°

D) 23°

E) N.A.



Problema 12 : En la figura mostrada hallar el valor de "θ", siendo "o" centro de la circunferencia. Dar la respuesta en función de "a" y "b".



A) 180° - a + b B) 180° + (a - b)
C) 180° - (a + b) D) 180° - b + a
E) N.A.

Problema 13 : En la figura: $\overleftrightarrow{CF}$ es tangente: $m\angle BCF = 50^{\circ}$. Hallar $m\angle ABC$, si $\overset{\frown}{AC} = 4\,\overset{\frown}{DE}$ siendo $\overset{\frown}{AD} = 120^{\circ}$

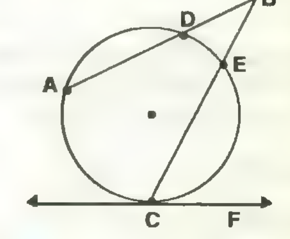
A) 24°

B) 38°

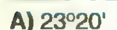
C) 42°

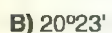
D) 48°

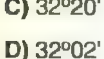
E) N.A.



Problema 14 : Si "o" es el centro de la circunferencia. QC = OA y el arco $\overset{\frown}{AP}$ = 70°, calcular "α".

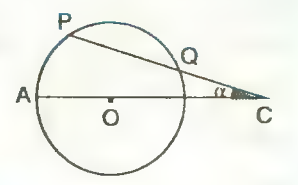

A) 23°20'


B) 20°23'


C) 32°20'

D) 32°02'

E) N.A.



Problema 15 : En la figura $\overset{\frown}{AC} = 120°$. Hallar: "x + y"

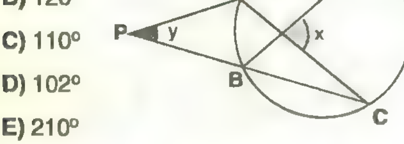
A) 130°

B) 120°

C) 110°

D) 102°

E) 210°



Problema 16 : En la figura: $\overline{AB}$ y $\overline{AF}$ son tangentes: $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{DF}$ y m$\widehat{BAF} = 72°$. Hallar m $\widehat{BFC}$.

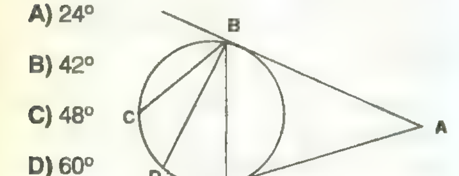
A) 24°

B) 42°

C) 48°

D) 60°

E) 72°



Problema 17 : En la figura, calcular m∠CBD, si CE y DE son tangentes: (C y D son puntos de tangencia).

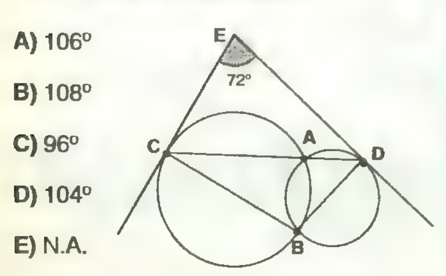
A) 106°

B) 108°

C) 96°

D) 104°

E) N.A.



Problema 18 : Si la m$\overset{\frown}{QBP} = 200°$. Calcular: "x"

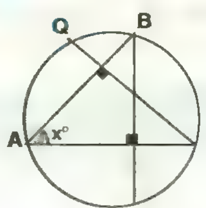
A) 50°

B) 40°

C) 60°

D) 30°

E) 45°



Problema 19 : En la figura $\hat{A} = 50°$, $\overset{\frown}{DC} = 104°$. Hallar $\hat{C}$.

A) 37°

B) 39°

C) 42°

D) 45°

E) 35°

Problema 20 : En la figura: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ED}$ y $\widehat{ACE} = 20°$. Hallar $\overset{\frown}{BD}$.

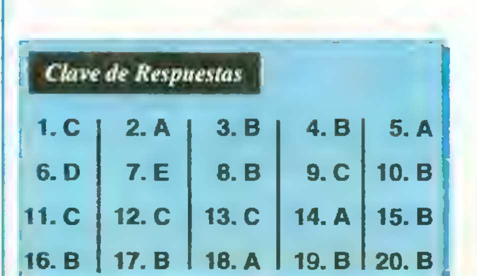
A) 100°

B) 60°

C) 40°

D) 80°

E) 90°



Clave de Respuestas

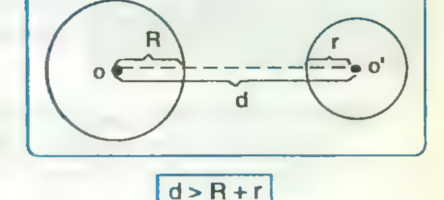
1. C	2. A	3. B	4. B	5. A
6. D	7. E	8. B	9. C	10. B
11. C	12. C	13. C	14. A	15. B
16. B	17. B	18. A	19. B	20. B

5. POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dos circunferencias en un plano pueden ocupar una respecto a la otra siete posiciones diferentes. Estas son:

1. **Circunferencias exteriores.-** Dos circunferencias son exteriores cuando los puntos de cada uno son exteriores a la otra.

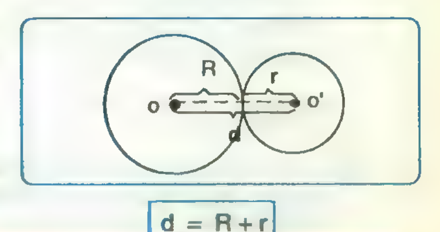
   La distancia (d) entre los centros de las dos circunferencias es mayor que la suma de los radios.



$d > R + r$

2. **Circunferencia tangentes exteriores.-** Dos circunferencias son tangentes exteriores, cuando tienen un punto común (punto de tangencia)

   La distancia (d) entre los centros de las dos circunferencias es igual a la suma de sus radios.



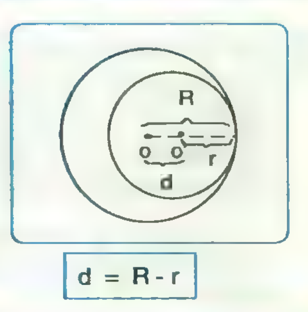
$d = R + r$

¡ATENCIÓN!

PROPIEDAD: *Cuando dos circunferneicas son tangentes exteriores, el segmento que une los centros* ***pasa por el punto de tangencia.***

3. **Circunferencia tangentes interiores.-** Dos circunferencias son tangentes interiores, cuando tienen un punto común (Punto de tangencia) siendo los demás puntos de una de ellas interiores de la otra.

   La distancia (d) entre los centros de las dos circunferencias es igual a la diferencia de sus radios.



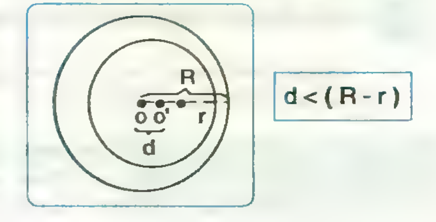
$d = R - r$

¡ATENCIÓN!

PROPIEDAD: *Cuando dos circunferencias son tangentes interiores, la prolongación del segmento que une los centros* ***pasa por el punto de tangencia*** *de ambas circunferencias.*

4. Circunferencias interiores.- Dos circunferencias son interiores cuando una de ellas está en el interior de la otra.

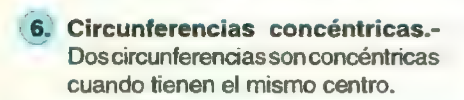
La distancia entre sus centros es menor que la diferencia de sus radios.

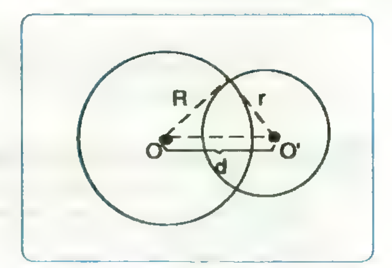


5. Circunferencias secantes.- Dos circunferencias son secantes cuando tienen dos puntos comunes.

La distancia entre los centros es menor que la suma de los radios, pero mayor que su diferencia.

$$(R - r) < d < (R + r)$$

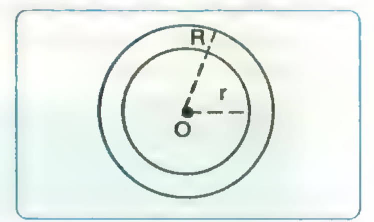




6. Circunferencias concéntricas.- Dos circunferencias son concéntricas cuando tienen el mismo centro.

La distancia entre los centros es cero.

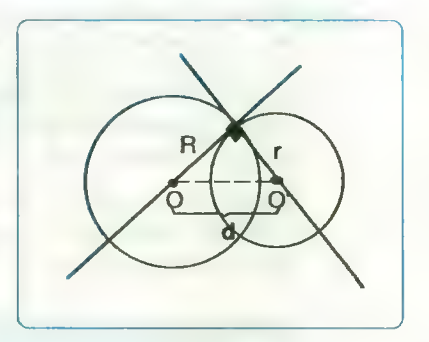
$$d = 0$$



7. Circunferencias ortogonales.- Dos circunferencias son ortogonales cuando dichas circunferencias se intersectan y sus tangentes también se intersectan y en el mismo punto formando un ángulo recto.

Las tangentes al intersectarse pasan por los centros de las circunferencias.

$$d^2 = R^2 + r^2$$



6. RELACIONES MÉTRICA EN LA CIRCUNFERENCIA

A continuación daremos a conocer los principales teoremas que nos relacionan a las longitudes de los elementos básicos de una circunferencia como son la cuerda, la secante, la tangente, etc.

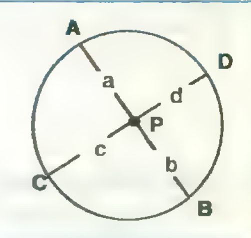
1. **Teorema de las Cuerdas.-** En una misma circunferencia si dos cuerdas se cortan se cumple que: "el producto de las pates de la primera cuerda es igual al producto de las partes de la segunda".

Si: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en P, determinan los segmentos:

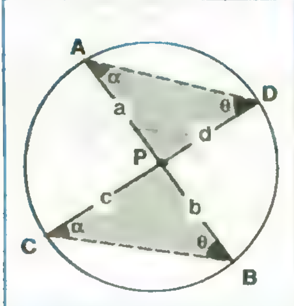
En $\overline{AB}$: AP = a ; PB = b

En $\overline{CD}$: CP = c ; PD = d

Luego se cumple que: a.b = c.d



Demostración:



Afirmaciones	Razones
1. Trazamos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$	1. Trazo auxiliar.
2. $m\angle A = m\angle C = \alpha$ $m\angle D = m\angle B = \theta$	2. Corolario nº 1 del Teorema del ángulo inscrito.
3. $\Delta PAD \sim \Delta PCB$ $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ $\therefore$ ab = cd	3. Caso A - A y aplicación de la semejanza de triángulos.

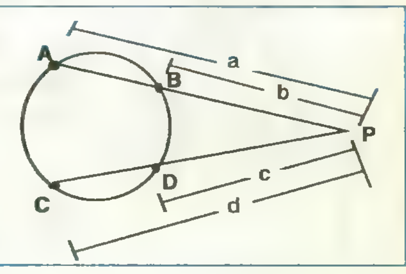
2. **Teorema de las Secantes.-** Si desde un punto exterior se trazan dos secantes a una misma circunferencia se cumple que: "la primera secante por su parte externa es igual a la segunda, también por su parte externa"

En la figura: se han trazado desde P, las secantes PA y PC:

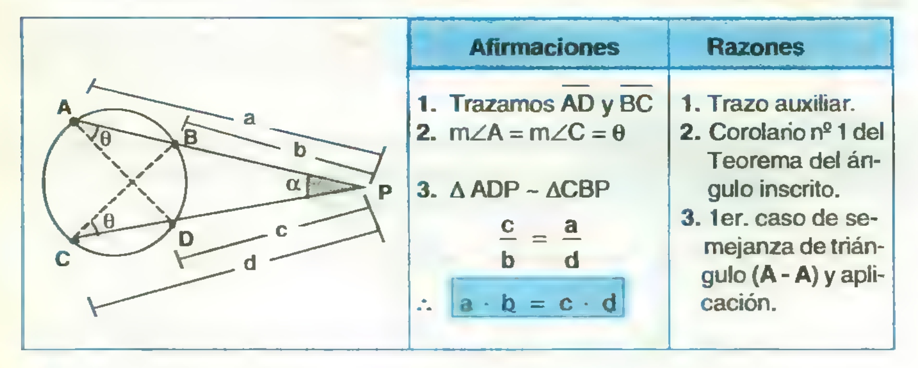
PA = a ; PB = b

PC = d ; PD = c

Se cumple que: a.b = c.d

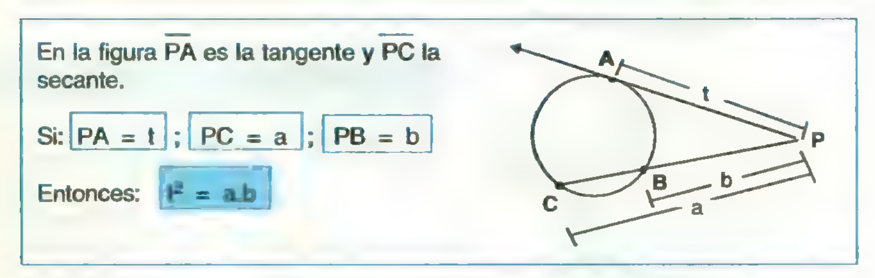


Demostración:



Afirmaciones	Razones
1. Trazamos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$	**1.** Trazo auxiliar.
2. $m\angle A = m\angle C = \theta$	**2.** Corolario nº 1 del Teorema del ángulo inscrito.
3. $\Delta ADP \sim \Delta CBP$ $\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{d}$ $\therefore\ \boxed{a \cdot b = c \cdot d}$	**3.** 1er. caso de semejanza de triángulo (**A - A**) y aplicación.

3. **Teorema de la Tangente y Secante.-** Si desde un punto exterior se trazan una tangente y una secante a una misma circunferencia se cumple que: "la tangente al cuadrado es igual a la secante por su parte externa".

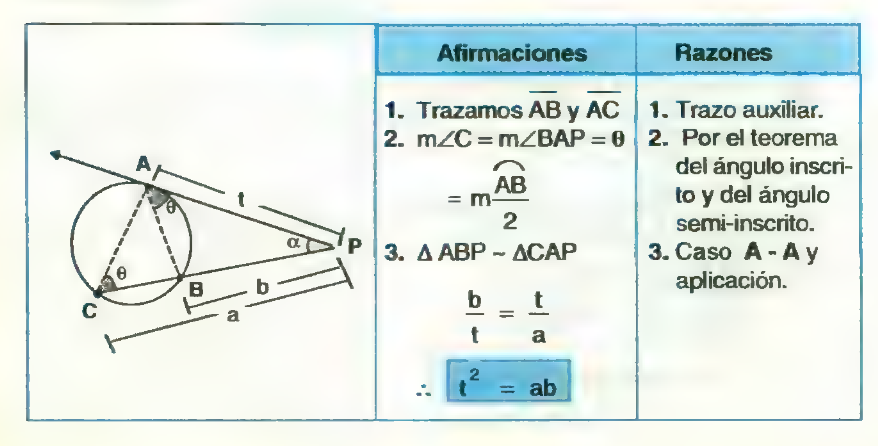


En la figura $\overline{PA}$ es la tangente y $\overline{PC}$ la secante.

Si: $\boxed{PA = t}$; $\boxed{PC = a}$; $\boxed{PB = b}$

Entonces: $\boxed{t^2 = a.b}$

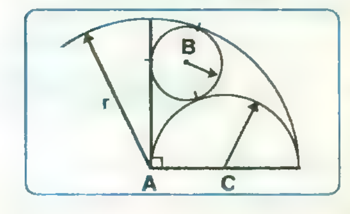
Demostración:



Afirmaciones	Razones
1. Trazamos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$	**1.** Trazo auxiliar.
2. $m\angle C = m\angle BAP = \theta$ $= m\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$	**2.** Por el teorema del ángulo inscrito y del ángulo semi-inscrito.
3. $\Delta ABP \sim \Delta CAP$ $\dfrac{b}{t} = \dfrac{t}{a}$ $\therefore\ \boxed{t^2 = ab}$	**3.** Caso **A - A** y aplicación.

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M. SOBRE RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

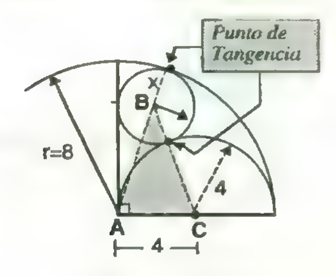
Problema 1. Calcular el perímetro del triángulo ABC. Si: r = 8



A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

Resolución:

- Se deduce que el radio de la semicircunferencia es 4. Sea "x" el radio de la circunferencia de centro "B".

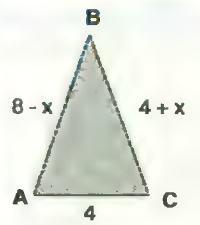


Recuerda Que:

Cuando dos circunferencias son tangentes (exteriores o interiores), la línea que pasa por los centros, pasa también por el punto de tangencia de ambas circunferencias.

- En el Δ ABC, se deduce que:

$AB = 8 - x$ y $BC = 4 + x$



Perímetro $\Delta ABC = 4 + (8 - x) + (4 + x)$

$\therefore$ Perímetro $\Delta ABC = 16$ **Rpta. C**

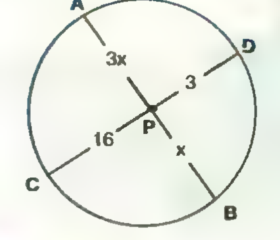
Problema 2 : Los segmentos de una de dos cuerdas que se cortan miden 16 cm y 3 cm. Hallar la medida de los segmentos en que se divide la otra cuerda, sabiendo que uno es el triple del otro.

A) 6 cm y 2 cm B) 9 cm y 3 cm C) 12 cm y 4 cm
D) 15 cm y 5 cm E) 18 cm y 6 cm.

Resolución:

- Sea $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ los segmentos pedidos

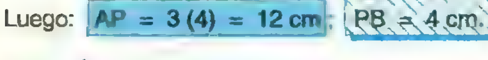
$AP = 3x$; $PB = x$



- Por el Teorema de las cuerdas:

$$\not{3}x \cdot x = 16\,(\not{3})$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$



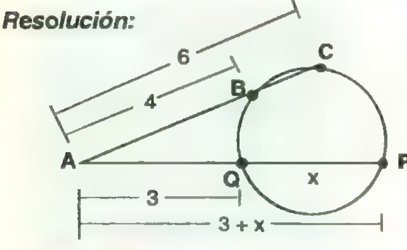
- Luego: $AP = 3(4) = 12$ cm ; $PB = 4$ cm. **Rpta. C**

Problema 3: En la figura:

AB = 4, BC = 2, AQ = 3, hallar QP.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:



- Sea: $QP = x$

- Por el Teorema de las secantes

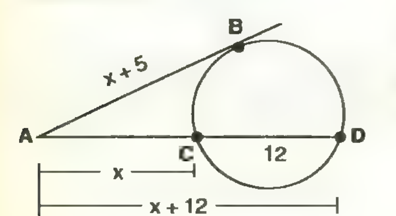
$$(3 + x) \cdot \not{3} = \not{6}\,(4)$$
$$3 + x = 8$$

$\therefore$ $x = 5$ **Rpta. D**

Problema 4: Si: CD = 12, AB = AC + 5
Calcular "AC"

A) 12,5 B) 13 C) 6,5
D) 18,5 E) 14

Resolución:



- Sea: $AC = x$ $\Rightarrow$ por dato: $AB = x + 5$

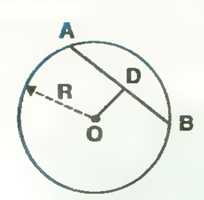
- Por el Teorema de la tangente y secante:

$$(x + 5)^2 = (x + 12) \cdot x$$
$$\not{x^2} + 10x + 25 = \not{x^2} + 12x$$
$$10x + 25 = 12x$$

$\therefore$ $x = 12{,}5$ **Rpta. A**

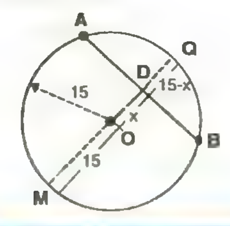
Problema 5 : Calcular "OD" si:

AD . DB = 200, y R = 15



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución:



Recuerda Que:

Diferencia de Cuadrados:

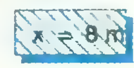
$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

- Sea: $\boxed{OD = x}$
- Para aplicar el Teorema de las cuerdas, trazamos el diámetro MQ prolongando $\overline{OD}$ en ambos sentidos.

$$\underbrace{MD}\,.\,\underbrace{DQ} = \underbrace{AD\,.\,DB}$$

$$(15 + x)(15 - x) = 200$$

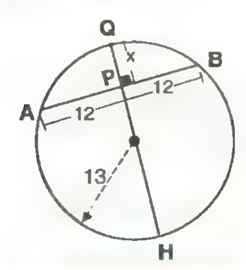
$$15^2 - x^2 = 200$$

$\therefore$  $x = 5$ **Rpta. C**

Problema 6 : En una circunferencia de 13 m de radio calcular la longitud de la flecha correspondiente a una cuerda de 24m.

A) 7 m B) 8 m C) 9 m D) 10 m E) 11 m

Resolución:



Recuerda Que:

Para encontrar la flecha, se debe trazar el radio perpendicular a la cuerda, que dividirá a dicha cuerda en dos partes iguales.

- Sea $\overline{AB}$ la cuerda que mide 24 m y $\overline{PQ}$ la flecha pedida.

Si: $\boxed{PQ = x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{HP = 26 - x}$

- Por el Teorema de las cuerdas.

$$HP\,.\,PQ = AP\,.\,PB$$

$$\Rightarrow (26 - x)\,x = 12\,(12)$$

$$26x - x^2 = 144$$

$$x^2 - 26x + 144 = 0$$

$$(x - 8)(x - 18) = 0$$

i) $\boxed{x = 8}$ ii) $\boxed{x = 18}$

- Como la flecha es menor que el radio la respuesta sería:

$\boxed{x = 8\text{ m}}$ **Rpta. B**

Problema 7: La distancia mínima entre dos circunferencias exteriores es 8 m. y la máxima es 20 m. Calcular la distancia entre sus centros.

A) 10 m B) 11 m C) 12 m D) 13 m E) 14 m

Resolución:

- Del gráfico la distancia pedida es:

  $d = R + r + 8$ .. (1)

- Del gráfico vemos también que:

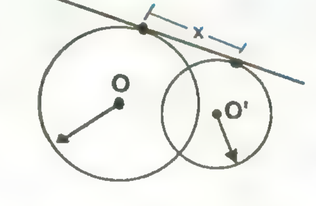
  $d_{máx} = d_{min} + 2R + 2r$

  $20 = 8 + 2R + 2r$

  $R + r = 6$ .. (2)

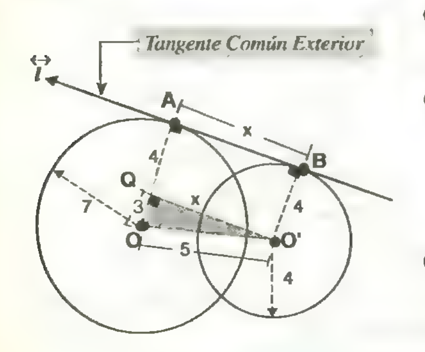
- Reemplazando (2) en (1): $d = 6 + 8$ ➡ ∴ $d = 14$ m **Rpta. E**

Problema 8: La figura muestra a dos circunferencias secantes de radios 7 y 4 metros respectivamente. La distancia entre los centros es 5 m. Hallar x.



A) 2 m B) 3 m C) 4 m
D) 5 m E) 6 m

Resolución:



- En este tipo de problema se debe de formar un triángulo rectángulo donde la incógnita sea uno de sus lados.
- Llevamos los radios a los puntos de tangencia A y B, luego por propiedad.

  $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{l}$ y $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{l}$, en seguida trazamos

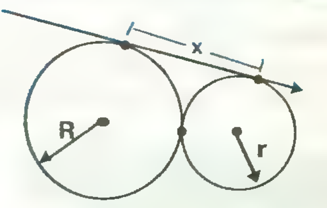
  $\overline{O'Q} \perp \overline{OA} \Rightarrow O'Q = AB = x$

- En el ◺ OQO' por el teorema de Pitágoras:

  $3^2 + x^2 = 5^2$

  ∴ $x = 4$ m **Rpta. C**

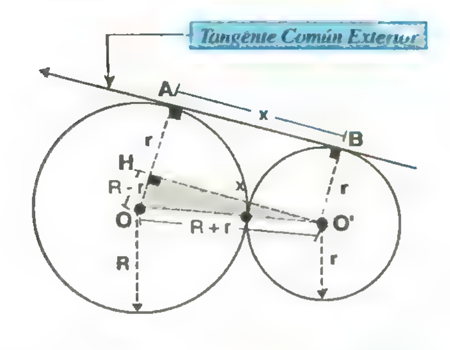
Problema **:** Hallar x si: R = 9 y r = 4



A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

Resolución:



- De manera similar al problema anterior, se debe de formar un triángulo rectángulo.

- En el ◺OHO', por el teorema de Pitágoras:

$$(R - r)^2 + x^2 = (R + r)^2$$

$$\cancel{R^2} - 2Rr + \cancel{r^2} + x^2 = \cancel{R^2} + 2Rr + \cancel{r^2}$$

$$x^2 = 4Rr$$

$$\boxed{x = 2\sqrt{Rr}} \text{ ... (1)}$$

- Reemplazando los datos $\boxed{R = 9}$ y $\boxed{r = 4}$ en la expresión (1), obtenemos:

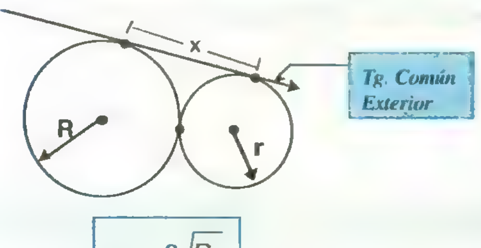
$$x = 2\sqrt{9\ (4)} \quad \Rightarrow$$

Rpta. C.

Nota: En este problema lo que se ha obtenido en la expresión (1) en realidad es un teorema muy importante que lo enunciaremos a continuación.

Teorema de la Tangente Común exterior a dos circunferencias tangentes exteriores.

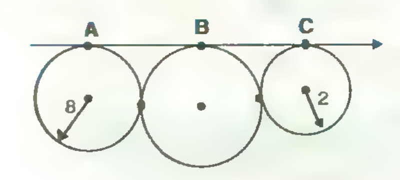
Si dos circunferencias son tangentes exteriores, la longitud del segmento de tangente común exterior es igual al doble de la raíz cuadrada del producto de los radios.



x: longitud del segmento de tangente común exterior.

$$\boxed{x = 2\sqrt{Rr}}$$

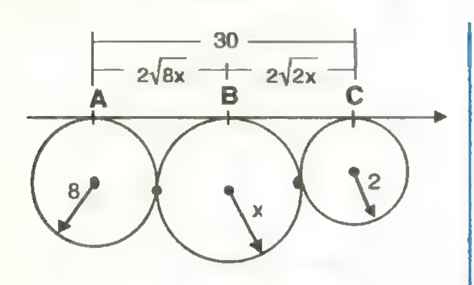
Problema 10 : A, B y C son puntos de tangencia. Si AC = 30, hallar el radio de la circunferencia que ocupa la posición intermedia.



A) 9 **B)** 10 **C)** 12,5
D) 13 **E)** 9,5

Resolución:

- Sea "x" el radio pedido
- Del gráfico, según el teorema anterior. $AB = 2\sqrt{8x}$; $BC = 2\sqrt{2x}$



- Del gráfico vemos que:

$$AB + BC = AC$$

$$2\sqrt{8x} + 2\sqrt{2x} = 30$$

$$4\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x} = 30 \Rightarrow 6\sqrt{2x} = 30$$

$$\sqrt{2x} = 5$$

Elevando al cuadrado: $\left(\sqrt{2x}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow 2x = 25 \Rightarrow \therefore$ $x = 12,5$ **Rpta. C**

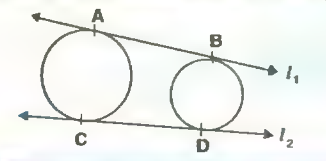
Problema 11 : La distancia entre los centros de dos circunferencias exteriores es 15 cm. Los radios son de 4 y 5 cm. respectivamente. Calcular la longitud del segmento de tangente común interior comprendida entre los puntos de tangencia.

A) 11 cm **B)** 12 cm **C)** 10 cm **D)** 9 cm **E)** 13 cm

Resolución:

TANGENTES COMUNES

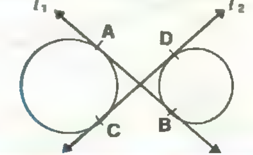
A. Tangentes Comunes Exteriores ($\overleftrightarrow{l_1}$ y $\overleftrightarrow{l_2}$)



$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$: Segmento de tangente común exterior

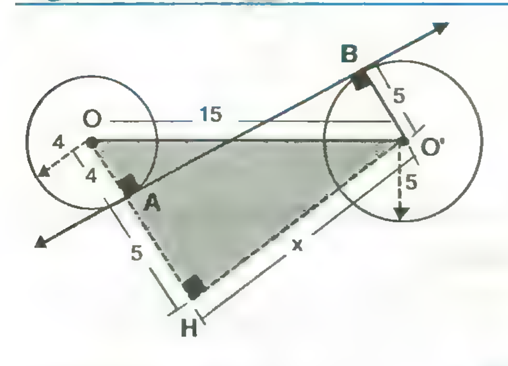
Propiedad: AB = CD

B. Tangentes Comunes interiores ($\overleftrightarrow{l_1}$ y $\overleftrightarrow{l_2}$)



$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$: Segmento de tangente común interior

Propiedad: AB = CD



- Debemos de calcular: $AB = x$
- Tratando de formar un triángulo rectángulo, llevamos los lados a los puntos de tangencia.
- En el rectángulo ABO'H:

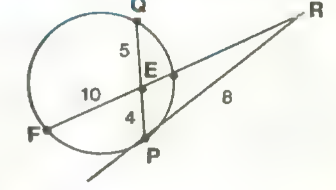
$$HO' = AB = x$$

- En el ◺ OHO' por Pitágoras:

$$OH^2 + HO'^2 = OO'^2$$

Reemplazando: $9^2 + x^2 = 15^2$ ➡ ∴ $x = 12\ cm$ **Rpta. B**

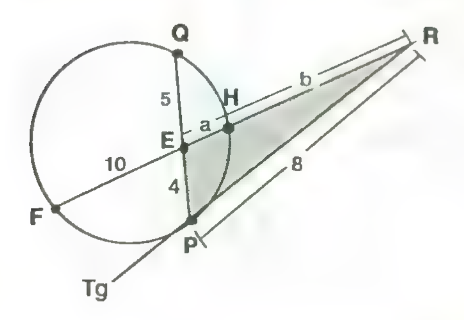
Problema 12: Si: FE = 10, QE = 5; EP = 4, PR = 8, Calcular el perímetro del triángulo PER.



A) 18 B) 17 C) 16

D) 15 E) 21

Resolución:



- Sea: EH = a y HR = b, entonces

Perímetro del ΔPER = 12 + a + b .. (1)

- Debemos de hallar a y b
  - Por el Teorema de las cuerdas:

$$10a = 5\,(4) \Rightarrow a = 2 \quad ..(2)$$

  - Por el teorema de la tg. y sec.

$$PR^2 = FR \cdot HR$$

$$➡ 8^2 = (10 + a + b) \cdot b$$

Pero: $a = 2$ ➡ $64 = (12 + b) \cdot b$,

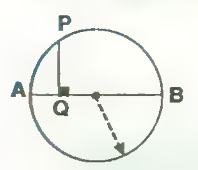
resolviendo $b = 4$ .. (3)

- Reemplazamos (2) y (3) en (1): Perímetro del ΔPER = 18 **Rpta. A**

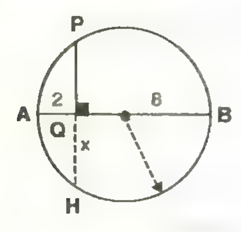
Problema 13: Si: AB es diámetro, hallar PQ; AQ = 2, QB = 8

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6



Resolución:



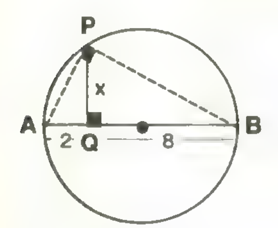
Este problema se puede resolver por varios métodos:

1er. Método:

- Como todo diámetro perpendicular a una cuerda lo divide en dos partes iguales, entonces:

$$PQ = QH = x$$

- Por el Teorema de las cuerdas: $x \cdot x = 2\,(8)$ ➡ $x^2 = 16$ ➡ $\therefore$ $x = 4$ **Rpta. C**



2do Método.

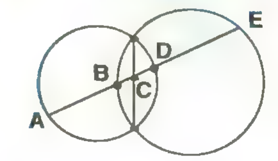
- Aprovechando que $\overline{AB}$ es diámetro trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, entonces el ΔAPB, resulta ser triángulo rectángulo.
- En el ⊿ APB, por relaciones métricas.

$$PQ^2 = AQ \cdot QB$$
$$x^2 = (2)\ (8)$$

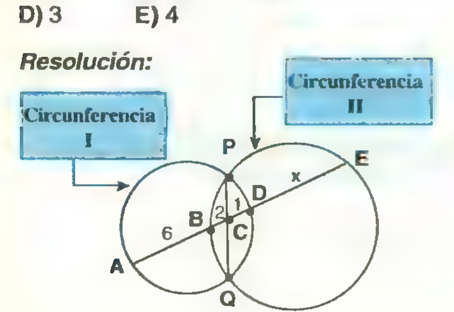
$\therefore$ $x = 4$ **Rpta. C**

Problema 14: Si: AB = 6 , BC = 2, CD = 1, calcular "DE".

A) 9 B) 2 C) 7
D) 3 E) 4



Resolución:



- Por el Teorema de las cuerdas:

- En la circunferencia I

$$PC \cdot CQ = AC \cdot CD$$

➡ $\boxed{PC \cdot CQ = (8)\,(1)}$ .. (1)

- En la circunferencia II

$$PC \cdot CQ = BC \cdot CE$$

$$PC \cdot CQ = (2)(1 + x) \quad .. (2)$$

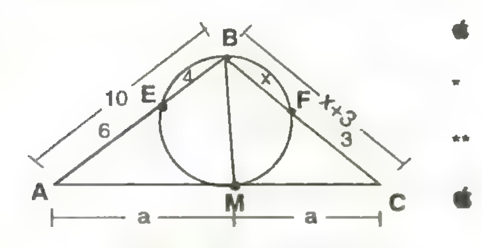
. De (1) y (2):

$(8)(1) = (2)(1 + x) \Rightarrow$ $\boxed{x = 3}$ **Rpta. D**

Problema 15 : Siendo $\overline{BM}$ mediana del triángulo ABC, AE = 6, EB = 4, FC = 3 y "M" punto de tangencia, hallar "BF".

A) 12 B) 15 C) 17
D) 19 E) 20

Resolución:



- Por el teorema de la Tg. y Sec:

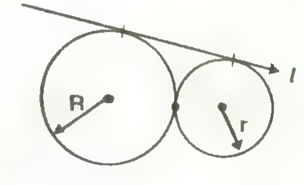
* $AM^2 = AE \cdot AB \Rightarrow$ $\boxed{a^2 = 6(10)}$ .. (1)

** $CM^2 = CF \cdot CB \Rightarrow$ $\boxed{a^2 = 3(x + 3)}$ .. (2)

- De (1) y (2)

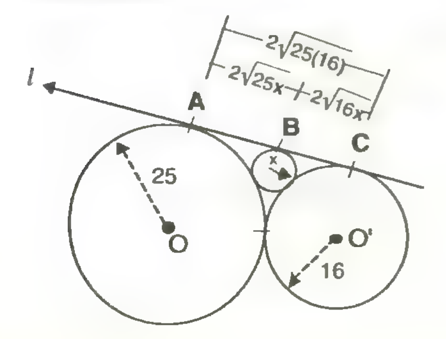
$3(x + 3) = 6(10) \Rightarrow$ $\boxed{x = 17}$ **Rpta. C**

Problema 16 : Si: R = 25, r = 16, calcular el radio de una circunferencia que es tangente a las dos circunferencias mostradas y a la recta "l".



A) 20/9 B) 40/13 C) 400/81
D) 300/81 E) 25/6

Resolución:



- Sea "x" el radio pedido.
- Por el Teorema de la tangente común exterior a dos circunferencias tangentes exteriores:

$$AB = 2\sqrt{25x}$$

$$BC = 2\sqrt{16x}$$

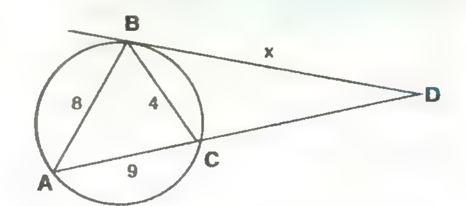
$$AC = 2\sqrt{25(16)}$$

- Del gráfico: AB + BC = AC

$$\cancel{2}\sqrt{25x} + \cancel{2}\sqrt{16x} = 2\sqrt{25(16)} \Rightarrow 5\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 20 \Rightarrow 9\sqrt{x} = 20$$

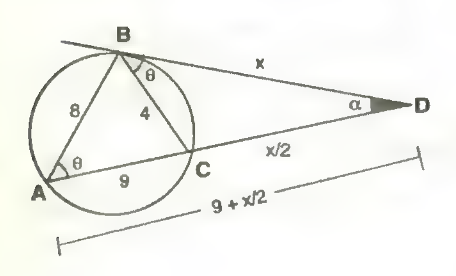
$$\sqrt{x} = \frac{20}{9} \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\frac{20}{9}\right)^2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{400}{81}}$$ **Rpta. C**

Problema 17 : En la figura AB = 8; BC = 4 ; AC = 9, calcular "BD".



A) 6 B) 9 C) 5
D) 8 E) 12

Resolución:



- Por ángulo inscrito:

$$m\angle A = \frac{m\overset{\frown}{BC}}{2} \quad \dots (1)$$

- Por ángulo semi-inscrito:

$$m\angle CBD = \frac{m\overset{\frown}{BC}}{2} \quad \dots (2)$$

. De (1) y (2) : $\boxed{m\angle A = m\angle CBD = \theta}$

- Luego $\triangle$ BCD ~ $\triangle$ ABD (caso **A - A**)

$$\frac{CD}{x} = \frac{4}{8} \Rightarrow \boxed{CD = \frac{x}{2}} \Rightarrow \boxed{AD = 9 + \frac{x}{2}}$$

- Finalmente por el Teorema de la Tg. y Sec:

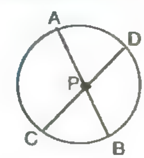
$$DB^2 = DC \cdot DA \Rightarrow x^2 = \frac{x}{2}\left(9 + \frac{x}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(9 + \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \therefore \boxed{x = 6}$$ **Rpta. A**

TALLER DE PROBLEMAS Nº 33

Problema 1 : Calcular AB si:

AP = x
PB = x + 4
CP = x + 2
PD = x + 1

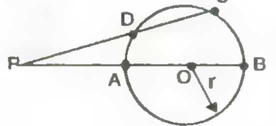


Resolución:

Rpta. AB = 8

Problema 2 : En la figura mostrada hallar el radio "r" si:

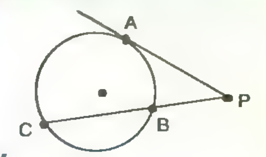
DC = 7
PC = 12
PA = 2



Resolución:

Rpta. r = 14

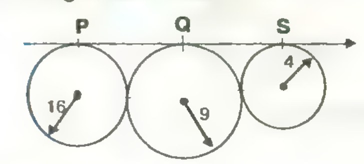
Problema 3 : En la figura: PB = 5 m.; BC = 3PB, hallar "PA"



Resolución:

Rpta. PA = 10 m

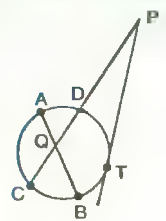
Problema 4 : Si: P, Q, S, son puntos de tangencias, calcular "PS"



Resolución:

Rpta. PS = 36

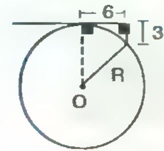
Problema 5: Si: AQ = 6, QB = 2, PD = 9, DQ = 4, hallar "PT"



Resolución:

Rpta. PT = 12

Problema 7: De la figura, hallar el radio "R"

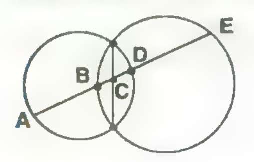


Resolución:

Rpta. R = 7,5

Problema 6: Hallar "DE" si:

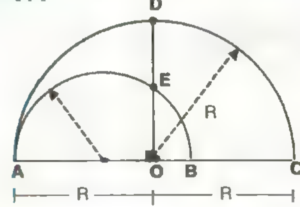
AB = 16, BC = 1, CD = 2



Resolución:

Rpta. DE = 32

Problema 8: Si: $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son diámetros, DE = 3, BC = 4, AO= OC = R. Hallar "R".



Resolución:

Rpta. R = 4,5

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

NIVEL I

Problema 1 : En una circunferencia de 5 m. de radio, hallar la distancia del centro a una cuerda que mide 8 m.

A) 1 m **B)** 2 m **C)** 3 m **D)** 4 m **E)** 5 m

Problema 2 : En la figura: PB = 2AB, AB - BC = 1, si BQ =3, hallar "BC"

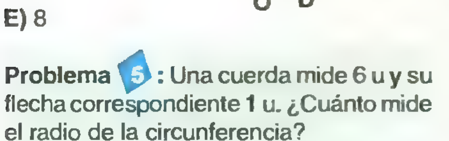
A) 6
B) 5
C) 4
D) 7
E) 8

Problema 3 : Una cuerda de 24 m. de longitud se encuentra a 5 m. del centro de la circunferencia. Calcular el diámetro de dicha circunferencia.

A) 17 m **B)** 40 m **C)** 32 m **D)** 26 m **E)** 24 m

Problema 4 : Calcular "CD" si AD = 9, y DB = 4

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8



Problema 5 : Una cuerda mide 6 u y su flecha correspondiente 1 u. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

A) 4 u. **B)** 5 u. **C)** 6 u. **D)** 7 u. **E)** 8 u.

Problema 6 : En la figura: PM = 12, PA = 8, hallar AB

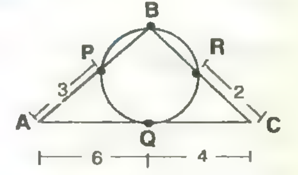
A) 14
B) 12
C) 8
D) 9
E) 10

Problema 7 : Calcular "AB" si: BC = 3, CD = 5, DE = 4.

A) 6
B) 8
C) 11
D) 12
E) 10

Problema 8 : Calcular el perímetro del triángulo ABC.

A) 28
B) 30
C) 32
D) 34
E) 26

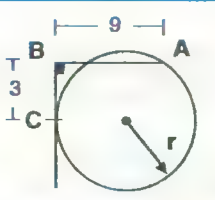


Problema 9 : Calcular "r"

A) 5/2
B) 30/7
C) 6
D) 5
E) 25/4

Problema 10 : Calcular "r"

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



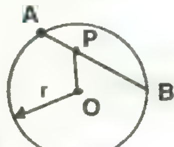
Clave de Respuestas

1. C	2. A	3. D	4. C	5. B
6. E	7. D	8. B	9. E	10. D

NIVEL II

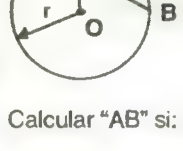
Problema 1: Calcular PA . PB si: OP = 3, r = 5, "O" es centro.

A) 16
B) 15
C) 14
D) 12
E) 9



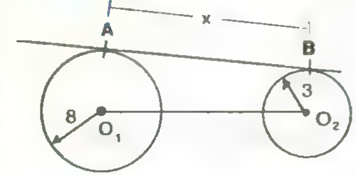
Problema 2: Calcular "AB" si: BC = 5, CD = 15.

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12



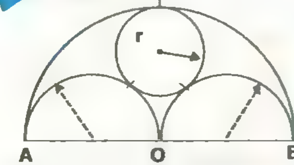
Problema 3: Hallar "x" si: $O_1O_2 = 13$

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15



Problema 4: Hallar "r"

A) 0,5
B) 1
C) 2
D) 2,5
E) 3



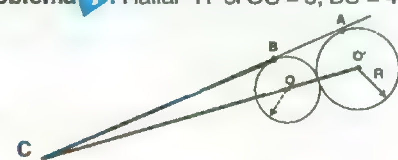
Problema 5: Dados dos circunferencias concéntricas. Si una cuerda de la mayor, de 24 cm. de longitud es tangente a la menor cuyo radio es de 5 cm. ¿Cuánto es la diferencia de sus diámetros?

A) 8 cm B) 10 cm C) 12 cm
D) 14 cm E) 16 cm

Problema 6: La flecha correspondiente a una cuerda de 24 cm. mide 8 cm. Hallar el radio de la circunferencia.

A) 11 cm B) 12 cm C) 13 cm
D) 14 cm E) 15 cm

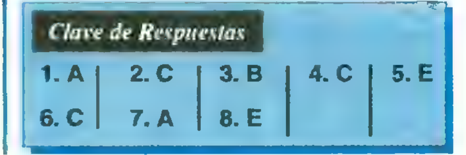
Problema 7: Hallar "R" si OC = 5; BC = 4



A) 12 B) 9 C) 6 D) 5 E) 4

Problema 8: Un diámetro de una circunferencia mide 13 m. Hallar la longitud de la flecha (en metros) que corresponde a una cuerda de 5 m.

A) 1/6 B) 1/5 C) 1/4 D) 1/3 E) 1/2



Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. B	4. C	5. E
6. C	7. A	8. E		

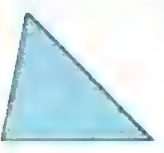
Capítulo 8
Área de Regiones Poligonales

8.1 DEFINICIONES PREVIAS

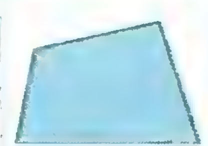
8.1.1 REGIÓN POLIGONAL

Se llama así a la reunión de un polígono con su interior.

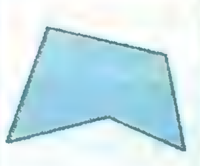
Ejemplos:



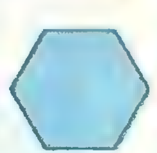
Región Triangular



Región Cuadrangular



Región Pentagonal



Región Exagonal

8.1.2 ÁREA

Es la medida de la extensión de una región poligonal. Se expresa en unidades cuadradas: m^2, cm^2, km^2, etc.

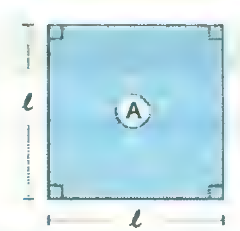
OBSERVACIÓN:

Generalmente para abreviar se dice área de un triángulo, área de un cuadrilátero, etc., entendiéndose desde luego que se refiere al área de la región correspondiente.

8.2 POSTULADOS Y TEOREMAS FUNDAMENTALES

POSTULADO DEL ÁREA DE UN CUADRADO

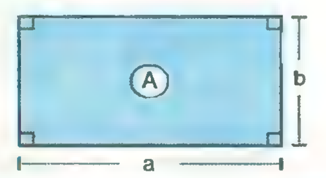
El área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de su lado.



Área □ = ℓ^2

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁREA DE UN RECTÁNGULO

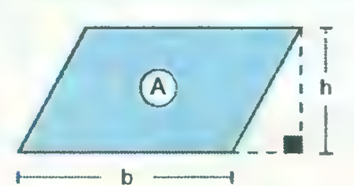
El área de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones (largo por ancho)



Área ▭ = $a \cdot b$

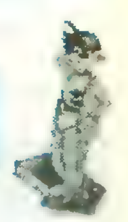
TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁREA DE UN ROMBOIDE O PARALELOGRAMO

El área de un romboide es igual al producto de su base por la altura.



Área ▱ = $b \cdot h$

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M APLICANDO LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES



Problema 1 : El perímetro de un rectángulo es de 84 m y su diagonal mide 30 m. El área del rectángulo es de:

A) 432 m^2 **B)** 324 m^2 **C)** 128 m^2 **D)** 246 m^2 **E)** 328 m^2

Resolución:

- Sabemos que:

Perímetro ▭ = 2 (b + h)

84 = 2 (b + h)

$$42 = (b + h) \quad \text{......❶}$$

(Figura: rectángulo ABCD con lados b y h, diagonal d = 30 m)

- En el ◺ADC: por el teorema de Pitágoras:

$$AD^2 + DC^2 = AC^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + h^2 = 30^2 \quad \text{.....❷}$$

- A los dos miembros de la ecuación ❶ los elevamos al cuadrado:

$$(42)^2 = (b + h)^2 \quad \Rightarrow \quad (42)^2 = b^2 + 2\,bh + h^2$$

$$(42)^2 = b^2 + h^2 + 2\,hb \quad \text{......❸}$$

Reemplazamos ❶ en ❷

$$(42)^2 = (30)^2 + 2\,bh$$

$$(42)^2 - (30)^2 = 2\,bh$$

$$(42 + 30)(42 - 30) = 2\,bh$$

Recuerda que:

❶ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

❷ $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

$(72)(\cancel{12}) = \cancel{2}bh \Rightarrow (72)(6) = bh \Rightarrow \therefore$ $\boxed{bh = 432}$ ......❶

Luego:

$$\text{Área}\square = \text{base} \times \text{altura}$$

$$\boxed{\text{Área}\square = b \times h} \quad ......❷$$

Reemplazamos ❶ en ❷

$$\therefore \quad \boxed{\text{área} = 432\ m^2}$$

El área del rectángulo es de 432 m^2 ***Rpta. A***

Problema 2 : El área de un rectángulo es de 128 m^2; si a su base se le disminuye 2 m y a su altura se le aumenta 2 m; entonces su área aumenta en 12 m^2. La base del rectángulo inicial mide:

A) 12 m **B)** 14 m **C)** 15 m **D)** 16 m **E)** 17 m

Resolución:

- Sea el rectángulo inicial ABCD; cuya base es "b" y cuya altura es "h"

Sabemos que:

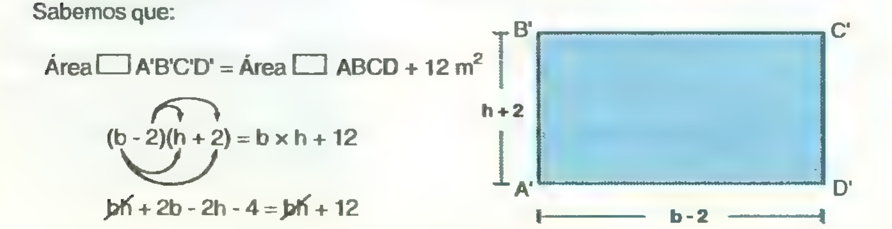
$$\text{Área}\square\ ABCD = b \times h$$

$$\boxed{128 = b \times h} \quad ......❶$$

B C h A D b

- Si la base del rectángulo ABCD, se le disminuye 2 m y a su altura se le aumenta 2 m, entonces su área aumenta en 12 m^2; este nuevo rectángulo le llamamos A'B'C'D' ; veamos:

Sabemos que:



$$\text{Área}\square\ A'B'C'D' = \text{Área}\square\ ABCD + 12\ m^2$$

$$(b - 2)(h + 2) = b \times h + 12$$

$$\cancel{bh} + 2b - 2h - 4 = \cancel{bh} + 12$$

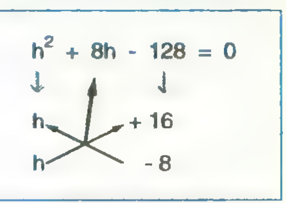
$2b - 2h = 16$; sacamos mitad a cada término.

$b - h = 8 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{b = h + 8}$ ......❷

Reemplazamos ❶ en ❷

$128 = (h + 8) \times h \quad \Rightarrow \quad 128 = h^2 + 8h$

- Factorizamos por el método del aspa: $\Rightarrow$



Luego: $(h + 16)(h - 8) = 0$

Donde:

i) $h + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{h = -16}$

ii) $h - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{h = 8}$

tomamos sólo el valor positivo.

Reemplazamos el valor de $h = 8$; en la ecuación❷

$b = h + 8 \Rightarrow b = 8 + 8 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 16}$

La base del rectángulo inicial mide: b = 16 m ***Rpta. D***

Problema 3: El patio de un colegio tiene 24 m de largo por 16 m de ancho. ¿Cuántas losetas cuadradas de 40 cm de lado serán necesarias para cubrir el piso?.

A) 2400 **B)** 2300 **C)** 2200 **D)** 2100 **E)** 2000

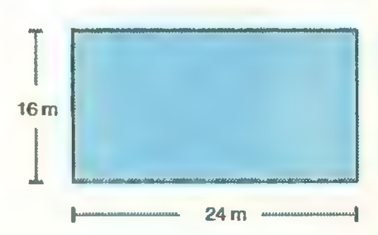
Resolución:

- En primer lugar, hallamos el área del patio.

Área ▭ = largo × ancho

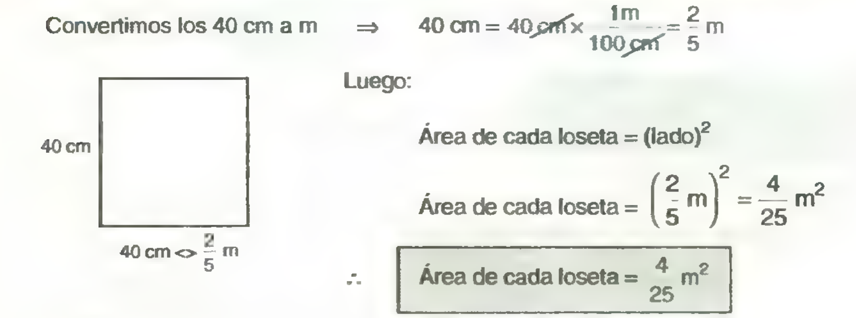
Área del patio = $24\ m \times 16\ m = 384\ m^2$

$\therefore$ $\boxed{\text{Área del patio} = 384\ m^2}$



- En segundo lugar, hallamos el área de cada loseta cuadrada de 40 cm de lado.

Convertimos los 40 cm a m $\Rightarrow$ $40\text{ cm} = 40\cancel{\text{cm}} \times \dfrac{1\text{m}}{100\cancel{\text{cm}}} = \dfrac{2}{5}\text{ m}$



Luego:

$$\text{Área de cada loseta} = (\text{lado})^2$$

$$\text{Área de cada loseta} = \left(\frac{2}{5}\text{ m}\right)^2 = \frac{4}{25}\text{ m}^2$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Área de cada loseta} = \dfrac{4}{25}\text{ m}^2}$

- Ahora, calculamos el número de losetas:

$$\textbf{\# de losetas} = \frac{\textbf{área del patio}}{\textbf{área de cada loseta}} = \frac{384\text{ m}^2}{\left(\frac{4}{25}\right)\text{m}^2}$$

$$\textbf{\# de losetas} = \frac{384 \times 25}{4} = 96 \times 25 = 2\,400$$

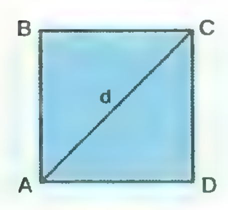
$\therefore$ El número de losetas para cubrir el piso del patio son 2400 ***Rpta. A***

Problema 4: El área de un cuadrado es 144 m^2. El área de otro cuadrado, cuyo lado es igual a 2 veces la diagonal del primero, es de:

A) 1215 m^2 **B)** 1152 m^2 **C)** 1815 m^2 **D)** 1620 m^2 **E)** 288 m^2

Resolución:

- Sea el cuadrado inicial ABCD; cuya diagonal es "d".



Sabemos que:

$$\text{Área} \square \text{ ABCD} = \frac{(\text{Diagonal})^2}{2}$$

$$144 = \frac{d^2}{2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{288 = d^2}$ ....❶

- Sea el segundo cuadrado PQRS, cuyo lado es igual a 2 veces la diagonal del cuadrado ABCD; o sea: L = 2d.

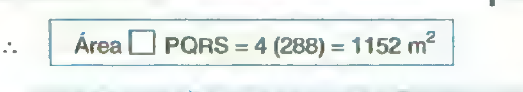
Sabemos que:

$$\text{Área} \square \, PQRS = (\text{lado})^2$$

$$\boxed{\text{Área} \square \, PQRS = (2d)^2 = 4d^2} \quad \ldots. ❷$$

Q R P S L = 2d L = 2d

Reemplazamos ❶ en ❷



$$\therefore \quad \boxed{\text{Área} \square \, PQRS = 4\,(288) = 1152 \text{ m}^2}$$

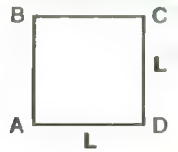
El área del segundo cuadrado es de 1152 m² *Rpta. B*

Problema 5: El área de un cuadrado resulta triplicada si a uno de sus lados se le agrega 4 m. y al otro se le agrega 2 m. La diagonal del cuadrado mide:

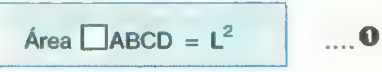
A) $4\sqrt{2}$ m **B)** 2 m **C)** 4 m **D)** $2\sqrt{2}$ m **E)** $6\sqrt{2}$ m

Resolución:

- Sea el cuadrado inicial ABCD; cuyo lado es "L".

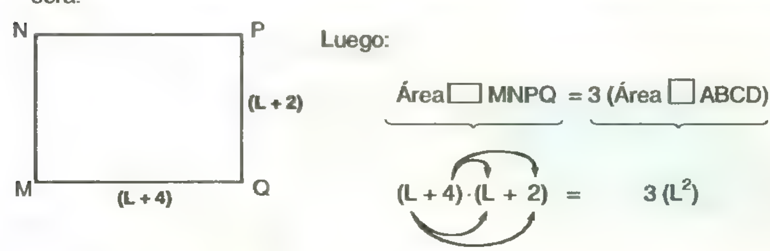


Sabemos que:



$$\boxed{\text{Área} \square \, ABCD = L^2} \quad \ldots. ❶$$

- Si a uno de sus lados de se agrega 4 m y al otro se le agrega 2 m; la nueva figura será:



Luego:

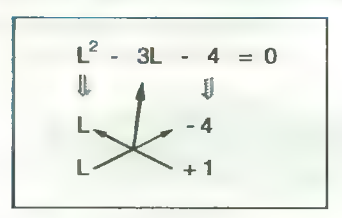
$$\underbrace{\text{Área} \square \, MNPQ}_{} = 3\,\underbrace{(\text{Área} \square \, ABCD)}_{}$$

$$(L + 4)\cdot(L + 2) = 3\,(L^2)$$

$$\Rightarrow \quad L^2 + 6L + 8 = 3L^2$$

$$6L + 8 = 2L^2 \quad ; \quad \text{sacamos mitad de cada término.}$$

$3L + 4 = L^2 \quad \Rightarrow$



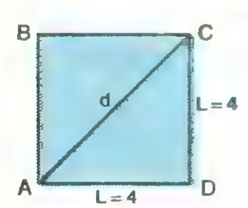
Donde: $(L - 4)(L + 1) = 0$

i) $L - 4 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{L = 4}$

ii) $L + 1 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{L = -1}$

- Sólo se tomará el valor positivo de "L", o sea: $L = 4$

- Ahora, calculamos la diagonal del cuadrado, veamos:
- En el ⊿ADC: por el teorema de Pitágoras:



$AD^2 + DC^2 = AC^2$

$4^2 + 4^2 = d^2 \quad \Rightarrow \quad 2(4)^2 = d^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2(4)^2} = d$

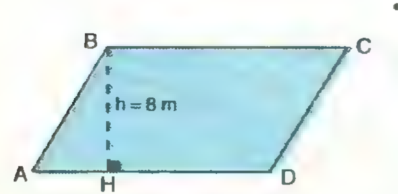
$\sqrt{2}(4) = d \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{d = 4\sqrt{2}\ m}$

La diagonal del cuadrado mide: $4\sqrt{2}$ m **_Rpta. A_**

Problema 6 : El área de un romboide es de 240 m^2; si su altura mide 8 m. ¿Cuánto mide su base?.

A) 20 m **B)** 30 m **C)** 40 m **D)** 50 m **E)** 16 m

Resolución:



- Sabemos que:

Área ▱ABCD $= b \times h$

$240\ m^2 = b \times 8\ m.$

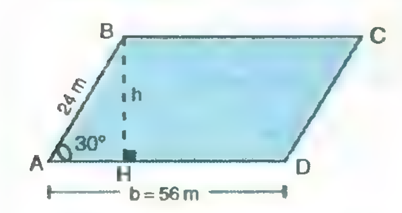
$\dfrac{240\ m^2}{8\ m} = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{30\ m = b}$

La base del romboide mide 30 m. **_Rpta. B_**

Problema 7: Dos lados consecutivos de un paralelogramo miden 56 m. y 24 m. respectivamente. El lado de 24 m ; determina con la base un ángulo de 30°. El área del paralelogramo es:

A) 672 m^2 **B)** 288 m^2 **C)** 324 m^2 **D)** 528 m^2 **E)** 676 m^2

Resolución:



Incógnita: Área ▱ABCD = b × h

$= 56 \times h$ .....❶

- Calculamos "h":

En el ◺ AHB: notable de 30° y 60°

$BH = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow h = \dfrac{24}{2} \quad \therefore \boxed{h = 12}$ .....❷

Recuerda que:

A, B, C, a, 60°, 30°, $\frac{a}{2}$

$BC = \dfrac{AB}{2}$

Reemplazamos el valor de la ecuación ❶ en ❷

Área ▱ABCD = 56 × 12 = 672 m^2

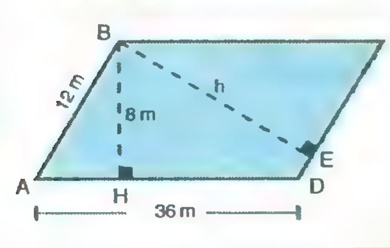
∴ El área del paralelogramo es de 672 m^2

Rpta. A

Problema 8: Los lados de un paralelogramo miden 12 m y 36 m. La menor de las alturas mide 8 m. ¿Cuánto medirá la altura mayor?.

A) 14 m **B)** 20 m **C)** 22 m **D)** 24 m **E)** 26 m

Resolución:



Incógnita: altura mayor: h = ?

- De la figura:

Área ▱ABCD = AD·BH

= 36 m·8 m

∴ Área ▱ABCD = 36 m · 8 m .....❶

- De la figura: AB = CD = 12 m.

Área ▱ABCD = DC · BE = AB · BE

⇒ ∴ Área ▱ ABCD = 12 m · h .....❷

- Igualamos las expresiones ❶ = ❷:

$\cancel{12\,m} \cdot h = \cancel{36\,m} \cdot 8\,m \Rightarrow h = 3 \cdot 8\,m \Rightarrow \therefore \boxed{h = 24\,m}$

La altura mayor del paralelogramo mide: 24 m.

Rpta. D

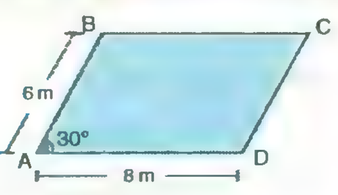
TALLER DE PROBLEMAS Nº 34

Problema 1 : El perímetro de un rectángulo es 60 m. Si el largo es el doble del ancho, el área del rectángulo es:

Resolución:

Rpta. $200\ m^2$

Problema 2 : Calcular el área del romboide ABCD:



Resolución:

Rpta. Área ▱ABCD = $24\ m^2$

Problema 3 : La diagonal de un rectángulo mide 17 cm. calcular su área si su perímetro es de 46 cm.

Resolución:

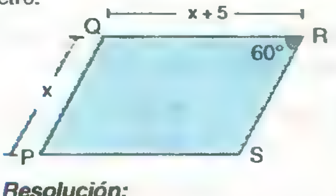
Rpta. $120\ cm^2$

Problema 4 : Calcular el área de un cuadrado cuya diagonal mide $5\sqrt{2}$ m.

Resolución:

Rpta. $25\ m^2$

Problema 5 : El área del paralelogramo PQRS es $12\sqrt{3}\,u^2$. Hallar su perímetro.



Resolución:

Rpta. 22 u

Problema 6 : El área de un terreno rectangular es 100 m^2 y su perímetro es 42 m. Si cada lado se aumenta en 5 m, ¿en cuánto aumenta el área?.

Resolución:

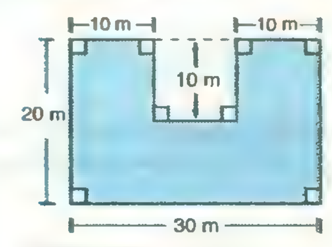
Rpta. 130 m^2

Problema 7 : El área de un cuadrado es 30 m^2. Calcular el área de un segundo cuadrado cuyo lado es igual a la diagonal del primero.

Resolución:

Rpta. 60 m^2

Problema 8. La siguiente figura muestra las dimensiones de un terreno que tiene Manuel en Piura, valorizado en 8 000 soles. El m^2 vale:



Resolución:

Rpta. 16 soles

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁREAS DEL CUADRADO, RECTÁNGULO Y ROMBOIDE

NIVEL I

Problema (1): El perímetro de un cuadrado es 12 m. El área es:

A) $3\ m^2$ **B)** $6\ m^2$ **C)** $9\ m^2$
D) $12\ m^2$ **E)** $15\ m^2$

Problema (2): El largo de un rectángulo excede al ancho en 2 m. Si el perímetro es 16 m, el área del rectángulo es:

A) $15\ m^2$ **B)** $13\ m^2$ **C)** $18\ m^2$
D) $21\ m^2$ **E)** $12\ m^2$

Problema (3): La base de un paralelogramo mide 12 cm y su área es $96\ cm^2$, entonces la altura correspondiente es de:

A) 4 cm **B)** 6 cm **C)** 7 cm
D) 8 cm **E)** 9 cm

Problema (4): Las diagonales de un cuadrado suman 12 m. El área del cuadrado es:

A) $72\ m^2$ **B)** $18\ m^2$ **C)** $36\ m^2$
D) $24\ cm^2$ **E)** $12\ m^2$

Problema (5): El largo de un terreno de forma rectangular mide el triple del ancho. Si el área es $1200\ m^2$, calcular el perímetro.

A) 160 m **B)** 150 m **C)** 80 m
D) 90 m **E)** 120 m

Problema (6): Un cuadrado de $324\ \mu^2$ de área. ¿Cuánto tiene de perímetro?.

A) 18 u **B)** 36 u **C)** 48 u
D) 72 u **E)** 54 u

Problema (7): Si el lado de un cuadrado de $25\ m^2$ de área se incrementa en 1 metro, ¿en cuánto se incrementa el área?.

A) $36\ m^2$ **B)** $1\ m^2$ **C)** $9\ m^2$
D) $11\ m^2$ **E)** $13\ m^2$

Problema (8): La diagonal de un rectángulo mide 13 m, la base mide 12 m, el área mide:

A) $5\ m^2$ **B)** $30\ m^2$ **C)** $60\ m^2$
D) $40\ m^2$ **E)** $80\ m^2$

Problema (9): Calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de $20\ m^2$ de área.

A) $2\sqrt{10}$ m **B)** $\sqrt{10}$ m **C)** 10 m
D) 5 m **E)** $5\sqrt{2}$ m

Problema (10): Dos lados consecutivos de un romboide se diferencian en 8 m. El perímetro es 64 m y la altura correspondiente al lado mayor mide 10 m. Calcular el área del romboide.

A) $80\ m^2$ **B)** $120\ m^2$ **C)** $180\ m^2$
D) $190\ m^2$ **E)** $200\ m^2$

Clave de Respuestas

1. C	2. A	3. D	4. B
5. A	6. D	7. D	8. C
9. A	10. E		

NIVEL II

Problema (1): El área de un rectángulo mide 960 cm^2. Sus lados están en la relación de 3 a 5. El ancho mide:

A) 24 cm **B)** 30 cm **C)** 50 cm
D) 36 cm **E)** 48 cm

Problema (2): El área de un paralelogramo es de 192 m^2. La altura es la tercera parte de la base. ¿Cuánto mide la altura?.

A) 6 m **B)** 7 m **C)** 8 m
D) 9 m **E)** 10 m

Problema (3): Encontrar las dimensiones de un rectángulo cuya longitud es 4 veces su ancho y cuya área es 100 m^2

A) 4 m y 16 m **B)** 6 m y 24 m
C) 5 m y 20 m **D)** 8 m y 32 m
E) 9 m y 16 m

Problema (4): El área de un paralelogramo es de 1125 m^2, si su base excede en 20 m a su altura, ¿Cuánto mide la base?.

A) 24 m **B)** 25 m **C)** 30 m
D) 45 m **E)** 35 m

Problema (5): El área de un rectángulo es de 644 m^2 y su base es 5 m. mayor que su altura. ¿Cuánto mide la base?.

A) 23 m **B)** 28 m **C)** 29 m
D) 30 m **E)** 31 m

Problema (6): Dos lados consecutivos de un paralelogramo miden 15 y 25 metros respectivamente. La diagonal menor mide 20 m. El área del paralelogramo es:

A) 200 m^2 **B)** 300 m^2 **C)** 400 m^2
D) 500 m^2 **E)** 600 m^2

Problema (7): Cuánto mide la base de un paralelogramo si el área es de 960 m^2, además la base y la altura están en la relación de 5 es a 3.

A) 40 m **B)** 42 m **C)** 46 m
D) 30 m **E)** 36 m

Problema (8): Hallar el área de un paralelogramo cuyos lados son de 8 m y 18 m respectivamente y la altura es la cuarta parte de la media proporcional entre dichos lados.

A) 45 m^2 **B)** 36 m^2 **C)** 54 m^2
D) 144 m^2 **E)** 72 m^2

Problema (9): Dos lados consecutivos de un paralelogramo miden 26 m y 35 m respectivamente y forman un ángulo de 30°. Encontrar el área de dicho paralelogramo .

A) 544 m^2 **B)** 545 m^2 **C)** 554 m^2
D) 455 m^2 **E)** 655 m^2

Problema (10): Los lados de un paralelogramo miden 14 m y 35 m La mayor de las alturas mide 25 m. ¿Cuánto medirá la altura menor?.

A) 20 m **B)** 10 m **C)** 12 m
D) 15 m **E)** 16 m

Problema (11): Un rectángulo tiene 160 m^2 de área y 52 m de perímetro. Hallar cuánto mide la altura del rectángulo.

A) 16 m **B)** 12 m **C)** 14 m
D) 10 m **E)** N.A.

Problema (12): El largo de un rectángulo es 3 veces su ancho, si el ancho se aumenta en 5 m. el área se duplicaría. ¿Cuál es el ancho del rectángulo?.

A) 3 m **B)** 5 m **C)** 15 m
D) 10 m **E)** 20 m

Problema 13: La diagonal de un rectángulo mide 20 m. y la tercera parte de su área es de 64 m^2. El perímetro de dicho rectángulo es:

A) 28 m **B)** 46 m **C)** 64 m
D) 56 m **E)** N.A.

Problema 14: Un rectángulo tiene un área de 273 m^2. Hallar sus dimensiones, sabiendo que su base excede a su altura en 8 m.

A) 21 y 13 metros **B)** 20 y 12 metros
C) 25 y 17 metros **D)** 31 y 12 metros
E) N.A.

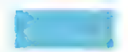
Problema 15: Un terreno tiene forma rectangular. Se sabe que su perímetro es de 98 metros, su diagonal mide 35 metros. El área del terreno es de:

A) 850 m^2 **B)** 580 m^2 **C)** 588 m^2
D) 834 m^2 **E)** 456 m^2

Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. C	4. D
5. B	6. B	7. A	8. C
9. D	10. B	11. D	12. B
13. D	14. A	15. C	

NIVEL III



Problema 1: La diferencia de las dimensiones de un rectángulo es 6 m y la diferencia de sus cuadrados es 252 m^2. El perímetro es:

A) 70 m **B)** 60 m **C)** 80 m
D) 82 m **E)** 84 m

Problema 2: Calcular las dimensiones de un rectángulo sabiendo que la base es el cuádruplo de la altura y que si se disminuye en 4 m a la base y se aumenta en 2 m la altura, el área sería 280 m^2.

A) 80 y 20 metros **B)** 24 y 6 metros
C) 36 y 9 metros **D)** 32 y 8 metros
E) 28 y 7 metros

Problema 3: Un rectángulo de 10 m por 8 m, se va a agrandar para formar otro rectángulo de área 224 m^2, para ello se añade una tira de igual ancho en sus bordes. ¿Cuánto mide el ancho de la tira?.

A) 2 m **B)** 3 m **C)** 4 m
D) 5 m **E)** 6 m

Problema 4: Cuando cada lado de un cuadrado se incrementa en 2 m, el área se incrementa en 56 m^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?.

A) 12 m **B)** 13 m **C)** 14 m
D) 15 m **E)** 16 m

Problema 5: El área de un cuadrado es numéricamente igual a su perímetro. Calcular su diagonal.

A) 2 **B)** 4 **C)** $2\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$ **E)** $8\sqrt{2}$

Problema 6: La suma de los perímetros de dos cuadrados es 92 y el producto de sus lados es 120 ¿cuáles son las áreas de estos cuadrados?

A) 64 y 225 **B)** 49 y 225 **C)** 64 y 256
D) 64 y 128 **E)** N.A.

Problema 7: El lado de un cuadrado más su diagonal suman 14,4852 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado?. (considerar $\sqrt{2} = 1,4142$).

A) 64 cm^2 **B)** 36 cm^2 **C)** 49 cm^2
D) 81 cm^2 **E)** 100 cm^2

Problema 8: Se prolonga un lado de un cuadrado en una longitud de 4 m y el extremo de esta prolongación dista del vértice más lejano 20 m. Calcular el área del cuadrado.

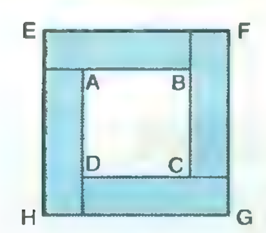
A) 256 m^2 **B)** 225 m^2 **C)** 144 m^2
D) 441 m^2 **E)** 81 m^2

Problema 9: En la figura mostrada:

Área ◻ EFGH = 784 cm^2

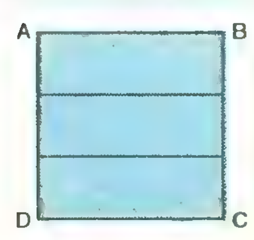
Área ◻ ABCD = 324 cm^2

Calcular el perímetro de uno de los rectángulos iguales.



A) 68 cm
B) 56 cm
C) 65 cm
D) 105 cm
E) 120 cm

Problema 10: En la figura, el cuadrado ABCD se ha dividido en tres rectángulos iguales. El perimetro de cada rectángulo es 56 m. Calcular el área del cuadrado.



A) 121 m^2
B) 144 m^2
C) 256 m^2
D) 300 m^2
E) 441 m^2

Problema 11: La base de un paralelogramo mide 39 m, la diagonal mayor mide 52 m y la proyección de esta diagonal sobre la base mide 48 m. Calcular el área del paralelogramo.

A) 680 m^2 **B)** 860 m^2 **C)** 740 m^2
D) 780 m^2 **E)** 900 m^2

Problema 12: Los lados de un paralelogramo miden 24 m y 40 m respectivamente, la diagonal menor mide 32 m. Calcular el área del paralelogramo.

A) 960 m^2 **B)** 870 m^2 **C)** 768 m^2
D) 708 m^2 **E)** 600 m^2

Problema 13: En la figura:

EC = FD = 12 cm;

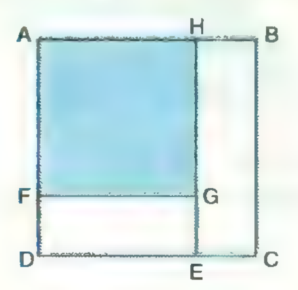
Área ▭ HBCE = 792 cm^2

Área ▭ DFGE = 312 cm^2

Calcular:

i) El área del rectángulo AHGF

ii) El perímetro del rectángulo ABCD

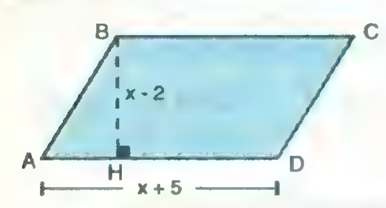


A) 1042 cm^2 y 208 cm
B) 1044 cm^2 y 280 cm
C) 1440 cm^2 y 260 cm
D) 1404 cm^2 y 208 cm
E) 1506 cm^2 y 144 cm

Problema 14: En un paralelogramo ABCD, se toman los puntos medios P y Q de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, para luego unir P con A y Q con C. Hallar el área del paralelogramo ABCD, si el área del paralelogramo APCQ es de 54 m^2

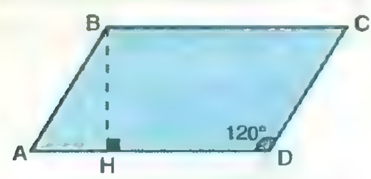
A) 108 m^2 **B)** 64 m^2 **C)** 78 m^2
D) 106 m^2 **E)** 124 m^2

Problema 15: En la figura el área del paralelogramo ABCD es 78 m^2. Calcular la altura.



A) 5 m **B)** 6 m **C)** 7 m
D) 8 m **E)** 9 m

Problema 16: En la figura ABCD es un romboide en el cual AB = HD = 18 m. Hallar el área del romboide.



A) $243\sqrt{3}$ m^2 **B)** 343 m^2
C) $127\sqrt{3}$ m^2 **D)** 64 m^2 **E)** 300 m^2

Problema 17: Se tiene un paralelogramo ABCD de 98 m^2 de área; se toma un punto interior "O" tal que:

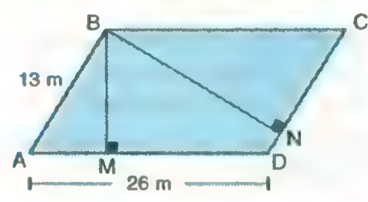
$$\frac{\text{Área } \Delta AOB}{5} = \frac{\text{Área } \Delta COD}{2} \quad ; \text{ y}$$

$$\frac{\text{Área } \Delta BOC}{\text{Área } \Delta AOD} = \frac{3}{4}$$

Calcular el área del Δ AOB.

A) 14 m^2 **B)** 21 m^2 **C)** 28 m^2
D) 35 m^2 **E)** 40 m^2

Problema 18: En la figura se muestra al paralelogramo ABCD, si BM + BN = 27 m, calcular el área del paralelogramo.



A) 186 m^2 **B)** 304 m^2 **C)** 643 m^2
D) 234 m^2 **E)** 452 m^2

Clave de Respuestas

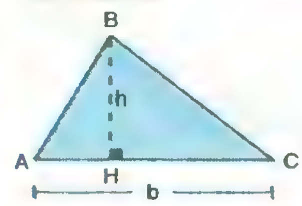
1. E	2. D	3. B	4. B
5. D	6. A	7. B	8. C
9. B	10. E	11. D	12. C
13. D	14. A	15. B	16. A
17. D	18. D		

8.3

Área de Regiones Triangulares

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura relativa.

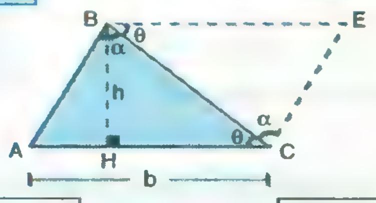


En la figura:

"b" es la base y "h" su altura relativa, es decir la altura que cae en dicha base. Entonces:

$$\text{Área} \blacktriangle ABC = \frac{1}{2} b \cdot h$$

DEMOSTRACIÓN

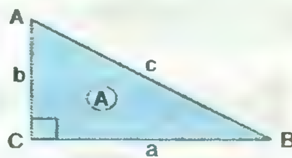


Afirmaciones	Razones
1. Por "B" trazamos $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$, y por "C" trazamos $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$	1. Trazo auxiliar
2. $m\angle ABC = m\angle BCE = \alpha$ $m\angle ACB = m\angle CBE = \theta$	2. Ángulos alternos internos
3. $\Delta ABC \cong \Delta BCE$	3. Postulado **A. L. A.**
4. Área Δ ABC $= \frac{1}{2}$ Área $\square$ABEC	4. Por ser los triángulos ABC y BCE, congruentes.
5. Área $\square$ABEC $= b \cdot h$	5. Teorema del área del paralelogramo.
6. Área $\Delta ABC = \frac{1}{2} b \cdot h$	6. Sustituyendo 5. en 4.

8.3.1 COROLARIOS

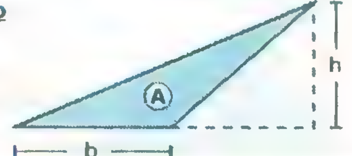
1º **Área del Triángulo Rectángulo.-** Es igual al producto de catetos sobre dos.

$$\text{Área } \triangle ACB = \frac{ab}{2}$$



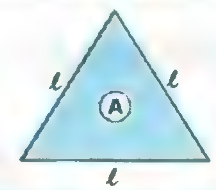
2º **Área del Triángulo Obtusángulo**

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\, b \cdot h$$



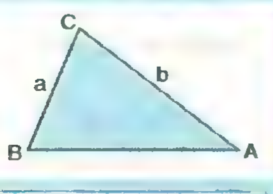
3º **Área del Triángulo equilátero**

$$\text{Área } \triangle = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$



8.3.2 ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE SUS LADOS

Si "a", "b" y "c" son las longitudes de los lados de un Δ ABC y "p" es el semiperímetro, el área del triángulo ABC se calcula con la siguiente fórmula.

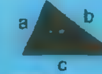


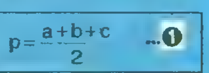
p = semiperímetro del ▲ ABC

$$\text{Área } \blacktriangle ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Recuerda que:

Semiperímetro de un triángulo.- Es la mitad de la suma de los lados del triángulo:





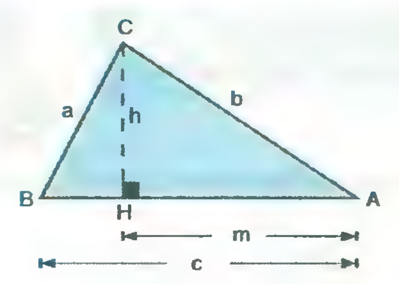
$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{...①}$$

De ① se deduce que: $a + b + c = 2p$

$b + c - a = 2(p - a)$ $\quad$ $a + c - b = 2(p - b)$

$a + b - c = 2(p - c)$

DEMOSTRACIÓN:



Paso previo: Trazamos la altura $\overline{CH}$.

y sea $CH = h$, $HA = m$

Recuerda que:

$\overline{HA}$ es la proyección de $\overline{CA}$ sobre $\overline{BA}$

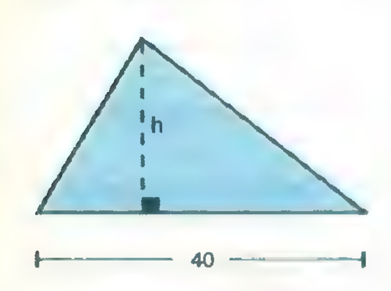
Afirmaciones	Razones
1. Área ▲ $ABC = \frac{1}{2}c\cdot h$	1. Teorema fundamental
2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \Rightarrow \boxed{m = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}}$	2. 1er Teorema de Euclides
3. $\boxed{h^2 = b^2 - m^2} \Rightarrow h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2$	3. Aplicación del Teorema de Pitágoras en el ◣CHA
4. $h^2 = \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$	4. Factorización por diferencia de cuadrados
5. $h^2 = \left(\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2c}\right)\left[\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2c}\right]$ $\Rightarrow h^2 = \frac{1}{4c^2}\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]$	5. Dando mínimo común denominador en cada paréntesis y factorizando los trinominos cuadrados perfectos: $b^2 + 2bc + c^2$, y $b^2 - 2bc + c^2$
6. $h = \frac{1}{2c}\sqrt{[b+c+a][b+c-a][a+c-b][a+b-c]}$	6. Factorización por diferencia de cuadrados.
7. $h = \frac{1}{2c}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}$ $\Rightarrow \boxed{h = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$	7. Reemplazando en términos de "p" y simplificando.
8. Área ▲ $ABC = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{c}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{c}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\therefore$ $\boxed{\text{Área ▲ } ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$	8. Reemplazando 7 en 1 y simplificando

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M SOBRE ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

Problema 1: La base de un triángulo mide 40 cm y su altura relativa es los $\frac{3}{8}$ de dicha base. El área del triángulo es:

A) 250 cm^2 **B)** 300 cm^2 **C)** 340 cm^2 **D)** 400 cm^2 **E)** 600 cm^2

Resolución:



- Según datos del problema:

$$\boxed{b = 40 \text{ cm}} \quad \text{y} \quad h = \frac{3}{8}(40 \text{ cm})$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 15 \text{ cm}}$$

- Aplicando el Teorema fundamental:

$$\boxed{\text{Área } \blacktriangle = \frac{1}{2} b \cdot h}$$

$$\Rightarrow \text{Área } \blacktriangle = \frac{1}{2}(40 \text{ cm})(15 \text{ cm})$$

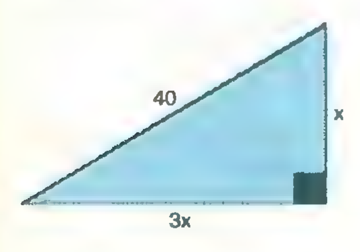
∴

Rpta. B

Problema 2: En un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 30 m, un cateto mide el triple del otro. Hallar el área:

A) 150 m^2 **B)** 300 m^2 **C)** 200 m^2 **D)** 120 m^2 **E)** 135 m^2

Resolución:



- Sea las longitudes de los catetos "x" y "3x".
- Sabemos que:

$$\boxed{\text{Área } ◢ = \frac{1}{2}(1^{er} \text{ cateto})(2^{do} \text{ cateto})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Área } ◢ = \frac{3}{2}x^2} \quad .....❶$$

- Por el Teorema de Pitágoras:

$(3x)^2 + x^2 = 30^2 \Rightarrow 10x^2 = 900 \Rightarrow \boxed{x^2 = 90}$ ....❷

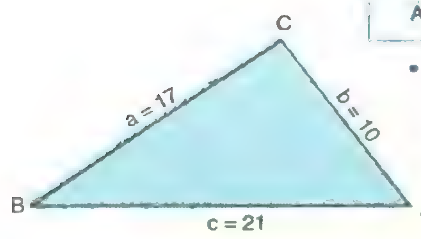
- Sustituyendo ❷ en ❶ Área ◢ $= \frac{3}{2}(90) \Rightarrow$ Área ◢ $= 135\ m^2$ ***Rpta. E***

Problema 3: Calcular el área de un triángulo ABC si: AB = 21 m, BC = 17 m, AC = 10 m.

A) $94\ m^2$ **B)** $72\ m^2$ **C)** $106\ m^2$ **D)** $84\ m^2$ **E)** $170\ m^2$

Resolución:

- Como se conocen los tres lados, debemos de aplicar la siguiente fórmula.



Área ▲ ABC $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

- Cálculos previos:

$$p = \frac{17 + 10 + 21}{2} = 24$$

$p - a = 24 - 17 = 7$

$p - b = 24 - 10 = 14$

$p - c = 24 - 21 = 3$

- Reemplazando en la fórmula:

Área ▲ ABC $= \sqrt{24 \times 7 \times 14 \times 3} = \sqrt{8 \times 3 \times 7 \times 2 \times 7 \times 3} = \sqrt{16 \times 9 \times 49}$

$= 4 \times 3 \times 7 = 84$

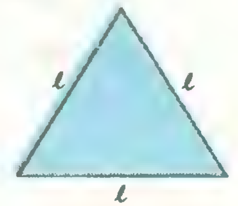
$\therefore$ Área ▲ ABC $= 84\ m^2$ ***Rpta. D***

Problema 4: El perímetro de un triángulo equilátero es 12 m. Calcular el área.

A) $4\sqrt{3}\ m^2$ **B)** $4\ m^2$ **C)** $8\ m^2$ **D)** $6\sqrt{3}\ m^2$ **E)** $12\ m^2$

Resolución:

- Según datos:



Perímetro ▲ = 12 m

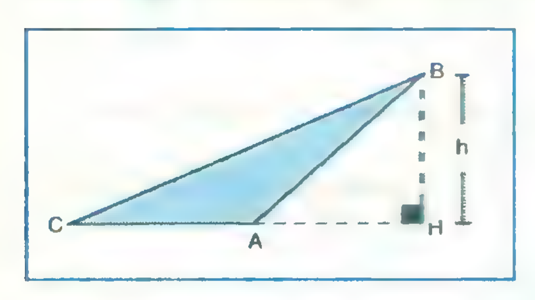
$\Rightarrow \ell + \ell + \ell = 12\ m \Rightarrow \boxed{\ell = 4\ m}$

- Aplicando la fórmula del área para el triángulo equilátero:

$$\boxed{\text{Área }\triangle = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}} \quad \Rightarrow \quad \text{Área }\blacktriangle = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Área }\blacktriangle = 4\sqrt{3}\ \text{m}^2}$$ ***Rpta. A***

Problema 5 : En la figura: AB = 9 m ; BC = 17 m ; AC = 10 m. Calcular "h".



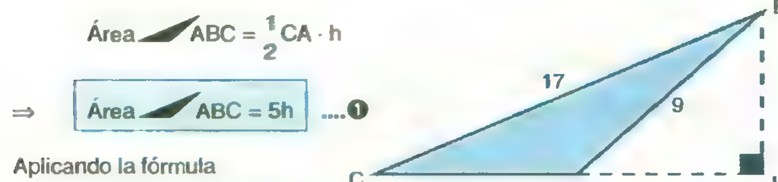
A) 5,4 m **B)** 6,8 m
C) 4,2 m **D)** 7,2 m
E) 9,8 m

Resolución:

- Por el Teorema fundamental.

$$\text{Área ABC} = \frac{1}{2}\text{CA}\cdot h$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Área ABC} = 5h} \quad ....❶$$



- Aplicando la fórmula en función de los lados:

$$p = \frac{17+9+10}{2} = 18\text{, luego:}$$

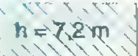
$$\text{Área ABC} = \sqrt{18(18-17)(18-9)(18-10)}$$

$$\text{Área ABC} = \sqrt{18\times 1\times 9\times 8}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Área ABC} = 36} \quad ....❷$$

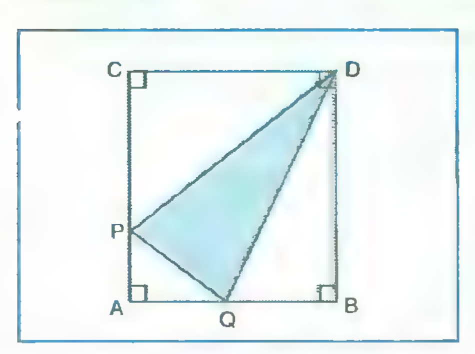
- Sustituyendo ❶ en ❷:

$$5h = 36 \quad \Rightarrow \quad \therefore$$



Rpta. D

Problema 6: En la figura: AB = 7 u, AC = 8 u, AP = 2 u, AQ = 3 u, entonces el área del triángulo PQD es:

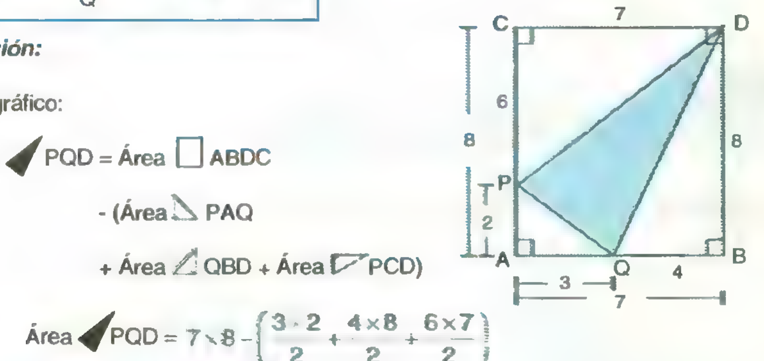


A) 19 u^2 **B)** 18 u^2

C) 16 u^2 **D)** 13 u^2

E) 22 u^2

Resolución:



- Del gráfico:

Área ◢ PQD = Área □ ABDC

- (Área ◺ PAQ

+ Área ◺ QBD + Área ◸ PCD)

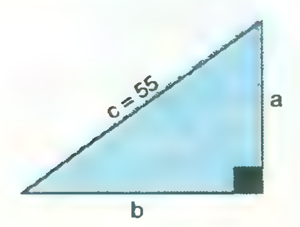
$$\Rightarrow \quad \text{Área} \blacktriangle PQD = 7\times 8 - \left\{\frac{3\cdot 2}{2} + \frac{4\times 8}{2} + \frac{6\times 7}{2}\right\}$$

$\therefore$ Área ◢ PQD = 16 u^2 ***Rpta. C***

Problema 7: En un triángulo rectángulo de 726 m^2 de área, la hipotenusa mide 55 m. La suma de las longitudes de los catetos es:

A) 29 m **B)** 56 m **C)** 77 m **D)** 66 m **E)** 72 m

Resolución:



- Según datos: Área ◢ = 726

$$\Rightarrow \quad \frac{ab}{2} = 726 \quad \Rightarrow \quad \boxed{ab = 1\,452} \quad \text{.....❶}$$

- Por el Teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 + b^2 = 3\,025} \quad \text{.....❷}$$

¡Atención!...

De las ecuaciones ❶ y ❷ debemos de calcular "a + b". Esto no necesariamente significa que debemos de hallar primero "a" y luego "b" para después sumar y obtener el resultado, pues a veces se puede calcular directamente "a + b"
Veamos:

- Recordando que: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, realizamos lo siguiente:

❶ por 2 $\Rightarrow$ $2ab = 2\,904$

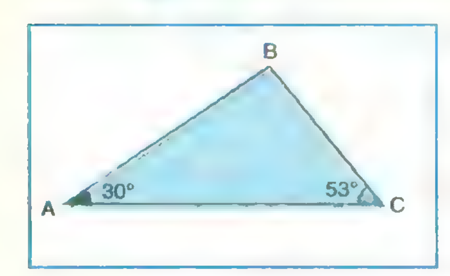
❷ $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = 3\,025$

Σ **M.A.M.** $a^2 + 2ab + b^2 = 5\,929$ $\Rightarrow$ $(a + b)^2 = 77^2$

NOTA:
Σ M.A.M. Se lee; sumando miembro a miembro.

$\therefore$ $a + b = 77$ m *Rpta. C*

Problema 8 : Calcular el área del triángulo ABC si AB = 16 m.



A) $8(3\sqrt{3}+2)\ m^2$ **B)** $8(2\sqrt{3}+4)\ m^2$

C) $8(4\sqrt{3}+2)\ m^2$ **D)** $8(5\sqrt{3}+4)\ m^2$

E) $8(4\sqrt{3}+3)\ m^2$

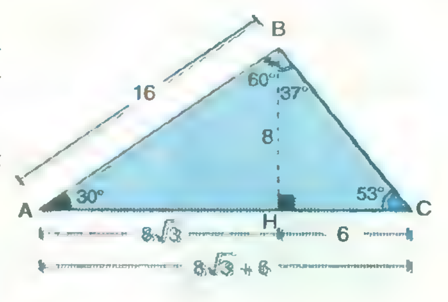
Resolución:

- Aprovechando que el ∠A mide 30°, trazamos la altura $\overline{BH}$ para formar triángulos rectángulos notables.

- En el ◢ AHB: notable de 30° y 60°:

$BH = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow$ $\boxed{BH = 8}$

$AH = \dfrac{AB}{2}\sqrt{3} \Rightarrow$ $\boxed{AH = 8\sqrt{3}}$



- En el ◣ BHC: notable de 37° y 53°

$$\frac{HC}{3}=\frac{BH}{2} \Rightarrow \frac{HC}{3}=\frac{8}{4}$$

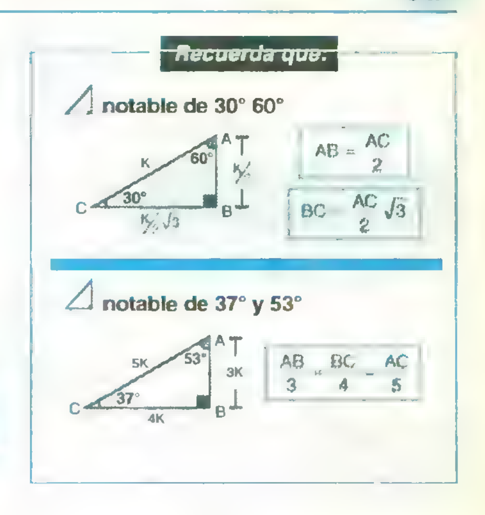
$$\Rightarrow \boxed{HC = 6}$$

- Finalmente:

$$\text{Área} \triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BH$$

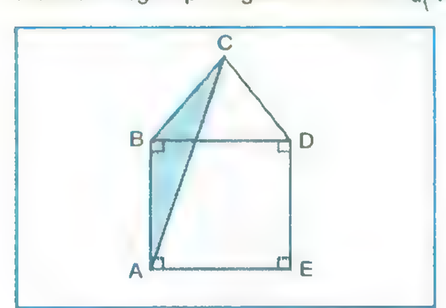
$$= \frac{1}{2}(8\sqrt{3}+6)\cdot 8$$

$$\boxed{\text{Área} \triangle ABC = 8(4\sqrt{3}+3)\ m^2}$$



Rpta. E

Problema 9: En la figura ABDE es un cuadrado y BCD es un triángulo equilátero. Si el área de la región pentagonal ABCDE es $8(4\sqrt{3}+3)m^2$, el área del triángulo sombreado es:

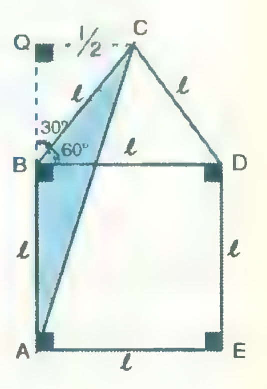


A) $0,5\ m^2$ B) $1\ m^2$

C) $1,5\ m^2$ D) $2\ m^2$

E) $3\ m^2$

Resolución:



- Como la región sombreada es un triángulo obtusa'ngulo, prolongamos $\overline{AB}$ y trazamos la altura $\overline{CQ}$, perpendicular a dicha prolongación.

- El ◸ BQC, es notable de 30° y 60°:

$$CQ = \frac{BC}{2} \Rightarrow \boxed{CQ = \frac{l}{2}}$$

- El área pedida es:

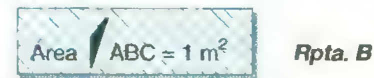
$$\text{Área}\ ABC = \frac{1}{2} AB\ CQ \Rightarrow \text{Área}\ ABC = \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Área} \;\text{ABC} = \frac{l^2}{4} \quad .....❶$$

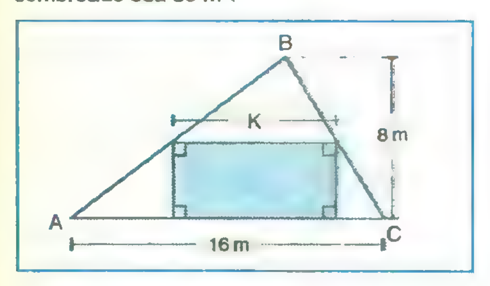
- Según datos del problema:

$$\underbrace{\text{Area} \;\text{ABCDE} = 4+\sqrt{3}}_{} \;\Rightarrow\; \underbrace{\text{Área} \;\square\, \text{ABDE} + \text{Área}\;\Delta\, \text{BCD} = 4+\sqrt{3}}_{}$$

$$\Rightarrow \; l^2 + \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 4+\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{l^2}{4}(4+\sqrt{3}) = 4+\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \boxed{l = 2} \quad ....❶$$

- Reemplazamos □ en □:  $\text{Área} \;\text{ABC} = 1\ m^2$ ***Rpta. B***

Problema 10: En la figura hallar el menor valor de "K" para que el área del rectángulo sombreado sea 30 m^2.



A) 6 m B) 5 m

C) 4 m D) 7 m

E) 9 m

Resolución:

- Según datos del problema:

Área ▭ MNPQ = 30

$$\Rightarrow \quad \boxed{K\cdot h = 30} \quad .....❶$$

- Como $\overline{NP} \,//\, \overline{AC}$,

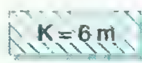
entonces $\Delta NBP \sim \Delta ABC$,

luego: $\dfrac{K}{16} = \dfrac{8-h}{8}$

$$\Rightarrow \quad K = 2(8-h) \quad \Rightarrow \quad K = 16-2h \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{16-K}{2}} \quad ......❷$$

- Reemplazando ❶ en ❷ $\quad K\left(\dfrac{16-K}{2}\right) = 30 \quad \Rightarrow \quad 16K - K^2 = 60$

$$\Rightarrow \quad K^2 - 16K + 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad (K-10)(K-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 10 \quad ó \quad K = 6$$

Como nos piden el menor valor, entonces:  $K = 6\ m$ ***Rpta. A***

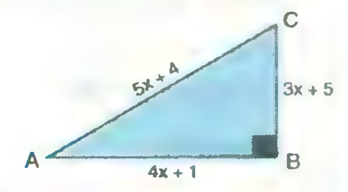
TALLER DE PROBLEMAS Nº 35

Problema 1 : La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 80 cm. Calcular su área.

Resolución:

Rpta. 1 600 cm^2

Problema 2 : Las longitudes de los lados del siguiente triángulo están expresado en metros. Calcular su área.



Resolución:

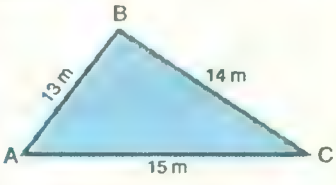
Rpta. 210 m^2

Problema 3 : Una de las alturas de un triángulo equilátero mide $8\sqrt{3}$ m. Calcular el área.

Resolución:

Rpta. $64\sqrt{3}\ m^2$

Problema 4 : Calcular el área del triángulo ABC.



Resolución:

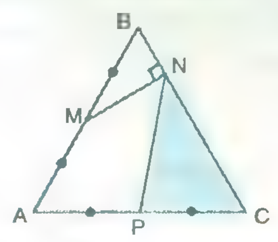
Rpta. 84 m^2

Problema 5 : La suma de la base y su altura correspondiente de un triángulo es de 84 m. La altura es 3/4 de la base. Calcular el área del triángulo.

Resolución:

Rpta. $864\ m^2$

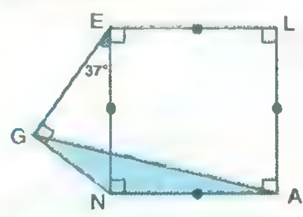
Problema 7 : El área del triángulo equilátero ABC es $64\sqrt{3}$.
Calcular el área del triángulo PNC.



Resolución:

Rpta. $24\sqrt{3}\ m^2$

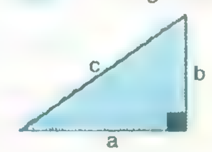
Problema 6 : Si el área del cuadrado ANEL es $100\ u^2$, hallar el área de la región sombreada ANG.



Resolución:

Rpta. $18\ u^2$

Problema 8 : En la siguiente figura:



$$a + b + c = 24\ m$$

y $$a^2 + b^2 + c^2 = 200\ m^2$$

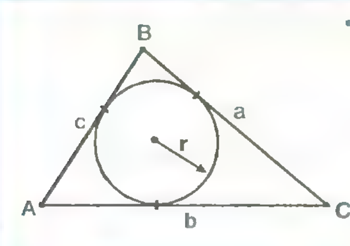
Calcular el área del ◢

Resolución:

Rpta. $24\ m^2$

8.3.3 ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DEL INRADIO (r)

El área de un triángulo es igual a su semiperímetro por el inradio.



- En la figura:

p : semiperímetro del ΔABC, o sea:

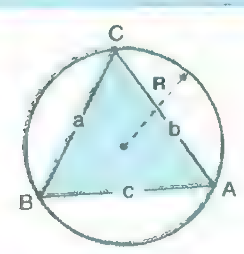
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

r : inradio (o radio de la circunferencia inscrita).

Entonces: $\text{Área } \Delta ABC = p \cdot r$

8.3.4 ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO (R)

El área de un triángulo es igual al producto de los tres lados entre 4 veces el circunradio



- En la figura:

BC = a, CA = b, AB = c

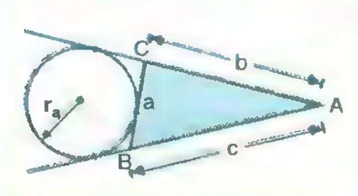
R : Circunradio del ΔABC (o radio de la circunferencia circunscrita al ΔABC).

Entonces:

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{abc}{4R}$$

8.3.5 ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE UNO DE SUS EXRADIOS

El área de un triángulo es igual al producto de la diferencia del semiperímetro y un lado por el exradio relativo a dicho lado.



- En la figura:

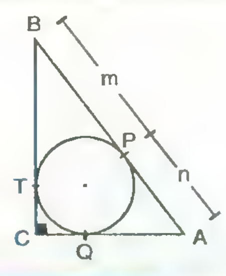
"r_a" es el exradio relativo al lado $\overline{BC}$ (es decir al lado que mide "a").

Entonces:

$\text{Área } \Delta ABC = (p - a) \cdot r_a$

TEOREMA DE BURLET

Este teorema se cumple solo en el triángulo rectángulo. El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de las longitudes de los segmentos que determina la circunferencia inscrita, en la hipotenusa.



En la figura:

sea "P" punto de tangencia,

$BP = m \quad , \quad PA = n$

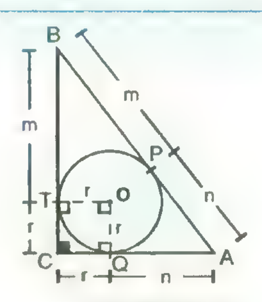
Entonces:

$$\text{Área} \triangle ABC = m \cdot n$$

DEMOSTRACIÓN:

Paso previo:

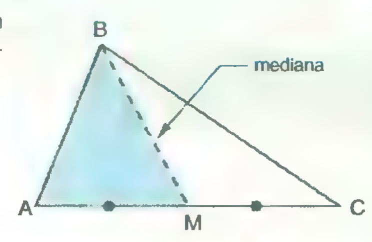
Llevamos el radio "r" a los puntos de tangencia "T" y "Q", luego por propiedad: $\overline{OQ} \perp \overline{AC}$ y $\overline{OT} \perp \overline{BC}$, entonces: OTCQ es un cuadrado.



Afirmaciones	Razones
❶ $\text{Área} \triangle ABC = \dfrac{BC \cdot AC}{2} = \dfrac{(m+r)(n+r)}{2}$ $\Rightarrow \boxed{\text{Área} \triangle ABC = \dfrac{r^2 + mr + nr + mn}{2}}$ ...(I)	❶ Aplicación del Teorema fundamental del área del triángulo.
❷ En el $\triangle$ ABC: $(m+r)^2 + (n+r)^2 = (m+n)^2$ $\Rightarrow \cancel{m^2} + 2mr + r^2 + \cancel{n^2} + 2nr + r^2 = \cancel{m^2} + 2mn + \cancel{n^2}$ $\Rightarrow \boxed{r^2 + mr + nr = mn}$ ...(II)	❷ Teorema de Pitágoras y simplificación de términos.
❸ $\text{Área} \triangle ABC = \dfrac{mn + mn}{2} = \dfrac{\cancel{2}mn}{\cancel{2}}$ $\therefore \boxed{\text{Área} \triangle ABC = m \cdot n}$	❸ Reemplazando II en I y simplificando.

8.4 PROPIEDADES SOBRE DIVISIÓN DE ÁREAS

1ª La mediana divide a un triángulo en dos triángulos equivalentes (es decir, triángulos de igual área).



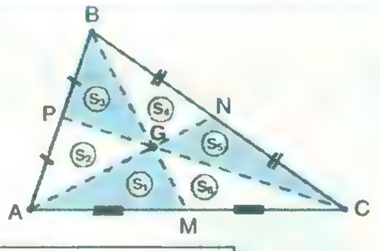
$$\text{Área } \Delta ABM = \text{Área } \Delta BMC = \frac{1}{2} \text{ Área } \Delta ABC$$

2ª Las tres medianas dividen a un triángulo en 6 triángulos equivalentes.

Sea:

S_1 = Área Δ AGM

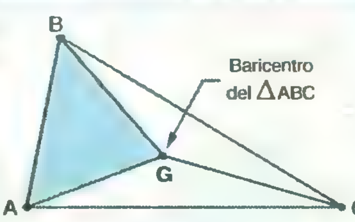
S_2 = Área Δ AGP, etc.



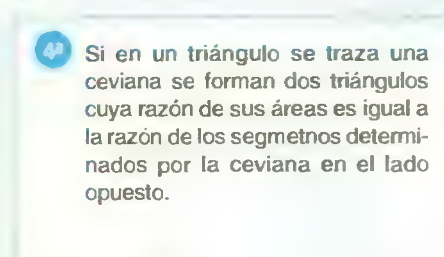
$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{\text{área } \Delta ABC}{6}$$

Nota: "G" es el Baricentro del Δ ABC

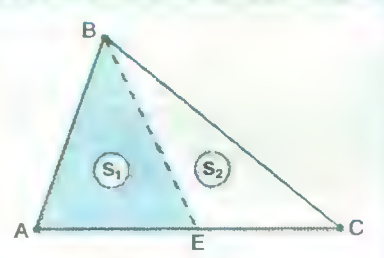
3ª Si el Baricentro de un triángulo se une a los tres vértices, se forman tres triángulos equivalentes.



$$\text{Área } \Delta ABG = \text{Área } \Delta BGC = \text{Área } \Delta AGC = \frac{1}{3} \text{ Área } \Delta ABC$$



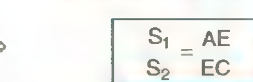
Si en un triángulo se traza una ceviana se forman dos triángulos cuya razón de sus áreas es igual a la razón de los segmetnos determinados por la ceviana en el lado opuesto.



Sea:

S_1 = Área Δ ABE

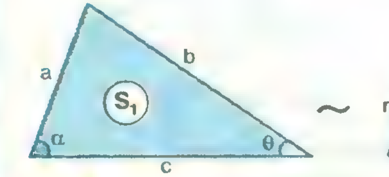
S_2 = Área Δ BEC $\Rightarrow$



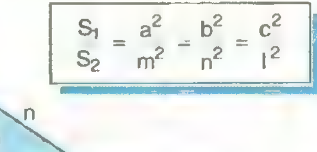
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AE}{EC}$$

8.5 PROPIEDADES SOBRE RELACIÓN DE ÁREAS

Si **dos triángulos son semejantes** sus áreas están en la misma relación que los cuadrados de sus lados homólogos.

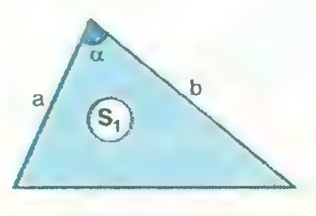


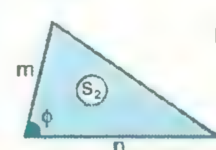
$\sim$



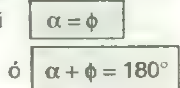
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{m^2}=\frac{b^2}{n^2}=\frac{c^2}{l^2}$$

Si **dos triángulos tienen un ángulo igual** o suplementario, sus áreas estan en la misma relación que los productos de los lados que forman dichos ángulos.





Si

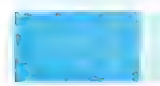


$\alpha=\phi$

ó $\alpha+\phi=180°$

Entonces:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{ab}{mn}$$

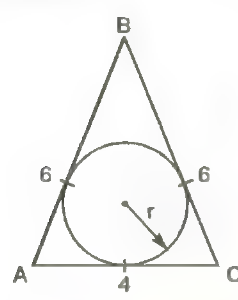


PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M. SOBRE ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

Problema 1 : Los lados de un triángulos miden 6 m, 4m y 6m, respectivamente. Calcular el radio de la circunferencia inscrita.

A) 1 m **B)** 2 m **C)** 3 m **D)** $\sqrt{2}$ m **E)** $\sqrt{3}$ m

Resolución:



- Sea el Δ ABC, debemos de hallar "r"
- Por la fórmula del área del Δ en función del inradio.

Area Δ ABC = p · r

Area Δ ABC = 8r .....❶

Recuerda que:

Semiperímetro

$$p = \frac{6+6+4}{2} = 8m$$

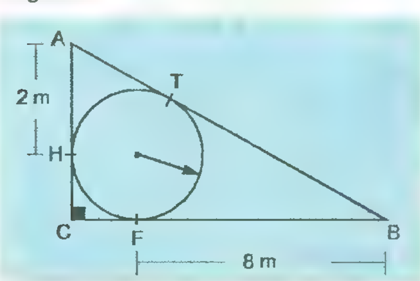
- Ahora hallamos el área del Δ ABC por otra fórmula. Veamos:

Area Δ ABC = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8(8-6)(8-4)(8-6)}$

Area Δ ABC = $\sqrt{8\times 2\times 4\times 2} = 8\sqrt{2}m$ ....❷

- Reemplazando ❶ en ❷ $8r = 8\sqrt{2}$ ➡ $r\sqrt{2}m$ **Rpta D**

Problema 2 : Calcular el área del triángulo rectángulo ABC si H y F son puntos de tangencia.

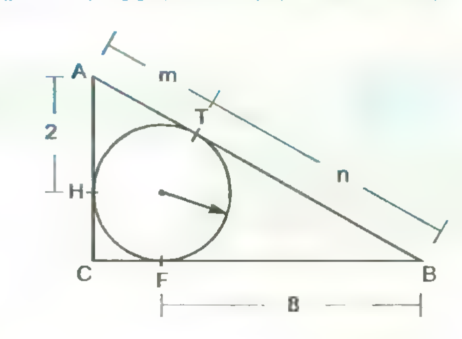


A) 12 m^2 **B)** 16 m^2

C) 8 m^2 **D)** 18 m^2

E) 24 m^2

Resolución :



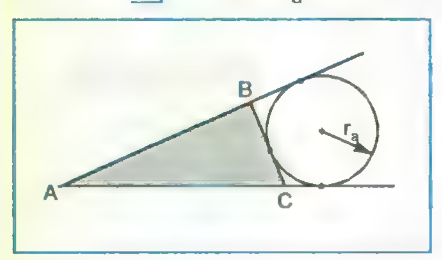
- Por el Teorema de las 2 tangentes, del gráfico:

  $m = 2$ y $n = 8$

- Por el Teorema de Burlet.
  Area ◺ ABC = m . n

  Area ◺ ABC = 16 m^2 **Rpta**

Problema 3: Calcular "r_a" si AB = 13 m, BC = 14m, AC = 15 m.



A) 12 m **B)** 1 m

C) 8 m **D)** 10 m

E) 7 m

Resolución:

- Por la fórmula del área del Δ en función del exradio:

  Area △ ABC = $(p - a)r_a$ Pero:

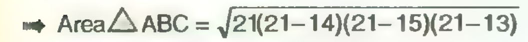
  Area △ ABC = $(21 - 14)r_a$ $p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$

  ➡ **Area △ ABC = 7 r_a** .... ❶

- Por la fórmula del área del Δ en función de los lados.

c=13
a=14
r_a
A
b=15
B
C

  Area △ ABC = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



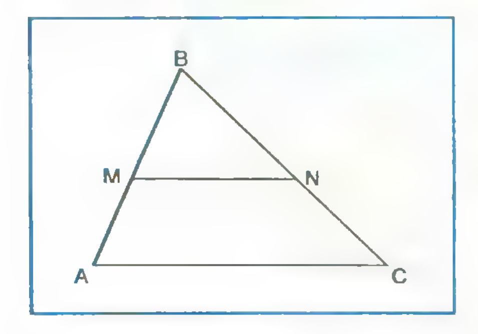
  ➡ Area △ ABC = $\sqrt{21(21-14)(21-15)(21-13)}$

  ➡ **Area △ ABC = 84** .... ❷

- Reemplazando ❶ en ❷

  $7r_a = 84$ ➡ **r_a = 12 m** **Rpta.: A**

Problema 4 : En la figura $\overline{MN} // \overline{AC}$ y además: Area Δ MBN = Area ⏢AMNC. Si $AC = 5\sqrt{2}$ m. Hallar "MN"



A) 2 m **B)** 3 m

C) 4 m **D)** 5m

E) 6 m

Resolución:

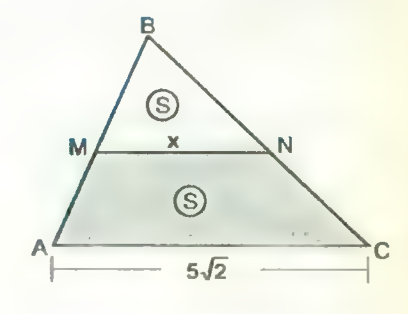
- Como MN // AC, entonces:

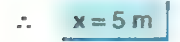
  $\Delta MBN \sim \Delta ABC$

- Luego por relación de áreas:

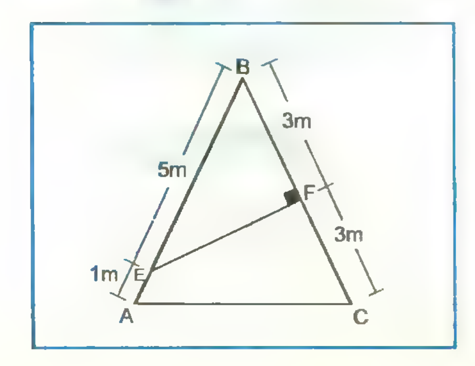
$$\frac{\text{Area } \Delta \text{ MNB}}{\text{Area } \Delta \text{ ABC}} = \frac{MN^2}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{S}}{2\cancel{S}} = \frac{x^2}{(5\sqrt{2})^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x^2}{50}$$



$\therefore$  $x = 5$ m **Rpta.: D**

Problema 5 : Según los datos de la figura, calcular el área del ΔABC.

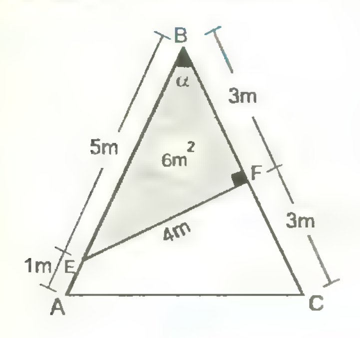


A) 14,4 m^2 **B)** 12, 6 m^2

C) 7,2 m^2 **D)** 10 m^2

E) 16 m^2

Resolución:



- En el ◺ BFE EF = 4m

➡ Área ◺ BFE = 6m²

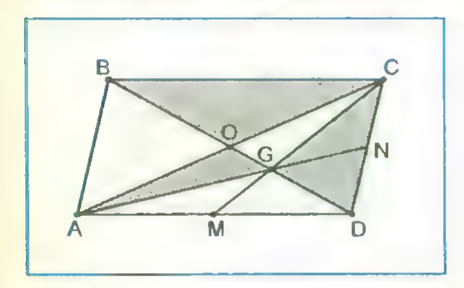
- Sea Área Δ ABC = S =?
- Por relación de áreas:

$$\frac{\text{Area } \triangle BFE}{\text{Area } \triangle ABC} = \frac{BE \cdot BF}{BA \cdot BC} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{5 \times 3}{6 \times 6}$$

➡ S = 14,4

Área Δ ABC = 14,4 m²   **Rpta. A**

Problema 6: En la figura ABCD es un paralelogramo de 12 m² de área. Calcular el área de la región sombreada si "M" y "N" son puntos medios.

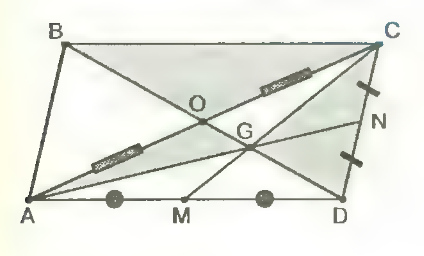


A) 7 m² **B)** 8 m²

C) 9 m² **D)** 6 m²

E) 5m²

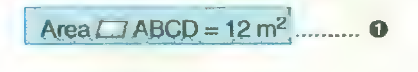
Resolución:



- Según datos del problema:

Area ▱ ABCD = 12 m² .... ❶

Recuerda que:


"G" es el baricentro del Δ ACD

Debemos de calcular:

Área △ BOC + Área △ AGO + Área △ CGD = ?

Según las propiedades sobre división de áreas.

$\Rightarrow$ Area $\triangle$ BOC $= \frac{1}{2}$ Area $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\text{Area}\,\square\,ABCD\right) = \frac{1}{4}\,\square ABCD$ ..... ❶

$\Rightarrow$ Area $\triangle$ AGO $= \frac{1}{6}$ Area $\triangle$ ACD $= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\text{Area}\,\square\,ABCD\right) = \frac{1}{12}\,\square ABCD$ ..... ❷

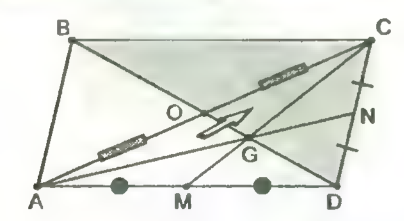
$\Rightarrow$ Area $\triangle$ CGD $= \frac{1}{3}$ Area $\triangle$ ACD $= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\text{Area}\,\square\,ABCD\right) = \frac{1}{6}\,\square ABCD$ ..... ❸

- Finalmente reemplazamos ❶ en ❷ , ❸ y ❹ :

Area $\triangle$ BOC + Area $\triangle$ AGO + Area $\triangle$ CGD $= \frac{1}{4}(12m^2) + \frac{1}{12}(12m^2) + \frac{1}{6}(12m^2)$

Area $\triangle$ BOC + Area $\triangle$ AGO + Area $\triangle$ CGD $= 6m^2$ **Rpta**

OTRO MÉTODO: **(MÉTODO DE TRASLACIÓN DE ÁREAS)**



- Como en el Δ AGC, $\overline{GO}$ es mediana, entonces:

Area Δ AGO = Area Δ OGC

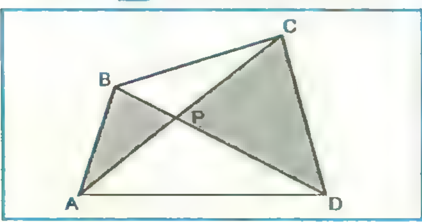
- Luego el área de la superficie sombreada equivale al área del triángulo BCD.

$\Rightarrow$ Area pedida = Area $\triangle$ BCD $= \frac{1}{2}(\text{Area}\,\square ABCD) = \frac{1}{2}(12m^2) = 6m^2$ **// Rpta**

NOTA:

No todos los problemas se pueden resolver por este método que generalmente se aplica cuando en la figura del problema aparecen regiones equivalentes.

Problema 7: En la siguiente figura:

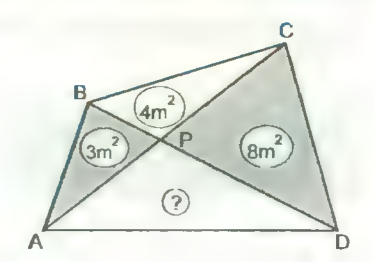


Area Δ APB $= 13m^2$
Area Δ BPC $= 4m^2$
Area Δ CPD $= 8\ m^2$
Hallar Area Δ APD

A) $5m^2$
B) $6\ m^2$
C) $7\ m^2$
D) $8\ m^2$
E) $9\ m^2$

Resolución:

- Por propiedad sobre división de áreas:



En el Δ ABC : $\frac{3m^2}{4m^2} = \frac{AP}{PC}$ ..... ❶

En el Δ ADC: $\frac{\text{Area } \Delta \text{ APD}}{8m^2} = \frac{AP}{PC}$ .... ❷

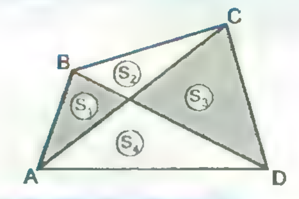
- Igualando los primeros miembros de ❶ y ❷ :

$\frac{3m^2}{4m^2} = \frac{\text{Area } \Delta \text{ APD}}{8m^2}$ ➡ $\text{Area } \Delta \text{ APD} = 6\ m^2$ **Rpta.: B**

NOTA A partir de este problema se deduce la siguiente propiedad:

PROPIEDAD

En todo cuadrilátero se cumple que:



$S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$

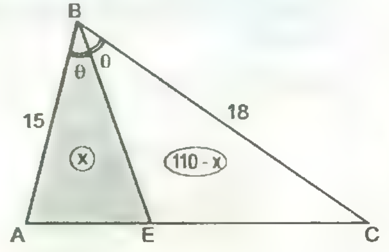
Ejemplo : En el problema anterior

$3m^2 \times 8m^2 = 4m^2 \times \text{Area } \Delta \text{ APD}$ ➡ $\text{Area } \Delta \text{ APD} = 6\ m^2$ **Rpta**

Problema 8 : El área de un triángulo ABC es 110 m2. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden 15 m y 18 m respectivamente. Se traza la bisectriz, $\overline{BE}$. Calcular el área del triángulo ABE.

A) $20\ m^2$ **B)** 30 **C)** $40\ m^2$ **D)** $50\ m^2$ **E)** $60\ m^2$

Resolución:



- Sea $\text{Area } \Delta \text{ ABE} = x$

➡ $\text{Area } \Delta \text{ EBC} = 110 - x$

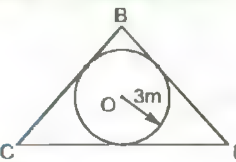
- Por relación de áreas: $\frac{x}{110 - x} = \frac{15 \cdot \cancel{BE}}{18 \cdot \cancel{BE}}$

➡ $\frac{x}{110 - x} = \frac{15}{18}$ ∴ $x = 50\ m^2$

Rpta.: D

TALLER DE PROBLEMAS N° 36

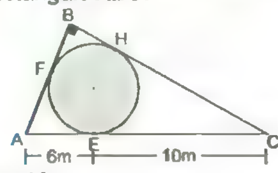
Problema 1: El perímetro del riángulo ABC es 80 m. Hallar su área.



Resolución:

Rpta. $120\ m^2$

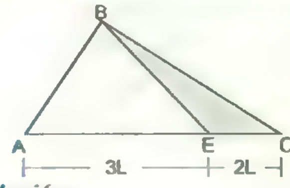
Problema 2: Calcular el área del triángulo rectángulo ABC.



Resolución:

Rpta. $60\ m^2$

Problema 3: Si el área del triángulo ABE es $60\ m^2$, el área del triángulo EBC es :

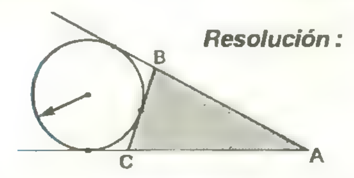


Resolución:

Rpta. $40\ m^2$

Problema 4: El semiperímetro de un triángulo ABC es igual a 45 metros, el lado BC mide 12 metros y la circunferencia ex-inscrita relativa al lado BC tiene un radio de 10 m. Calcular el área del triángulo ABC.

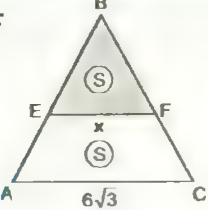
Resolución :



Rpta. $330\ m^2$

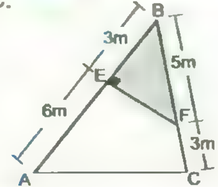
Problema 5: El lado de un triángulo equilátero mide $6\sqrt{3}$ m. Hallar la longitud de la paralela a un lado que divide al triángulo en dos regiones equivalentes.

Resolución:



Rpta. $3\sqrt{6}$ m

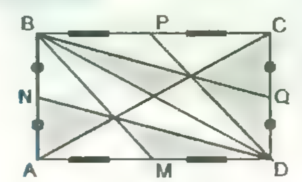
Problema 6: Calcular el área del triángulo ABC.



Resolución:

Rpta. 28,8 m^2

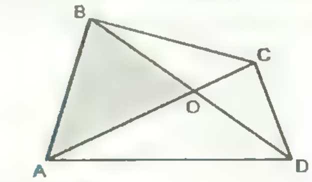
Problema 7: El área del rectángulo ABCD es 24 m^2. El área de la región sombreada es.



Resolución:

Rpta. 10 m^2

Problema 8: En la figura :
Area Δ ABC = 7 m^2 ; Area Δ COD = 4m^2
Area Δ AOD = 10 m^2, Hallar Area Δ AOB



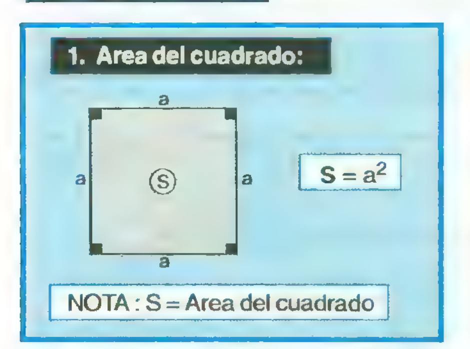
Resolución:

Rpta. 5 m^2

8.6 Áreas de Regiones Cuadrangulares

• RESUMEN :

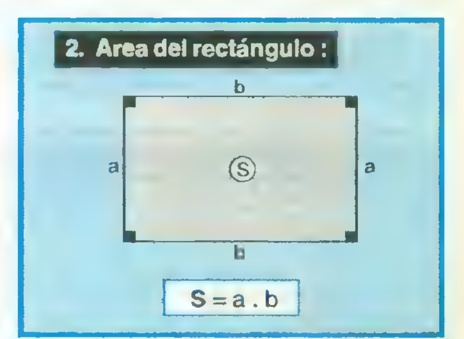
1. Area del cuadrado:



$S = a^2$

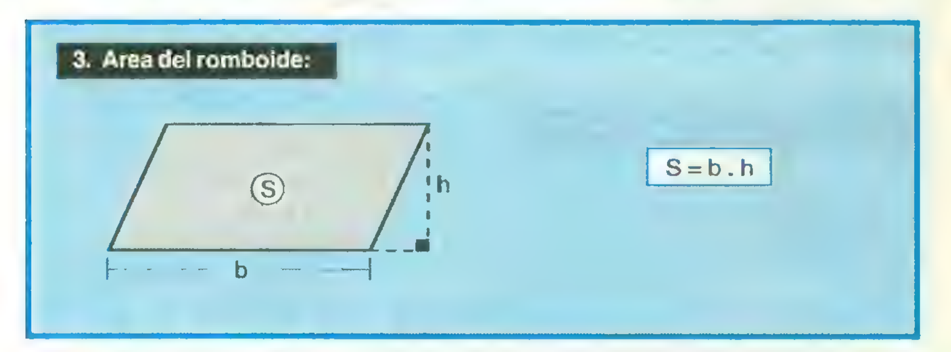
NOTA : S = Area del cuadrado

2. Area del rectángulo :



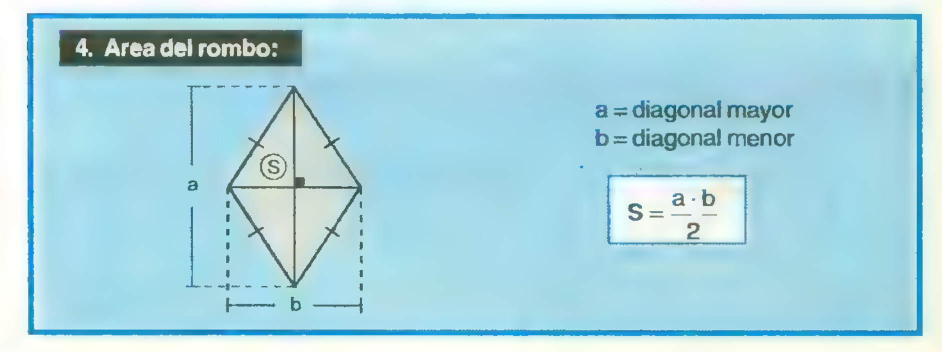
$S = a \cdot b$

3. Area del romboide:



$S = b \cdot h$

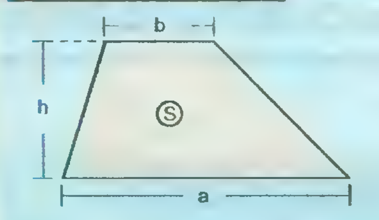
4. Area del rombo:



a = diagonal mayor
b = diagonal menor

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

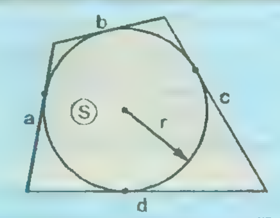
5. Area del trapecio:



a = base mayor
b = base menor
h = altura

$$S = \frac{(a+b)}{2}h$$

6. Area del cuadrilátero circunscrito:

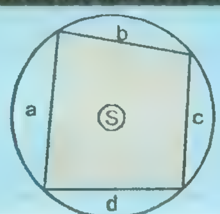


p = semiperímetro del cuadrilátero

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$S = p \, . \, r$$

7. Area del cuadrilátero inscrito:

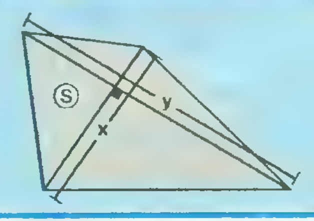


p = semiperímetro de cuadrilátero

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b(p-c)(p-d)}$$

8. Area del trapezoide de diagonales perpendiculares:

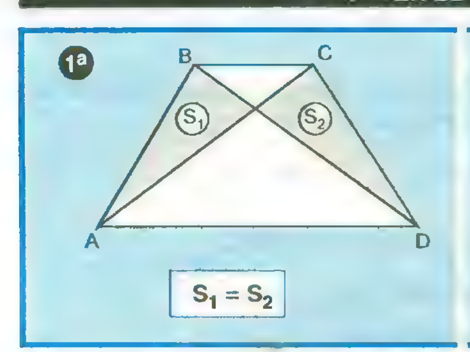


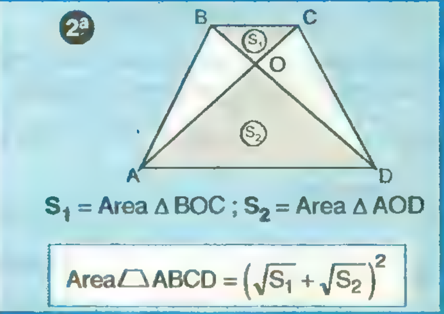
x e **y** son las longitudes de las diagonales.

$$S = \frac{x \cdot y}{2}$$

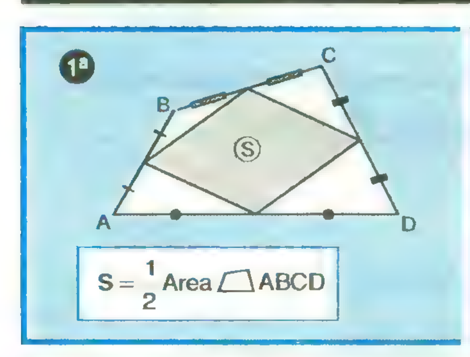
8.6.1 PROPIEDADES ADICIONALES:

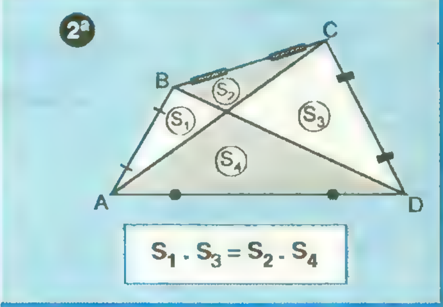
♦ EN EL TRAPECIO



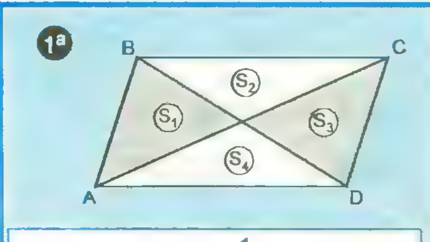


♦ ♦ EN EL TRAPEZOIDE

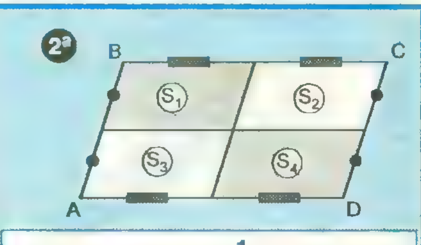




♦ ♦ ♦ EN EL ROMBOIDE (O PARALELOGRAMO PROPIAMENTE DICHO)



$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{1}{4}$ Area ▱ ABCD



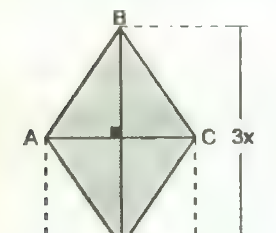
$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{1}{4}$ Area ▱ ABCD

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M. SOBRE AREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

Problema 1: Las diagonales de un rombo son proporcionales a 2 y 3 respectivamente. Calcular la diagonal menor si el área del rombo es 48 m^2

A) 6 m **B)** 8 m **C)** 4 m **D)** 12 m **E)** 10 m

Resolución



- Las diagonales del rombo son:

diagonal menor = AC
diagonal mayor = BD

Por dato: $AC = 2x = ?$, $BD = 3x$

- Aplicando la fórmula para el área del rombo:

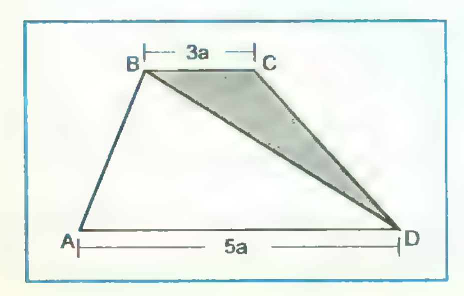
$$\text{Area} \diamond ABCD = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

Reemplazando datos:

$$48 = \frac{(2x)(3x)}{2} \Rightarrow x = 4m$$

- Finalmente: $AC = 2(4m) \Rightarrow AC = 8m$ **Rpta.: B**

Problema 2: Si el área de la región sombreada es 9 m^2, el área del trapecio ABCD es :

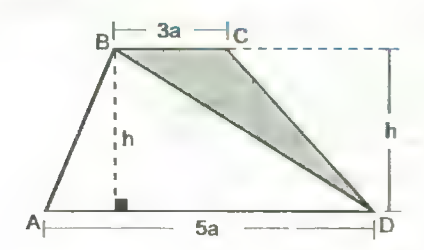


A) 24 m^2 **B)** 18 m^2

C) 36 m^2 **D)** 30 m^2

E) 25 m^2

Resolución:



- Según datos del problema
  Area $\triangle$ BCD = $9\ m^2$

$\Rightarrow \dfrac{3a \cdot h}{2} = 9m^2$

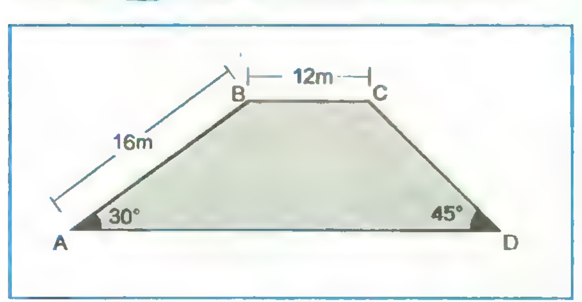
$\Rightarrow$ $a \cdot h = 6m^2$

- Debemos calcular : Area $\trapezium$ ABCD $= \left(\dfrac{5a+3a}{2}\right) \cdot h$

Area ABCD $= 4a \cdot h$ $\Rightarrow$ Area ABCD $= 4(6\ m^2)$

$\therefore$ Area ABCD $= 24\ m^2$ **Rpta.: A**

Problema 3 : Calcular el área del trapecio ABCD:



A) $24(7+\sqrt{3})m^2$

B) $64(2+\sqrt{3})m^2$

C) $32(4+\sqrt{3})m^2$

D) $16(8+\sqrt{3})m^2$

E) N.A.

Resolucion:

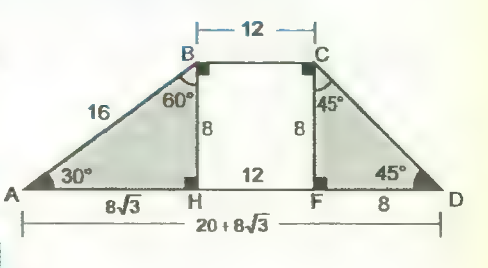
- Para calcular el área del trapecio nos falta conocer la altura y la base mayor.

- En el $\triangle$ AHB, notable de 30° y 60°

$BH = \dfrac{AB}{2}$ $\Rightarrow$ $BH = 8m$

$AH = \dfrac{AB}{2}\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $AH = 8\sqrt{3}m$

- En el $\triangle$ CFD, notable de 45° y 45° $CF = FD = 8m$



- Entonces:

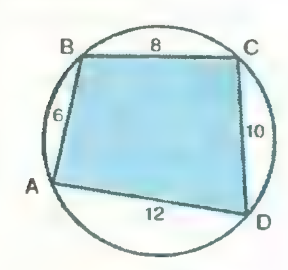
$$\text{Área} \;⏢\; ABCD = \left(\frac{AD+BC}{2}\right)BH \;\Rightarrow\; \text{Área} \;⏢\; ABCD = \left(\frac{20+8\sqrt{3}+12}{2}\right)8$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Área} \;⏢\; ABCD = 32\left(4+\sqrt{3}\right)\,m^2}$$ **Rpta. C**

Problema 4: Un cuadrilátero ABCD está inscrito en una circunferencia. Calcular su área si AB = 6 m, BC = 8 m, CD = 10 m, AD = 12 m.

A) $60\ m^2$ **B)** $72\ m^2$ **C)** $12\sqrt{10}\ m^2$ **D)** $18\sqrt{10}\ m^2$ **E)** $24\sqrt{10}\ m^2$

Resolución:



- Aplicamos la fórmula del área del cuadrilátero inscrito:

$$\text{Área} \;⏢\; ABCD = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

calculamos el semiperímetro:

$$p = \frac{6+8+10+12}{2} = 18$$

Reemplazando en la fórmula:

$$\text{Área} \;⏢\; ABCD = \sqrt{(18-6)(18-8)(18-10)(18-12)}$$

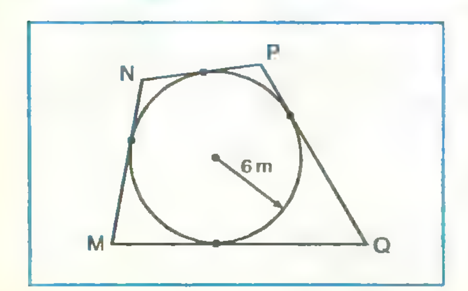
$$\text{Área} \;⏢\; ABCD = \sqrt{(12)(10)(8)(6)} = \sqrt{(2\cdot 6)(10)(8)(6)}$$

$\therefore$

$$\text{Área} \;⏢\; ABCD = 24\sqrt{10}\ m^2$$

Rpta. E

Problema 5: Calcular el área del cuadrilátero MNPQ si: MQ + NP = 22 m

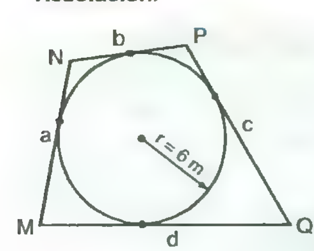


A) $78\ m^2$ **B)** $106\ m^2$

C) $208\ m^2$ **D)** $132\ m^2$

E) $128\ m^2$

Resolución:



- Según datos: $b + d = 22\ m$
- Pero por el teorema de Pitot:

$a + c = b + d \quad \Rightarrow \quad a + c = 22\ m$

- Calculamos el semiperímetro del ⏢ MNPQ.

$$p = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{22m + 22m}{2} = 22\,m$$

$\Rightarrow \quad p = 22\ m$

- Según la fórmula del área del cuadrilátero circunscrito:

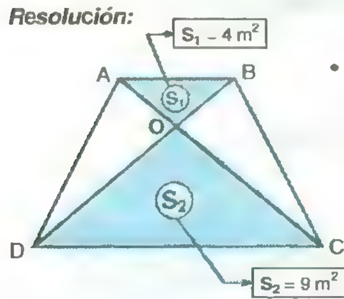
Área ⏢ MNPQ = $p \cdot r$ $\Rightarrow$ Área ⏢ MNPQ = 22 m x 6 m

∴ Área ⏢ NPQ = 132 m² ***Rpta. D***

Problema 6: En un trapecio ABCD las diagonales se cortan en "O". Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y Área ΔAOB = 4 m², Área ΔCOD = 9 m², calcular el área del trapecio.

A) 30 m² **B)** 20 m² **C)** 25 m² **D)** 15 m² **E)** 35 m²

Resolución:



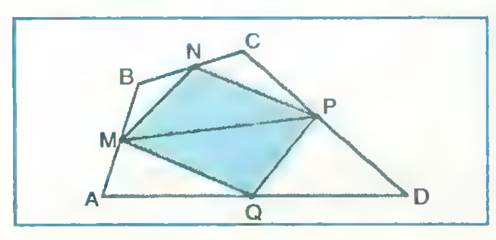
- Por propiedad en todo trapecio:

$$\text{Área ⏢ ABCD} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \text{Área ⏢ ABCD} = \left(\sqrt{4m^2} + \sqrt{9m^2}\right)^2$$

∴ Área ⏢ ABCD = 25 m² ***Rpta. C***

Problema 7: Calcular el área del cuadrilátero ABCD si M, N, P y Q son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente y además: MN = 6 m, MP = 29 m, MQ = 25 m.

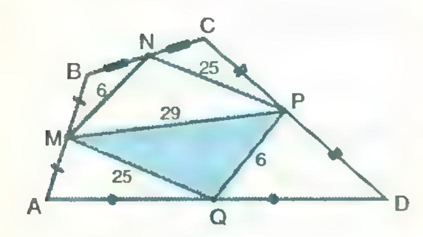


A) 100 m² **B)** 180 m²

C) 220 m² **D)** 240 m²

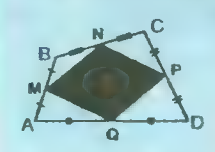
E) 280 m²

Resolución:



Recuerda que:

Cuando se unen los puntos medios de los lados un cuadrilátero cualquiera se forma un Paralelogramo.



Si **M, N, P y Q** son puntos medios, entonces:

MNPQ es un paralelogramo

- Por propiedad en el trapezoide:

  Área ▱MNPQ $= \frac{1}{2}$ Área ABCD

⇒ Área ⏢ ABCD = 2 Área ▱ MNPQ ....□

- Pero el área del paralelogramo MNPQ es el doble del área del triángulo MPQ. Entonces:

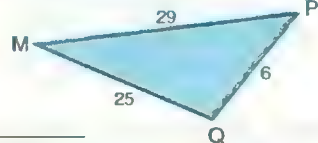
Área ▱ MNPQ = 2 Área ▲ MPQ ....□

- Al sustituir □ en □ se obtiene que:

B

Área ⏢ ABCD = 4 Área ▲ MPQ ....□

- Ahora calculamos el área del ▲ MPQ.



$$p = \frac{29 + 25 + 6}{2} = 30 \text{ m}$$

⇒ Área ▲ MPQ $= \sqrt{30(30-29)(30-25)(30-6)}$

⇒ Área ▲ MPQ = 60 m^2 ....□

- Finalmente □ en □ y se obtiene que:

Área ⏢ ABCD = 240 m^2

Rpta. D

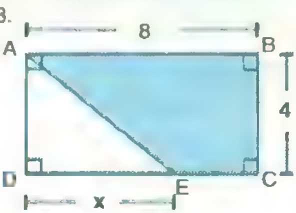
TALLER DE PROBLEMAS Nº 37

Problema 1 : Cada lado de un rombo mide $3\sqrt{17}$ metros. Calcular su área si las diagonales están en la relación de 1 a 4.

Resolución:

Rpta. $72\ m^2$

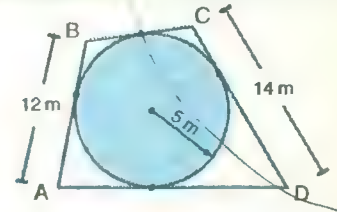
Problema 2 : ABCD es un rectángulo de dimensiones 4 y 8 centímetros. Hallar "DE" para que la razón de las áreas del triángulo ADE y el trapecio ABCE sea igual a 2/3.



Resolución:

Rpta. 6.4 cm

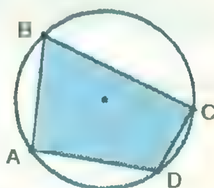
Problema 3 : Calcular el área del trapezoide ABCD.



Resolución:

Rpta. $130\ m^2$

Problema 4 : Calcular el área del cuadrilátero ABCD. Si AB = 5 m, BC = 7 m, CD = 2 m y AD = 4 m



Resolución:

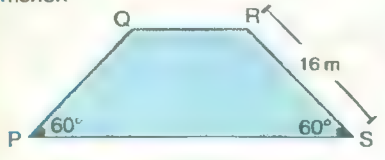
Rpta. $2\sqrt{70}\ m^2$

Problema 5 : Calcular el área de un rombo siendo su perímetro 40 m y la suma de sus diagonales 28 m.

Resolución:

Rpta. $96\ m^2$

Problema 6 : El área del trapecio PQRS es $144\sqrt{3}\ m^2$. Calcular la base menor.



Resolución:

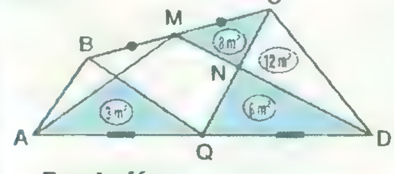
Rpta. 10 m

Problema 7 : En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$) las diagonales concurrentes en "P". los triángulos BPC y APD tienen áreas de $49\ m^2$ y $169\ m^2$ respectivamente. El área del trapecio es:

Resolución:

Rpta. $400\ m^2$

Problema 8 : Las áreas de las regiones sombreadas están indicadas en la figura. Hallar el área del cuadrilátero BMNQ.



Resolución:

Rpta. $16\ m^2$

8.7

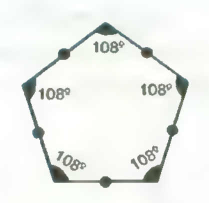
Áreas de Polígonos Regulares

8.7.1 POLÍGONO REGULAR:

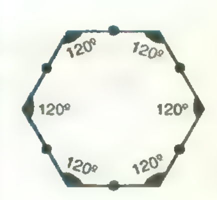
Un polígono es regular si tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos también iguales. Es decir cuando es equilátero y equiángulo a la vez.

Ejemplos:

Cuadrilátero regular o cuadrado



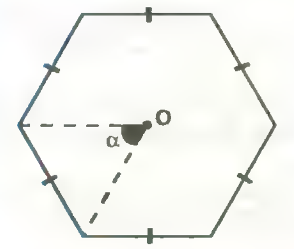
Pentágono regular



Exágono regular

8.7.2 ELEMENTOS:

- **Ángulo Central de un polígono regular (α).-** Es el ángulo que se forma al unir el centro con dos vértices consecutivos. Su medida se obtiene dividiendo 360° entre el número de lados.

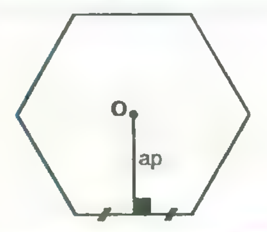


O : centro del polígono regular

n : número de lados del polígono regular

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

- **Apotema de un Polígono regular (ap).**- Es un segmento que se traza desde el centro del polígono, perpendicular a uno de los lados. O también es la longitud de dicho segmento.



O : centro del Polígono regular.

ap : apotema del Polígono regular

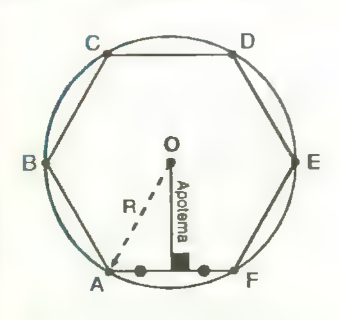
Propiedades:

- El apotema siempre cae en el punto medio del lado.
- En un polígono regular todos los apotemas son iguales

8.7.3 POLÍGONO REGULAR INSCRITO:

Todo polígono regular puede inscribirse en una circunferencia. Esto significa que siempre existirá una (y sólo una) circunferencia que pase exactamente por todos los vértices del polígono regular.

Ejemplo:



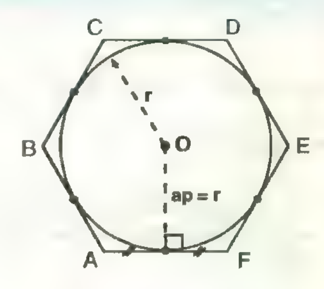
- El Exágono regular ABCDEF está inscrito en la circunferencia de centro "O".
- La circunferencia está circunscrita al exágono regular ABCDEF.
- "O" es el centro de la circunferencia y también del exágono regular ABCDEF.
- "R" es el radio de la circunferencia circunscrita ó CIRCUNRADIO.

8.7.4 POLÍGONO REGULAR CIRCUNSCRITO

Todo polígono regular puede circunscribirse a una circunferencia, o sea en todo polígono regular se puede inscribir una circunferencia. Recuerda que una circunferencia está inscrita en un polígono cuando es tangente a todos los lados de dicho polígono.

Ejemplo:

- El Exágono regular ABCDEF está circunscrito a la circunferencia de centro "O".
- La circunferencia está inscrita en el Exágono regular ABCDEF.
- "O: es el centro de la circunferencia y también del polígono regular.



ap: apotema ; **r** : inradio

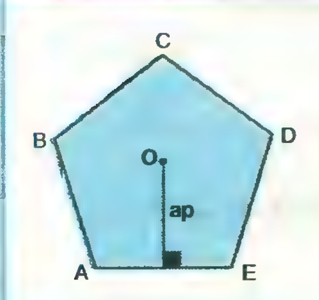
Propiedad:

El apotema de un polígono regular es igual al radio de la circunferencia inscrita (o inradio).

Apotema = **r**

8.7.5 ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

El área de un polígono regular es igual al producto del semiperímetro por el apotema



Área ⬟ABCDE = p × ap

donde: p = semiperímetro del polígono regular.

$$p = \frac{\text{Suma de lados del Polígono}}{2}$$

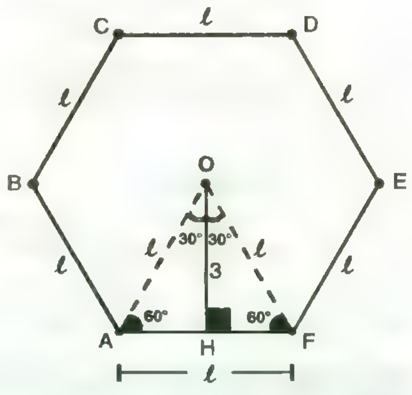
ap = apotema del polígono regular

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M SOBRE ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES

Problema 1: Calcular el área de un exágono regular sabiendo que su apotema mide 3 cm.

A) $18\ cm^2$ **B)** $12\sqrt{3}\ cm^2$ **C)** $18\sqrt{3}\ cm^2$ **D)** $27\ cm^2$ **E)** $15\ cm^2$

Resolución:



- En la figura ABCDEF es el exágono regular, $\overline{OH}$ es el apotema. Según datos

$$ap = OH = 3\ cm$$

- Calculamos el ángulo central AOF.

$$m\angle AOF = \frac{360°}{\#\ \text{de lados}}$$

$$\Rightarrow \quad m\angle AOF = \frac{360°}{6} = 60°$$

luego se deduce que el ΔAOF es **equilátero**

$$\Rightarrow \quad AO = OF = AF = \ell$$

- Calculamos ahora "ℓ". En el ⊿AHO, notable de 30° y 60°

$$OH = \frac{AO}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{\ell}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \ell = 2\sqrt{3}\ cm$$

- Finalmente:

Área ⬡ ABCDEF = p × ap ;

pero $p = \dfrac{\ell+\ell+\ell+\ell+\ell+\ell}{2} = 3\ell = 3\left(2\sqrt{3}\ cm\right) = 6\sqrt{3}\ cm$

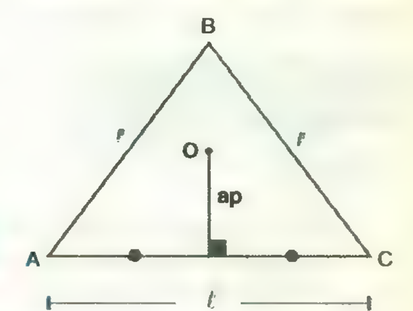
y por dato ap = 3 cm

$\Rightarrow$ Área ⬡ ABCDEF $= \left(6\sqrt{3}\ cm\right)(3\ cm) = 18\sqrt{3}\ cm^2$ ***Rpta. C***

Problema 2: Calcular el apotema de un triángulo equilátero de $9\sqrt{3}\ m^2$ de área.

A) 1 m **B)** 2 m **C)** $\sqrt{2}$ m **D)** $\sqrt{3}$ m **E)** $\sqrt{6}$ m

Resolución:



- Recordemos que el área de un triángulo equilátero función de su lado es:

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 9\sqrt{3} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell = 6m}$$

- Como el triángulo equilátero es también un polígono regular, podemos aplicar la fórmula:

$$\boxed{\text{Área } \Delta ABC = \text{semiperímetro } \Delta ABC \times \text{apotema}}$$

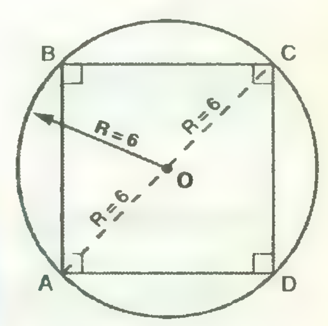
Reemplazando: $9\sqrt{3} = \left(\frac{6+6+6}{2}\right) \cdot ap$

$$\therefore \quad \boxed{ap = \sqrt{3}\ m}$$ ***Rpta. D***

Problema 3: Calcular el área de un cuadrado inscrito en un círculo de 6 m de radio

A) 72 m^2 **B)** 44 m^2 **C)** 68 m^2 **D)** 140 m^2 **E)** 36 m^2

Resolución:



- Del gráfico, vemos que la diagonal del cuadrado es el diámetro del círculo.

Entonces: $\boxed{AC = 12\ m}$

Recuerda que:

$$\text{Área } \square = \frac{(\text{diagonal})^2}{2}$$

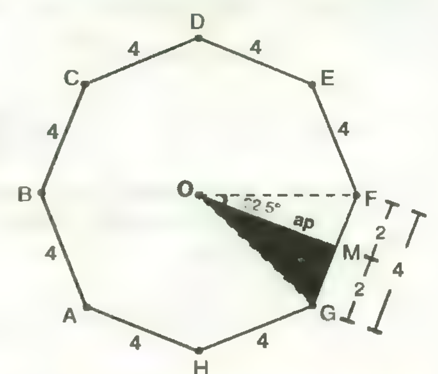
$\Rightarrow \quad \text{Área} \square ABCD = \dfrac{AC^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Área}\square = \dfrac{(12\,m)^2}{2} = 72\,m^2}$ ***Rpta. A***

Problema 4: El perímetro de un octógono regular es 32 metros, Calcular su área.

A) $16(\sqrt{2}+1)m^2$ **B)** $32(\sqrt{2}+1)m^2$ **C)** $24(\sqrt{2}-1)m^2$

D) $64(\sqrt{2}-1)m^2$ **E)** N.A

Resolución:



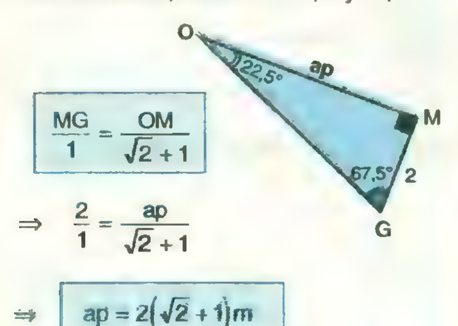
- Como los 8 lados del octógono regular son iguales y según datos suman 32 m, se deduce que cada lado mide 4 m

- El ángulo central mide:

$$m\angle FOG = \frac{360°}{8} = 45°$$

- Para calcular área pedida, nos falta conocer el apotema.

En el ◢ OMG, notable de 22,5º y 67,5º



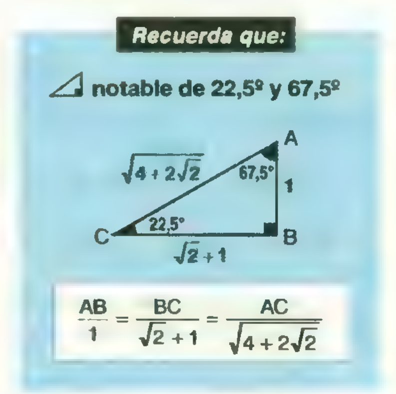
$$\boxed{\frac{MG}{1} = \frac{OM}{\sqrt{2}+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{1} = \frac{ap}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ap = 2(\sqrt{2}+1)m}$$

Recuerda que:

◺ **notable de 22,5º y 67,5º**



$$\frac{AB}{1} = \frac{BC}{\sqrt{2}+1} = \frac{AC}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

- Área del Polígono regular = semiperímetro × apotema

$$\therefore \quad \boxed{\text{Área del octógono ABCDEFGH} = \left(\frac{32m}{2}\right)\left[2(\sqrt{2}+1)m\right] = 32(\sqrt{2}+1)m^2}$$

Rpta. B

Problema 5: Calcular el área de un exágono regular inscrito en un círculo de radio "R".

A) $6R^2$ B) $4R^2$ C) $\frac{5}{2}\sqrt{3}R^2$ D) $\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$ E) $3R^2$

Resolución:

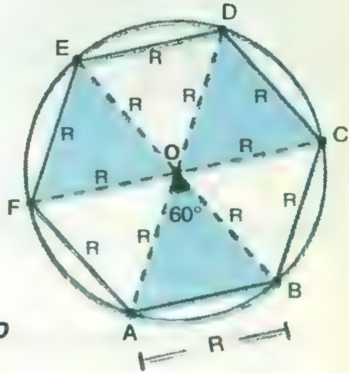
- Se deduce que el exágono regular se compone de 6 triángulos equiláteros congruentes.

Por lo tanto:

Área ⬡ ABCDEF = 6 Área ▲ AOB

$\Rightarrow$ Área ⬡ ABCDEF $= 6\cdot\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ Área ⬡ ABCDEF $=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$ ***Rpta. D***



PROPIEDAD DEL EXÁGONO REGULAR:

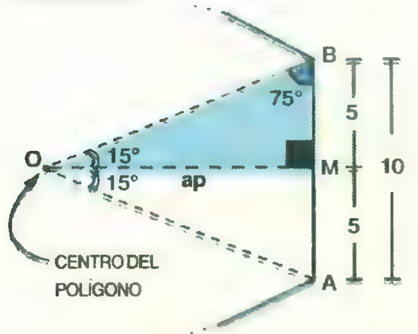
El lado del exágono regular es igual al radio de la circunferencia circunscrita.

NOTA: En este problema como en otros, no fue necesario aplicar la fórmula para el área del polígono regular: **semiperímetro × apotema.**

Problema 6: Calcular el área de un dodecágono regular de lado igual a 10 cm.

A) $300(2+\sqrt{3})cm^2$ B) $200(2+\sqrt{3})cm^2$ C) $400(2+\sqrt{3})cm^2$
D) $500(2+\sqrt{3})cm^2$ E) $600(2+\sqrt{3})cm^2$

Resolución:

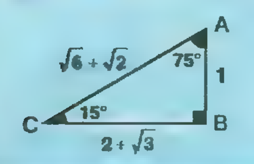


- Para hallar el área pedida nos falta calcular el apotema. Por razones de comodidad dibujamos sólo una parte del dodecágono regular. Notar que $\overline{AB}$ es uno de los 12 lados iguales y que el ángulo central AOB mide:

$$m\angle AOB=\frac{360°}{12}=30°$$

Recuerda que:

◺ notable de 15° y 75°



$$\frac{AB}{1}=\frac{BC}{2+\sqrt{3}}=\frac{AC}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

- En el ◢ OMB, notable de 15º y 75º, por propiedad:

$$\frac{BM}{1}=\frac{MO}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{1}=\frac{ap}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad ap=5\left(2+\sqrt{3}\right)cm$$

- Finalmente, aplicamos la fórmula; Área = semiperímetro × apotema

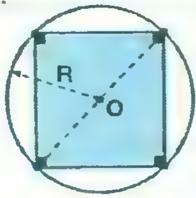
Entonces:

$$\text{Área del dodecágono regular}=\left[\frac{12(10\,cm)}{2}\right]\times\left[5\left(2+\sqrt{3}\right)cm\right]=300\left(2+\sqrt{3}\right)cm^2$$

Rpta. A

TALLER DE PROBLEMAS Nº 38

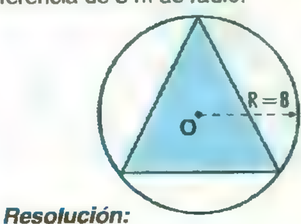
Problema 1 : Un cuadrado de 144 m^2 de área está inscrito en un círculo cuyo radio mide:



Resolución:

Rpta. $R = 6\sqrt{2}$ m.

Problema 2 : Hallar el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 8 m de radio.



Resolución:

Rpta. $48\sqrt{3}$ m^2

Problema 3 : Calcular el área de un exágono regular de 10 m de lado.

Resolución:

Rpta. $150\sqrt{3}$ m^2

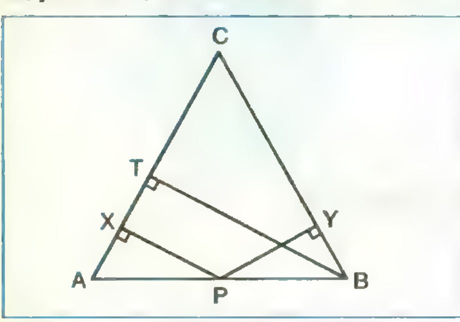
Problema 4 : Calcular el lado de un octógono regular de $72(\sqrt{2}+1)$ m^2 de área.

Resolución:

Rpta. 6 m.

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA ORGANIZADO POR LAS ACADEMIAS: PITÁGORAS, CÉSAR VALLEJO, TRILCE, ALFA, SIGMA.

Problema 1 : En la figura: sea el triángulo ABC, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Sea P un punto cualquiera de $\overline{AB}$, y $\overline{XP} \perp \overline{AC}$; $\overline{YP} \perp \overline{BC}$. Si XP = 5 m ; YP = 8 m, Hallar la longitud de la altura $\overline{BT}$.



A) 15 m

B) 13 m

C) (30/4) m

D) (26/3) m

E) 10 m

Resolución:

- Según Datos: AC = BC = a

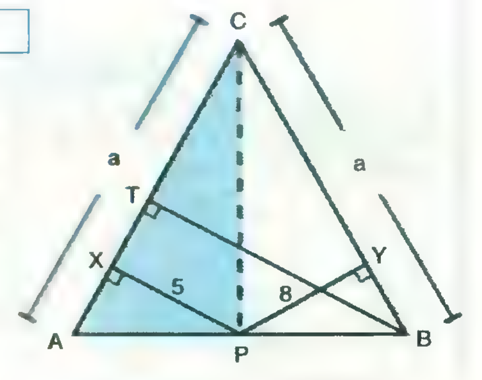
- Trazamos $\overline{CP}$, luego:

área Δ APC + área Δ BPC

= área Δ ABC

$$\Rightarrow \frac{\not{a}\cdot 5}{2} + \frac{\not{a}\cdot 8}{2} = \frac{\not{a}\cdot BT}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{BT = 5 + 8 = 13\text{ m}}$$

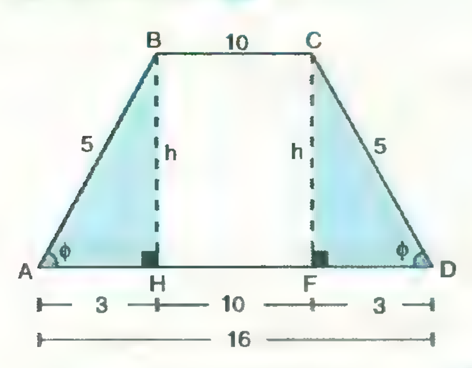


Rpta. B

Problema 2 : Los lados de un trapecio isósceles miden 10; 5 ; 5 y 16. ¿Cuánto mide el área del trapecio?.

A) $50\sqrt{3}$ **B)** 72 **C)** 52 **D)** 48 **E)** $26\sqrt{2}$

Resolución:



- Como:

$\triangle BHA \cong \triangle CFD$

$\Rightarrow$ $\boxed{AH = FD = 3}$

- En el $\triangle BHA$:

$h = \sqrt{5^2 - 3^2} \Rightarrow \boxed{h = 4}$

- área $\triangle ABCD = \left(\dfrac{AD + BC}{2}\right)h \Rightarrow$ $\boxed{\text{Área } \triangle ABCD = 52}$ *Rpta. C*

Problema 3 Hallar el área de la región sombreada.

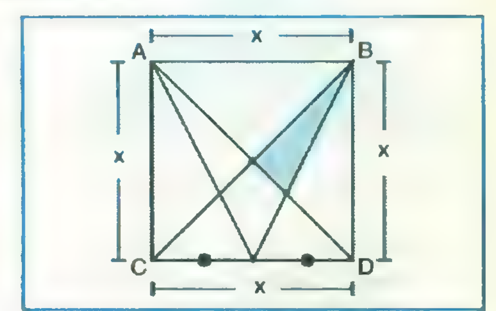
A) $x^2/12$

B) $3x^2/6$

C) $x^2/8$

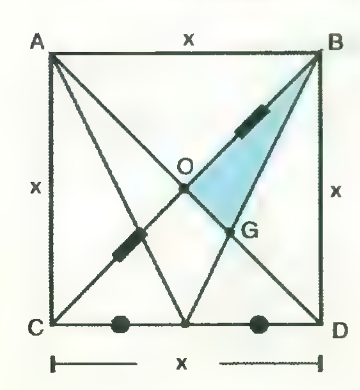
D) $x^2/3$

E) $2x^2/5$



Resolución:

- Teniendo en cuenta que en el cuadrado, y en cualquier paralelogramo, las diagonales se cortan en su punto medio, notamos que en el $\triangle$ BDC, "G" es su Baricentro.



- Por relación de áreas en el $\triangle BDC$:

$\boxed{\text{área } \triangle OBG = \dfrac{1}{6} \text{ área } \triangle BDC}$ ...(1)

Pero:

$\boxed{\text{área } \triangle BDC = \dfrac{1}{2} \text{ área} \square ABCD}$ ...(2)

- Reemplazando ▯ en ▯

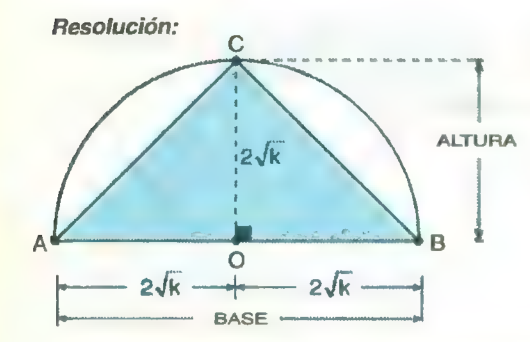
$$\text{Área } ∢OBG = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\text{Área}\,\square ABDC\right] = \frac{1}{12}\text{Área}\,\square ABDC$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Área } ∢OBG = \frac{x^2}{12}}$$ ***Rpta. A***

Problema 4: ¿Cuál es el área máxima del triángulo que puede ser inscrito en una semicircunferencia, si el radio mide: $2k^{1/2}$?.

A) $4k^2$ **B)** k^2 **C)** $4k$ **D)** $2k$ **E)** $2k^2$

Resolución:



Recuerda que:

Por teoría de exponentes,

$$2k^{1/2} = 2\sqrt{k}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

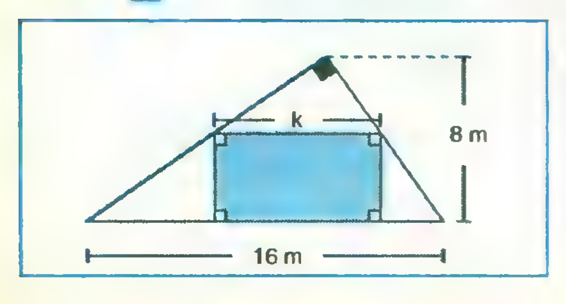
(Ley)

- En la figura adjunta vemos que todos los triángulos que pueden ser inscritos en la semicircunferencia, tienen por base al diámetro AB;luego deducimos que para que el área sea máxima, deberán tener la máxima altura, que será $\overline{OC}$ **(radio)**

$$\therefore \quad \text{Área máxima} = \frac{\text{BASE} \times \text{ALTURA}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Área máxima} = \frac{4\sqrt{k}\cdot \cancel{2}\sqrt{k}}{\cancel{2}} = 4k}$$ ***Rpta. C***

Problema 5: En la figura hallar el valor de "k" para que el área del rectángulo sea 32 m^2



A) 6 m

B) 5 m

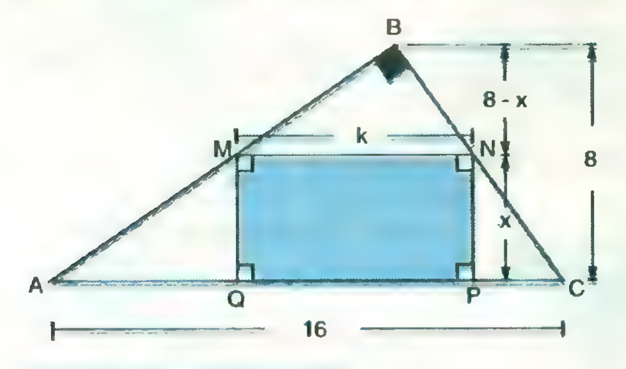
C) 4 m

D) 8 m

E) N.A.

Resolución:

- Sea ABC el triángulo rectángulo y MNPQ el rectángulo



- Área ▭ MNPQ = kx = 32 ...(1)

- Por semejanza: △ MBN ~ △ ABC

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{16} = \frac{8-x}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{16-k}{2} \quad ...(2)$$

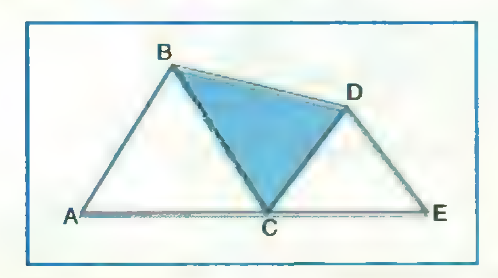
- Sustituimos (1) en (2)

$$k\left(\frac{16-k}{2}\right) = 32 \quad \Rightarrow \quad 16k - k^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 16k + 64 = 0$$

$$(k - 8)(k - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \quad k - 8 = 0, \quad \therefore \quad k = 8 \text{ m}$$ ***Rpta. D***

Problema 6: ABC y CDE son dos triángulos equiláteros de lados "2x" y "x" respectivamente. El área del triángulo BCD es:

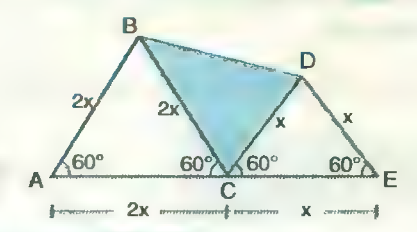


A) $2x^2\sqrt{3}$
B) $(x^2\sqrt{3})/2$
C) $x^2\sqrt{3}/4$
D) $x^2\sqrt{3}$
E) $3x^2\sqrt{3}$

Resolución:

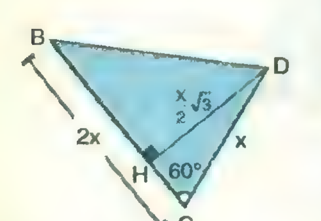
- En el ángulo llano ACE, se deduce que:

$$m\angle BCD = 60°$$



- Dibujamos aparte al Δ BCD:

$$\text{Área } \Delta BCD = \frac{BC \cdot DH}{2} \quad \text{...(1)}$$



- En el ◺ CHD, notable de 30° y 60°:

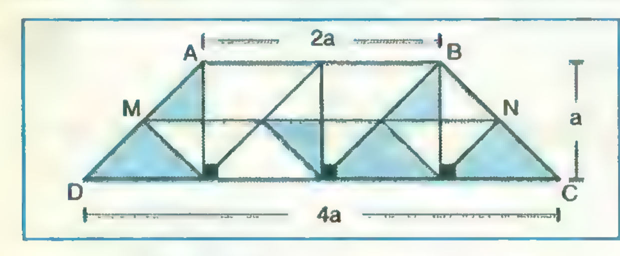
$$DH = \frac{CD}{2}\sqrt{3} \Rightarrow DH = \frac{x}{2}\sqrt{3} \quad \text{...(2)}$$

- Reemplazando (1) en (2)

$$\text{Área } \Delta BCD = \frac{2x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

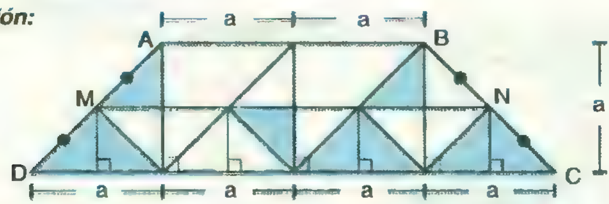
Rpta. B

Problema 7: La figura es un trapecio isósceles de mediana MN y altura "a". P es punto medio de la base mayor. Hallar el área total de las regiones sombreadas.



A) $8a^2/7$
B) $7a^2/8$
C) $8a^2/9$
D) $7a^2/9$
E) $9a^2/8$

Resolución:



Del gráfico, El área total sombreada equivale a 9 veces el área de 1 ◺ sombreado:

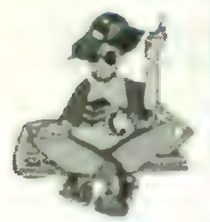
- Área Sombreada = 9 Áreas ◺

$$= 9 \times \frac{\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}}{2}$$

$$\text{Área Sombreada} = 9\,\frac{a^2}{8}$$

Rpta. E

a/2, a/2



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES

NIVEL I

Problema 1: La base de un triángulo mide 36 metros y su altura correspondiente mide 5/9 de la base. El área del triángulo es:

A) 190 m^2 **B)** 280 m^2 **C)** 360 m^2
D) 330 m^2 **E)** 420 m^2

Problema 2: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $8\sqrt{10}$ metros y uno de los catetos mide el triple del otro. El área del triángulo rectángulo es:

A) 96 m^2 **B)** 106 m^2 **C)** 78 m^2
D) 40 m^2 **E)** 60 m^2

Problema 3: En un triángulo isósceles ABC: AB = BC = 30 cm ; AC = 36 cm. Determinar el área del triángulo ABC.

A) 408 cm^2 **B)** 324 cm^2 **C)** 84 cm^2
D) 168 cm^2 **E)** 432 cm^2

Problema 4: El área de un triángulo equilátero de lado 16 cm es:

A) $52\sqrt{3}$ cm^2 **B)** 40 cm^2 **C)** 128 cm^2
D) $64\sqrt{3}$ cm^2 **E)** 280 cm^2

Problema 5: En un triángulo de 630 m^2 de área una altura mide los 5/7 de su base correspondiente. Dicha base mide:

A) 42 m **B)** 30 m **C)** 28 m
D) 24 m **E)** 46 m

Problema 6: Las diagonales de un rombo son entre si como 2 es a 5. Si el área del rombo es de 720 m^2, la diagonal menor mide:

A) 24 m **B)** 30 m **C)** 25 m
D) 18 m **E)** 20 m

Problema 7: El área de un trapecio es 60 m^2 y sus bases miden 9 m y 6 m respectivamente. ¿Cuánto mide la altura?.

A) 6 m **B)** 7 m **C)** 8 m
D) 9 m **E)** 10 m

Problema 8: Un cuadrilátero está circunscrito a una circunferencia de 5 m. de radio. Si dos lados opuestos suman 24 m. El área del cuadrilátero es:

A) 100 m^2 **B)** 90 m^2 **C)** 128 m^2
D) 120 m^2 **E)** 72 m^2

Problema 9: ¿Cuál es el área de un trapecio cuyas bases miden 30 m y 18 m, respectivamente y la altura es de 12 m?.

A) 128 m^2 **B)** 280 m^2 **C)** 306 m^2
D) 288 m^2 **E)** 144 m^2

Problema 10: El área de un trapecio es 240 m^2, la suma de las bases es 60 m, la altura mide:

A) 8 m **B)** 9 m **C)** 10 m
D) 11 m **E)** 12 m

Problema 11: La mediana de un trapecio mide 16 m y su altura 23 m. ¿Cuánto mide el área?.

A) 142 m^2 **B)** 306 m^2 **C)** 424 m^2
D) 266 m^2 **E)** 368 m^2

Problema 12: La altura de un trapecio mide 8 m y el área es de 144 m^2. ¿Cuánto mide la mediana del trapecio?.

A) 12 m **B)** 16 m **C)** 18 m
D) 9 m **E)** 20 m

Problema 13: El perímetro y las diagonales de un rombo suman 102 m. Si el lado y la diagonal menor son como 5 es a 6. Hallar el área del rombo.

A) 215 m^2 **B)** 216 m^2 **C)** 168 m^2
D) 200 m^2 **E)** 300 m^2

Problema 14: El perímetro de un rombo es 52 m, la diagonal mayor mide 24 m. Calcular el área del rombo.

A) 60 m^2 **B)** 80 m^2 **C)** 100 m^2
D) 120 m^2 **E)** 140 m^2

Problema 15: La suma y la diferencia de las diagonales de un rombo es de 76 m y 20 m respectivamente. El área del rombo es:

A) 672 m^2 **B)** 524 m^2 **C)** 324 m^2
D) 608 m^2 **E)** 576 m^2

Problema 16: El perímetro de un triángulo equilátero es de 36 m. El área de dicho triángulo es:

A) 100 m^2 **B)** 72 m^2 **C)** $36\sqrt{3}$ m^2
D) $24\sqrt{3}$ m^2 **E)** 60 m^2

Problema 17: El área de un triángulo equilátero es de $75\sqrt{3}$ m^2. Calcular su altura.

A) 8 m **B)** 10 m **C)** 13 m
D) 15 m **E)** 18 m

Problema 18: El área de un triángulo rectángulo isósceles es de 36 m^2. ¿Cuánto mide la hipotenusa?.

A) 12 m **B)** 10 m **C)** 8 m
D) 16 m **E)** 20 m

Problema 19: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 m y la diferencia de los cuadrados de los catetos es 63 m^2. El área del triángulo es:

A) 60 m^2 **B)** 54 m^2 **C)** 48 m^2
D) 70 m^2 **E)** 80 m^2

Problema 20: El área de un triángulo equilátero ABC es $64\sqrt{3}$ m^2. Si se unen los puntos medios de sus lados se obtiene otro triángulo cuyo perímetro es:

A) 18 m **B)** 21 m **C)** 30 m
D) 36 m **E)** 24 m

Problema 21: En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BE}$. Si el área del Δ BEC es 24 m^2, el área del Δ ABC será de:

A) 24 m^2 **B)** 30 m^2 **C)** 40 m^2
D) 48 m^2 **E)** 72 m^2

Problema 22: El apotema de un cuadrado mide 2 m. El área del cuadrado es:

A) 2 m^2 **B)** 4 m^2 **C)** 8 m^2
D) $4\sqrt{2}$ m^2 **E)** 16 m^2

Problema 23: El perímetro de un exágono regular es 30 metros. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita al exágono?.

A) 1 m **B)** 2 m **C)** 3 m
D) 4 m **E)** 5 m

Problema 24: En un cuadrilátero ABCD, las diagonales se cortan en "O". Sabiendo que:

área ▲AOB = 2 m^2

área ▲COD = 6 m^2

área ▲AOD = 4 m^2

Calcular área ▲BOC.

A) 3 m^2 **B)** 2 m^2 **C)** 4 m^2
D) 5 m^2 **E)** 8 m^2

Problema 25: Una superficie cuadrangular tiene un área de 100 m^2. Si se unen los puntos medios de sus lados se forma un paralelogramo cuya área es de:

A) 25 m^2 **B)** 30 m^2 **C)** 50 m^2
D) 75 m^2 **E)** 80 m^2

Problema 26: El perímetro de un triángulo es 30 metros, si el radio de la circunferencia inscrita es de 2 m, el área del triángulo es de:

A) 60 m^2 **B)** 45 m^2 **C)** 30 m^2
D) 15 m^2 **E)** 20 m^2

Problema 27: En un triángulo rectángulo la circunferencia inscrita determina sobre la hipotenusa dos segmentos que miden 13 y 8 metros respectivamente. ¿Cuánto es el área de dicho triángulo rectángulo?

A) 64 m^2 **B)** 78 m^2 **C)** 106 m^2
D) 104 m^2 **E)** 98 m^2

Problema 28: Si "G" es el baricentro de un triángulo ABC de 60 m^2 de área, el área del triángulo AGB es de:

A) 10 m^2 **B)** 20 m^2 **C)** 30 m^2
D) 40 m^2 **E)** 50 m^2

Problema 29: Un triángulo ABC tiene un área de 32 m^2. Sobre el lado $\overline{AC}$ se toma un punto "Q" tal que: AQ = 3QC. Calcular el área del triángulo ABQ.

A) 8 m^2 **B)** 16 m^2 **C)** 24 m^2
D) 12 m^2 **E)** 20 m^2

Problema 30: En un triángulo ABC se trazan las medianas $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ que se cortan en "0". Si el área del triángulo AMO es de 15 m^2, el área del triángulo ABC será de:

A) 20 m^2 **B)** 60 m^2 **C)** 45 m^2
D) 100 m^2 **E)** 90 m^2

Clave de Respuestas

1. C	2. A	3. E	4. D
5. A	6. A	7. C	8. D
9. D	10. A	11.E	12. C
13. B	14. D	15. A	16. C
17. D	18. A	19. B	20. E
21. D	22. E	23. E	24. A
25. C	26. C	27. D	28. B
29. C	30. E		

NIVEL II

Problema 1: Una de las diagonales de un rombo mide 5 metros menos que la longitud de la otra diagonal. Si el área del rombo es 42 m^2, la suma de las diagonales es:

A) 17 m **B)** 21 m **C)** 19 m
D) 15 m **E)** 12 m

Problema 2: La diagonal de un cuadrado mide $a\sqrt{2}$. ¿Cuánto mide el semiperímetro de otro cuadrado cuya área es el doble del área del primer cuadrado?.

A) 2a **B)** $2a\sqrt{2}$ **C)** $4a\sqrt{2}$
D) $8a\sqrt{2}$ **E)** 4a

Problema 3: Los lados de un paralelogramo tienen longitudes de 6 y 8 metros. Si una de las alturas mide 7 metros, el área del paralelogramo es:

A) 56 m^2 **B)** 42 m^2 **C)** 28 m^2
D) 21 m^2 **E)** 36 m^2

Problema 4: Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de razón 3 m. El área de dicho triángulo es:

A) 54 m^2 **B)** 60 m^2 **C)** 48 m^2
D) 40 m^2 **E)** 70 m^2

Problema 5: ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo, si la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden 4 y 9 metros?.

A) 56 m^2 **B)** 42 m^2 **C)** 54 m^2
D) 39 m^2 **E)** 20 m^2

Problema 6: En un triángulo ABC: AB = 16 m ; AC = 20 m ; m $\angle$ BAC = 37°. El área del triángulo ABC es:

A) 96 m^2 **B)** 84 m^2 **C)** 72 m^2
D) 60 m^2 **E)** 70 m^2

Problema 7: El perímetro de un triángulo rectángulo mide 36 metros y la suma de los cuadrados de sus lados es 450 m^2. Calcular el área del triángulo.

A) 40 m^2 **B)** 60 m^2 **C)** 54 m^2
D) 72 m^2 **E)** 48 m^2

Problema 8: El lado desigual de un triángulo isósceles mide 20 m. Calcular el área de dicho triángulo sabiendo que su perímetro es 50 m.

A) $100\sqrt{5}\ m^2$ **B)** $50\sqrt{5}\ m^2$ **C)** 50 m^2
D) 80 m^2 **E)** N.A.

Problema 9: El área de un triángulo isósceles es $18\sqrt{5}m^2$ y sus lados congruentes miden 9 m cada uno. Calcular su perímetro.

A) 10 m **B)** 20 m **C)** 30 m
D) 40 m **E)** 50 m

Problema 10: El perímetro de un rombo es 104 metros. Uno de los ángulos interiores mide 30°. El área del rombo es:

A) 338 m^2 **B)** 288 m^2 **C)** 336 m^2
D) 216 m^2 **E)** 324 m^2

Problema 11: Las diagonales de un rombo suman 68 metros. El área es 480 m^2. Las diagonales se diferencian en:

A) 17 m **B)** 22 m **C)** 25 m
D) 28 m **E)** 30 m

Problema 12: Un rombo es equivalente a un cuadrado. El perímetro del cuadrado es de 216 metros. Si una de las diagonales del rombo es el triple del lado del cuadrado, ¿Cuánto mide la otra diagonal del rombo?.

A) 40 m **B)** 24 m **C)** 28 m
D) 30 m **E)** 36 m

Problema 13: Las diagonales de un rombo miden 36 m. y 20 m. respectivamente. Si la diagonal menor se aumenta en 4 m. ¿Cuánto hay que disminuir la diagonal mayor para que el área permanezca constante?.

A) 5 m **B)** 6 m **C)** 4 m
D) 8 m **E)** 10 m

Problema 14: Una diagonal de un trapecio isósceles mide 13 m. Si la altura es de 5 m, el área del trapecio es:

A) 40 m^2 **B)** 50 m^2 **C)** 60 m^2
D) 70 m^2 **E)** 80 m^2

Problema 15: Un triángulo y un trapecio tienen áreas y alturas iguales. Si la base del triángulo mide 24 m ¿Cuánto mide la mediana del trapecio?.

A) 12 m **B)** 18 m **C)** 24 m
D) 36 m **E)** 48 m

Problema 16: El área de un trapecio es 180 m^2, la altura mide 12 m y el segmento que une los puntos medios de las diagonales mide 8 m. ¿Cuánto mide la base mayor?.

A) 23 m **B)** 13 m **C)** 20 m
D) 14 m **E)** 27 m

Problema 17: El apotema de un triángulo equilátero mide $\sqrt{3}$ m. El área del triángulo es:

A) 27 m^2 **B)** $18\sqrt{3}\,m^2$ **C)** 24 m^2
D) $9\sqrt{3}\,m^2$ **E)** 12 m^2

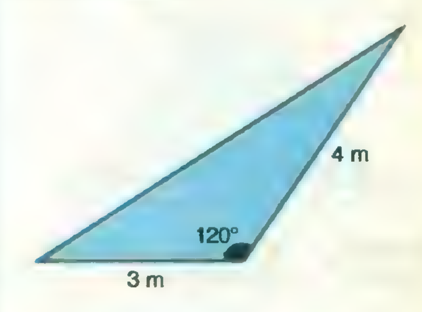
Problema 18: Calcular el área de un octógono regular cuyo lado mide $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ metros.

A) 1 m^2 **B)** 2 m^2 **C)** 3 m^2
D) 4 m^2 **E)** 5 m^2

Problema 19: El perímetro de un dodecágono regular es 24 m. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en dicho dodecágono (Rpta. en metros).

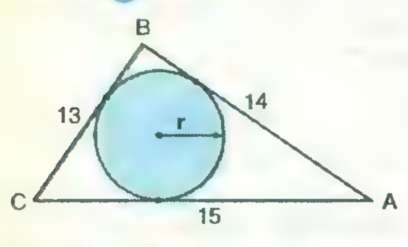
A) $1+\sqrt{3}$ **B)** $2+\sqrt{3}$ **C)** $3+\sqrt{3}$
D) $4+\sqrt{3}$ **E)** $5+\sqrt{3}$

Problema 20: Calcular el área de la siguiente superficie:



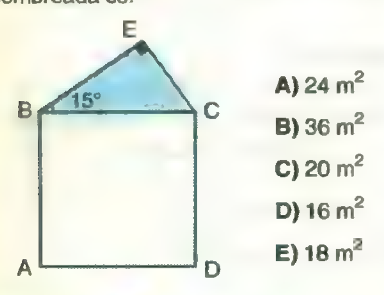
A) 3 m^2 **B)** 6 m^2 **C)** $2\sqrt{3}\,m^2$
D) $3\sqrt{3}\,m^2$ **E)** 4 m^2

Problema 21: Calcular r.



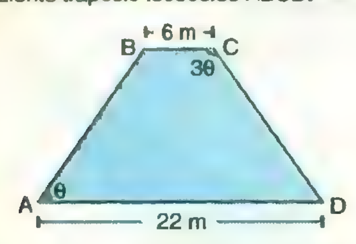
A) 2 **B)** 3 **C)** 4
D) 5 **E)** 6

Problema 22: Si el área del cuadrado ABCD es 144 m^2, el área de la región sombreada es.



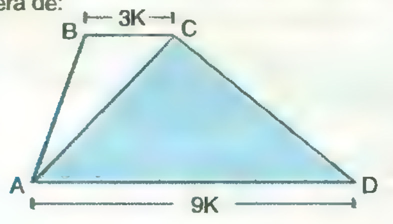
A) 24 m^2
B) 36 m^2
C) 20 m^2
D) 16 m^2
E) 18 m^2

Problema 23: Calcular el área del siguiente trapecio isósceles ABCD.



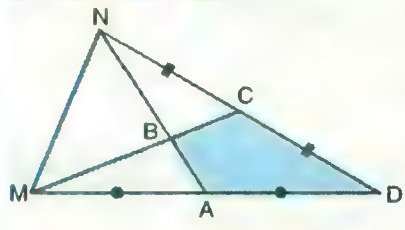
A) 106 m^2 **B)** 132 m^2 **C)** 112 m^2
D) 164 m^2 **E)** 144 m^2

Problema 24: El área del trapecio ABCD es 40 m^2. El área de la región sombreada será de:



A) 35 m^2 **B)** 32 m^2 **C)** 30 m^2
D) 25 m^2 **E)** 20 m^2

Problema 25: El área del Δ MND es 18 m^2, hallar el área ⏢ ABCD.



A) 9 m^2 **B)** 12 m^2 **C)** 16 m^2
D) 6 m^2 **E)** 8 m^2

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. B	4. A
5. D	6. A	7. C	8. B
9. C	10. A	11. D	12. E
13. B	14. C	15. A	16. A
17. D	18. B	19. B	20. D
21. C	22. E	23. C	24. C
25. D			

8.8

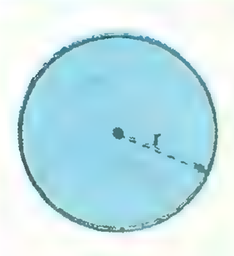
Área de Regiones Circulares

8.8.1 ÁREA DEL CÍRCULO

El **círculo** es una superficie plana que resulta de la reunión de una circunferencia con su región interior.

CÍRCULO = PUNTOS DE LA CIRCUNFERENCIA ∪ REGIÓN INTERIOR

El **área de un círculo** es igual a π por el radio al cuadrado



ÁREA ⨀ $= \pi \cdot r^2$

Recuerda que:

El círculo es una superficie y la circunferencia es una **línea curva cerrada.** Por lo tanto el círculo tiene área y la circunferecia tiene longitud, dada por la siguiente fórmula:

$L_{CIRCUNFERENCIA} = 2\pi \cdot r$

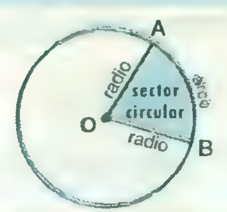
8.8.2 ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

El **sector circular** es una parte del círculo limitada por dos radios y un arco de circunferencia

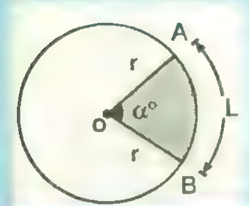
Ejemplo:

En la figura vemos al sector circular AOB.
A veces para abreviar se escribe:

⊿AOB: se lee "*sector circular AOB*"



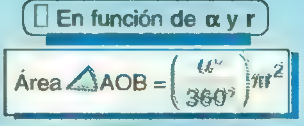
El **área del sector circular** es una fracción del área del círculo que se obtiene con las siguientes fórmulas:



r = radio del círculo

α° = ángulo central en grados sexagesimales

L = longitud del arco AB



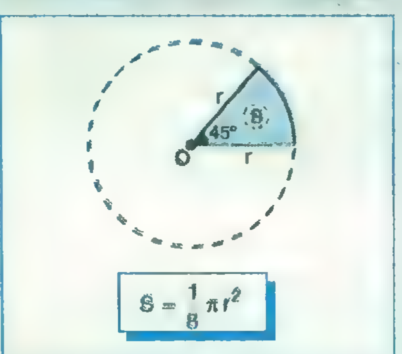
En función de r y L

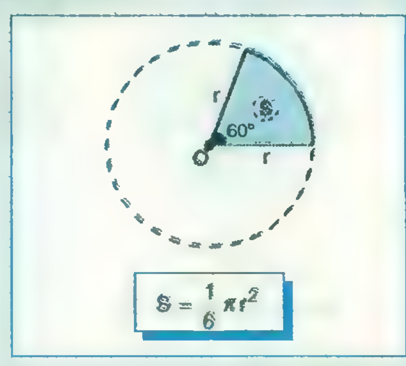
Área ⊿AOB = $\frac{1}{2} r \cdot L$

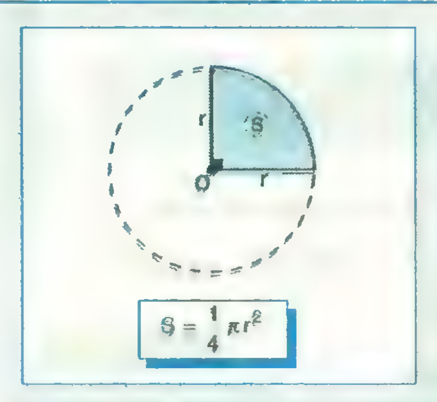
NOTA: De las fórmulas ❶ y ❷ generalmente se aplica con mayor frecuencia la fórmula ❶

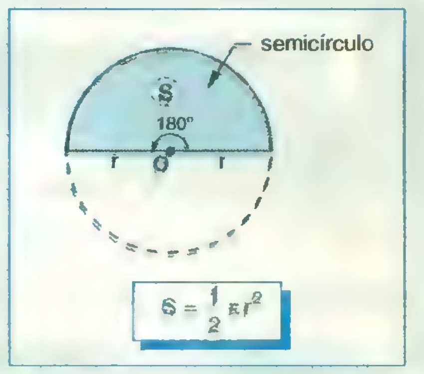
8.8.3 CASOS PARTICULARES:

Para algunos ángulos notables el área del sector circular correspondiente se puede hallar en forma inmediata en funcion del radio veamos:



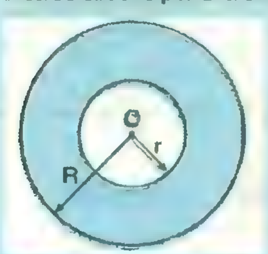






8.8.4 ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR

La **corona circular** es una región limitada por dos circunferencias concéntricas. Su área se obtiene por una simple diferencia:



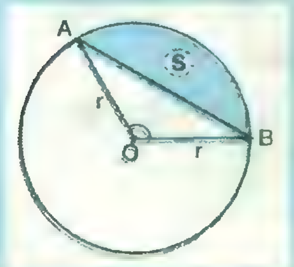
Área de la corona circular = Área ⊙ mayor - Área ⊙ menor

$= \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$

$$\text{Área de la corona circular} = \pi(R^2 - r^2)$$

8.8.5 ÁREA DEL SEGMENTO CIRCULAR

El **Segmento circular** es parte de un sector circular comprendido entre una cuerda y un arco. En la figura, la superficie sombreada es un segmento circular.



Sea **"S"** el área del segmento circular indicado en la figura, entonces:

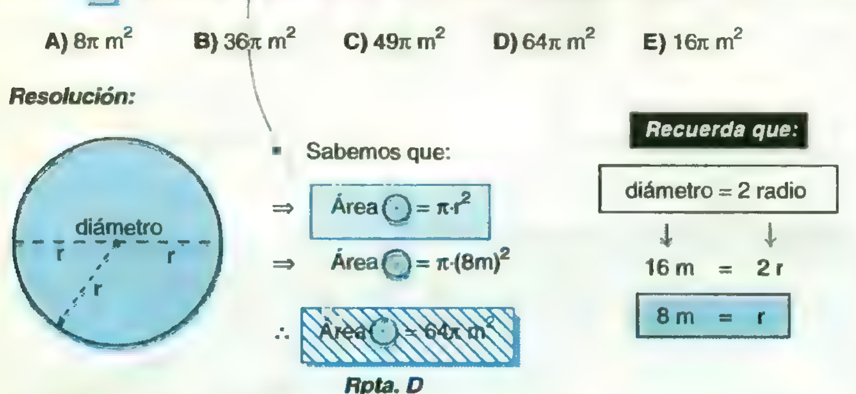
S = Área del sector AOB - Área del triángulo AOB

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M SOBRE ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

Problema 1 : El diámetro de un círculo es 16 metros. Calcular su área.

A) $8\pi\ m^2$ **B)** $36\pi\ m^2$ **C)** $49\pi\ m^2$ **D)** $64\pi\ m^2$ **E)** $16\pi\ m^2$

Resolución:



- Sabemos que:

$\Rightarrow$ Área $\odot = \pi \cdot r^2$

$\Rightarrow$ Área $\odot = \pi \cdot (8m)^2$

$\therefore$ Área $\odot = 64\pi\ m^2$

Rpta. D

Recuerda que:

diámetro = 2 radio

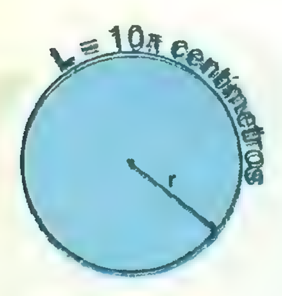
16 m = 2 r

8 m = r

Problema 2 : Calcular el área de un círculo sabiendo que la circunferencia que lo limita tiene una longitud de 10π cm.

A) $5\pi\ cm^2$ **B)** $15\pi\ cm^2$ **C)** $25\pi\ cm^2$ **D)** $50\pi\ cm^2$ **E)** $100\pi\ cm^2$

Resolución:



- En primer lugar calculamos el radio. Sabemos que:

$L = 2\pi \cdot r \Rightarrow 10\pi = 2\pi \cdot r$

$\Rightarrow r = 5\ cm$

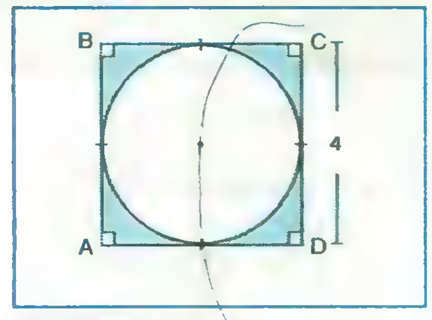
- Ahora recién calculamos el área:

Área $\odot = \pi \cdot r^2 \Rightarrow$ Área $\odot = \pi \cdot (5\ cm)^2$

$\therefore$ Área $\odot = 25\pi\ cm^2$

Rpta. C

Problema 3: Calcular el área de la región sobreada

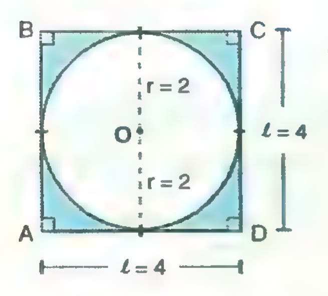


A) $4 - \pi$ **B)** $16 - \pi$

C) $4(6 - 4\pi)$ **D)** $4(4 - \pi)$

E) $8(6 - \pi)$

Resolución:



- Se deduce que el radio del círculo es 2.
- Del gráfico vemos que el área de la región sombreada se obtiene mediante la diferencia del área del cuadrado y el área del círculo.

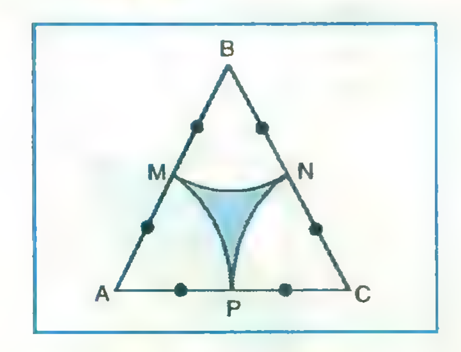
Área sombreada = Área □ABCD - Área ⊙

$= 4^2 - \pi \cdot (2)^2$

$\therefore$ **Área sombreada = 4(4 - π)**

Rpta. D

Problema 4: Hallar el área de la superficie sombreada si el lado del triángulo equilátero es 4u.



A) $\left(4\sqrt{3} - \pi\right) u^2$

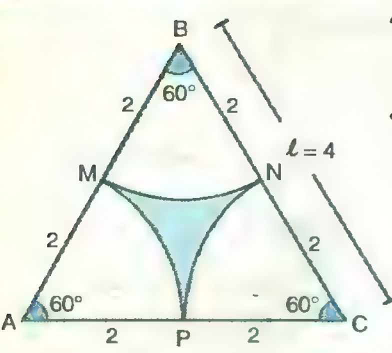
B) $2\left(2\sqrt{3} + \pi\right) u^2$

C) $\left(2\sqrt{3} - 2\pi\right) u^2$

D) $2\left(2\sqrt{3} - \pi\right) u^2$

E) N.A.

Resolución:



- El área pedida es igual al área del triángulo equilátero menos el área de los tres sectores circulares iguales.
- Calculamos el área del Δ equilátero ABC

$$\text{Área } \Delta \text{ ABC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Área } \Delta \text{ ABC} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Área } \Delta \text{ ABC} = 4\sqrt{3}\ u^2} \quad ....❶$$

- Área de los tres sectores iguales $= 3\left[\text{Área (sector } 60°, \text{ radio } 2)\right] = 3\left[\left(\frac{60°}{360°}\right)\pi \cdot 2^2\right]$

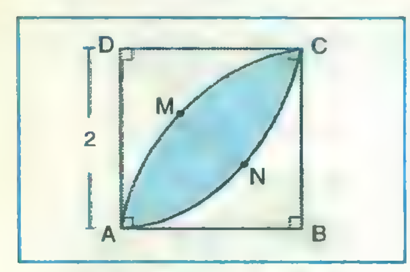
$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Área de los 3 sectores} = 2\pi\ u^2} \quad ....❷$$

- Finalmente: $\boxed{\text{Área sombreada} = \text{Área } \Delta \text{ ABC - Área de los 3 sectores}}$ ....❸

Reemplazando ❶ y ❷ en ❸: $\Rightarrow$ Área sombreada $= 4\sqrt{3}\ u^2 - 2\pi\ u^2$

$$\boxed{\text{Área sombreada} = 2\left(2\sqrt{3} - \pi\right) u^2}$$ ***Rpta. D***

Problema 5 : En el cuadrado ABCD, haciendo centro en "B" se traza el arco $\overset{\frown}{AMC}$ y haciendo centro en "D" se traza el arco $\overset{\frown}{ANC}$. Hallar el área de la superficie sombreada.



A) $5(\pi - 2)$

B) $4(\pi - 2)$

C) $2(\pi - 2)$

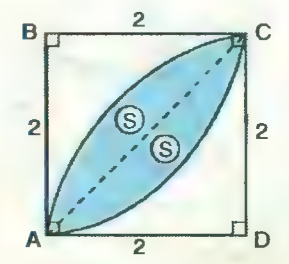
D) $\pi - 2$

E) $\pi + 2$

Resolución:

- Del gráfico:

$\boxed{\text{Área sombreada} = 2S}$ ....❶



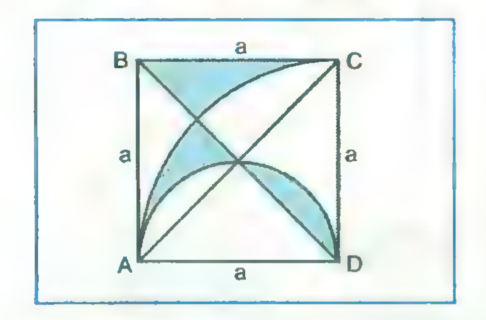
- Pero: S = Área (cuadrante de radio 2) - Área (triángulo de catetos 2 y 2)

$$S = \frac{\pi\ 2^2}{4} - \frac{2\times 2}{2} \Rightarrow \boxed{S = \pi - 2} \quad ...❷$$

- Reemplazando ❶ en ❷

$$\boxed{\text{Área sombreada} = 2\ (\pi\ -2)}$$ ***Rpta. C***

Problema 6 : Calcular el área de la superficie sombreada.



A) $a^2/2$ **B)** $a^2/3$

C) $a^2/4$ **D)** $a^2/5$

E) $a^2/6$

Resolución:

- Aplicamos el método de "*traslación de áreas*". Veamos:

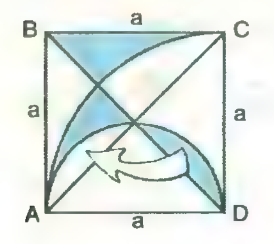


Fig. I

→

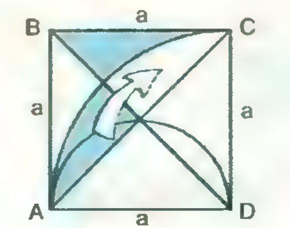


Fig. II

→

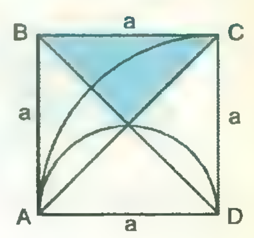


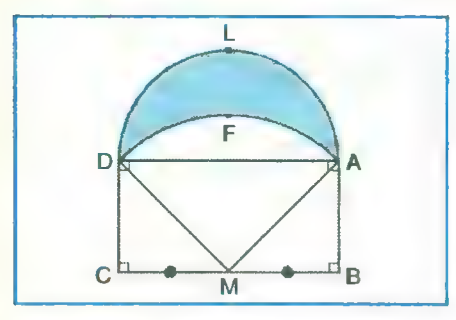
Fig. III

- Finalmente en la **Fig. III**, vemos que:

$$\text{Área sombreada} = \frac{1}{4}\ \text{Área}\ \square\ ABCD$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Área sombreada} = \frac{a^2}{4}}$$ ***Rpta. C***

Problema 7: La superficie sombreada de la figura está limitada por la semicircunferencia ALD y por el arco AFD de centro M y radio $\overline{MA}$. Si BC = 2AB = 4m. Calcular su área.



A) 2 m^2 B) 3 m^2

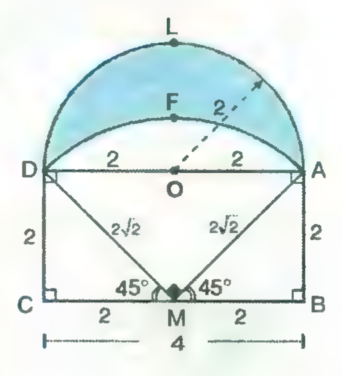
C) 4 m^2 D) 5 m^2

E) 6 m^2

Resolución:

- Del gráfico vemos que el área pedida es igual al área del semicírculo DLA menos el área del segmento circular DFA. Abreviando:

..❶



- Área$_{DLA}$ $= \dfrac{\pi \cdot 2^2}{2}$

$\Rightarrow$ Área$_{DLA}$ $= 2\pi$ ....❷

- Área$_{DFA}$ = Área (sector DMA, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$) - Área (triángulo DMA, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$)

$$= \frac{1}{4}\cdot\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2}$$

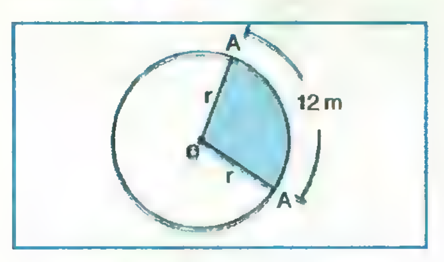
$\Rightarrow$ Área$_{DFA}$ $= 2\pi - 4$ ...❸

- Reemplazando ❶ y ❷ en ❸:

Área sombreada = ~~2π~~ - (~~2π~~ - 4)

$\therefore$ Área sombreada = 4 m^2 ***Rpta. C***

Problema 8: En la figura el radio del círculo es 8 m y el arco AB mide 12 m. El área de la región sombreada es:



A) 48 m^2 B) 36 m^2

C) 52 m^2 D) 72 m^2

E) 64 m^2

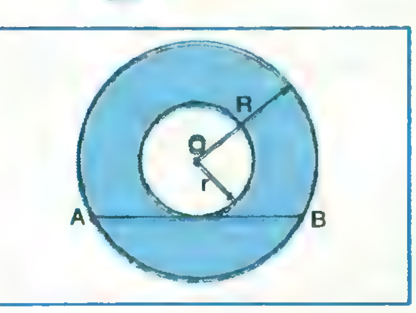
Resolución:

- Aplicamos la fórmula del área del sector circular en función del radio y de la longitud del arco. Veamos

$$\text{Área} \triangle AOB = \frac{1}{2} r \cdot L_{\widehat{AB}}$$

$$\Rightarrow \text{Área} \triangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 8\text{ m }(12\text{ m}) = 48\text{ m}^2$$ ***Rpta. A***

Problema 9: Calcular el área de la corona circular que se muestra si AB = 8m

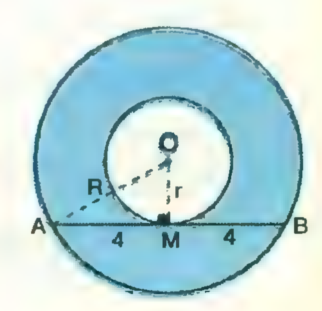


A) 8π m^2 B) 16π m^2

C) 24π m^2 D) 32π m^2

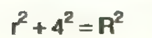
E) 64π m^2

Resolución:



- El área de la corona circular mostrada en la figura es:

$$\text{Área de la corona circular} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \quad \text{....❶}$$

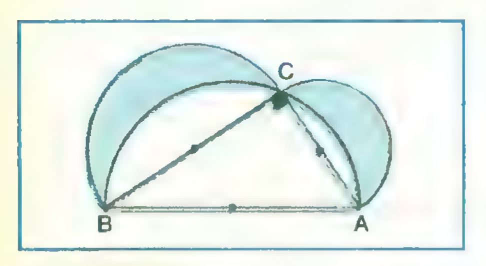
- En el  AMO, por el teorema de Pitágoras:

$r^2 + 4^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 - r^2 = 16$ ...❷

- Reemplazando ❶ en ❷

Área de la corona circular = 16π m^2 **Rpta. B**

Problema 10 : Tomando como diámetros los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ del triángulo rectángulo ABC, se construyen las semicircunferencias indicadas en la figura. Si el área del △ ABC es 20 m^2, hallar el área de la región sombreada.

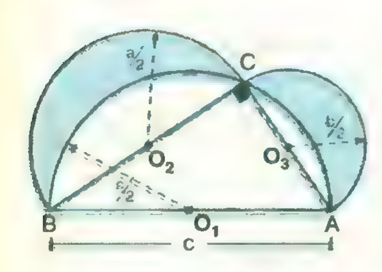


A) 5 m^2 B) 10 m^2

C) 15 m^2 D) 20 m^2

E) 25 m^2

Resolución:



- En el △ABC: AB = c ; BC = a ; CA = b
  Por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad ....❶$$

- Del gráfico:

Área sombreada = Área (semicírculo a) + Área (semicírculo b) + Área △ABC - Área (semicírculo c)

$$\Rightarrow \quad \text{Área sombreada} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{ab}{2} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\text{Área sombreada} = \frac{\pi}{8}\left(a^2+b^2\right) + \frac{ab}{2} - \frac{\pi}{8}c^2 \quad ....❷$$

- Reemplazando ❶ en ❷:

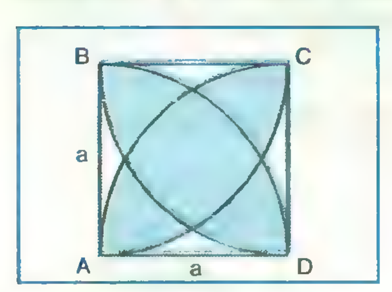
$$\text{Área sombreada} = \frac{\pi}{8}\left(c^2\right) + \boxed{\frac{ab}{2}} - \frac{\pi}{8}c^2$$

esto es el área del △ABC

$\Rightarrow$ Área sombreada = Área △ ABC **(Teorema de las lúnulas de Hipócrates)**

$\therefore$ Área sombreada = 20 m^2 **Rpta. D**

Problema 11: Desde los vértices del cuadrado ABCD de lado "a" se describen arcos de radio también "a" (ver la figura). Calcular el área de la región sombreada

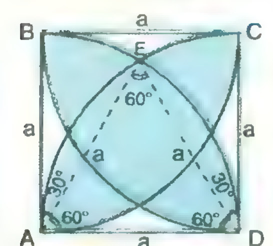


A) $\frac{a^2}{3}(9\pi+2\sqrt{3}-3)$ B) $\frac{a^2}{3}(2\pi+3\sqrt{3}-9)$

C) $\frac{a^2}{2}(2\pi+\sqrt{3}-3)$ D) $\frac{a^2}{3}(3\pi+2\sqrt{3}-9)$

E) N.A

Resolución:



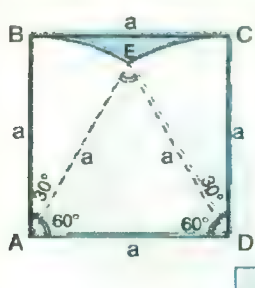
- Del gráfico vemos que:

Área sombreada = Área □ ABCD - 4 Área BEC ..❶

- Calculamos el area del triángulo mixtilíneo BEC

Recuerda que:

- **Triángulo rectilíneo.-** Es aquel que tiene sus lados rectos.
- **Triángulo curvilíneo.-** Tiene lados curvos.
- **Triángulo mixtilíneo.-** Tiene lados rectos y curvos.



Del gráfico:

Área BEC = Área □ ABCD - Área △ AED - 2 [Área 30°]

$$\Rightarrow \quad \text{Área BEC} = a^2 - a^2\frac{\sqrt{3}}{4} - 2\left[\frac{30°}{360°}\pi a^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \text{Área BEC} = a^2 - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{6} \quad ....❷$$

- Reemplazando ❶ en ❷: $\text{Área sombreada} = a^2 - 4\left(a^2 - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{6}\right)$

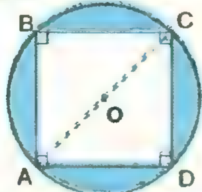
$$\text{Área sombreada} = -3a^2 + a^2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi a^2$$

$$\therefore \quad \text{Área sombreada} = \frac{a^2}{3}(2\pi+3\sqrt{3}-9)$$

Rpta. B

TALLER DE PROBLEMAS Nº 39

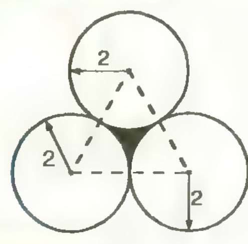
Problema 1 : Calcular el área de la parte sombreada si ABCD es un cuadrado de lado 4 metros.



Resolución:

Rpta. $8(\pi - 2)\ m^2$

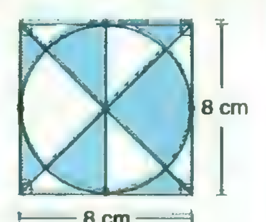
Problema 2 : Calcular el área del triángulo curvilíneo sombreado.



Resolución:

Rpta. $2(2\sqrt{3} - \pi)$

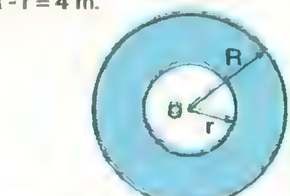
Problema 3 : Hallar el área de la parte sombreada.



Resolución:

Rpta. $32\ cm^2$

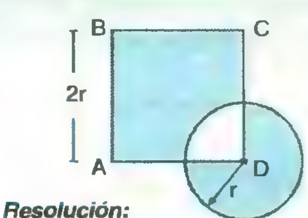
Problema 4 : Calcular el área de la corona circular mostrada si $R + r = 12$ m, y $R - r = 4$ m.



Resolución:

Rpta. $48\pi\ m^2$

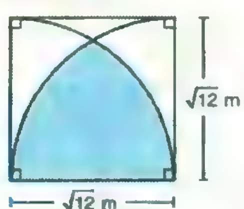
Problema 5 : El área del cuadrado ABCD es 36 m^2. El área de la región sombreada es:



Resolución:

Rpta. $\frac{9}{2}(\pi+8)\,m^2$

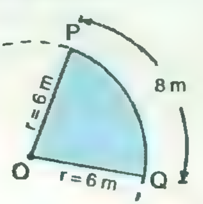
Problema 6 : Calcular el área de la superficie sombreada.



Resolución:

Rpta. $\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)m^2$

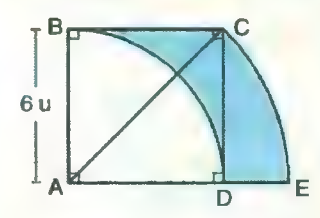
Problema 7 : Calcular el área del sector circular sombreado.



Resolución:

Rpta. 24 m^2

Problema 8 : Calcular el área de la región sombreada si: $AC = AE = 6\sqrt{2}$ u

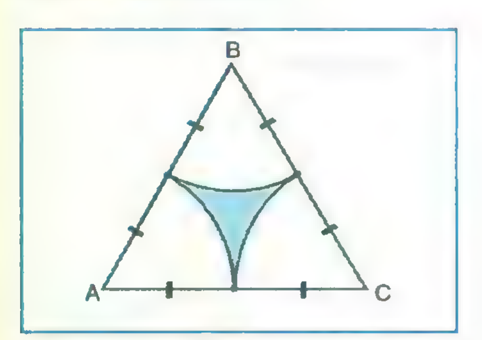


Resolución:

Rpta. 18 u^2.

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA ORGANIZADO POR LAS ACADEMIAS: PITÁGORAS, CÉSAR VALLEJO, TRILCE, ALFA, SIGMA.

Problema 1: Hallar el perímetro de la región sombreada, sabiendo que el área del triángulo equilátero es $16\sqrt{3}$.

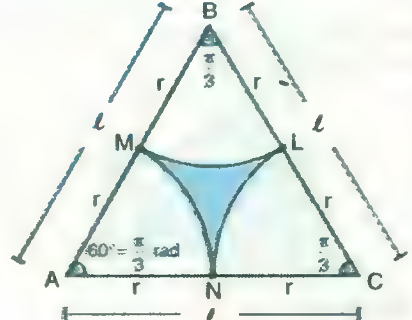


A) 5π B) 12π

C) 16π D) 4π

E) 7π

Resolución:



- En primer lugar, hallamos "ℓ".

  Área Δ ABC $= \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

  $\Rightarrow \quad 16\sqrt{3} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

  $\Rightarrow \quad \boxed{l = 8}$

- Pero $\ell = 2r \quad \Rightarrow \quad 8 = 2r$

  $\Rightarrow \quad \boxed{r = 4}$

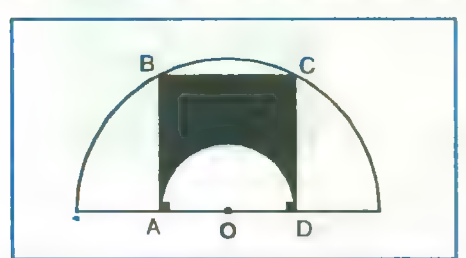
- Del gráfico: Perímetro de la región $= L_{\overset{\frown}{MN}} + L_{\overset{\frown}{NL}} + L_{\overset{\frown}{ML}}$

  Pero: $L_{\overset{\frown}{MN}} = L_{\overset{\frown}{NL}} = L_{\overset{\frown}{ML}}$ = radio x $\angle$ en radianes

  $= 4 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

$\therefore$ Perímetro de la región $= 3\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = 4\pi$ ***Rpta. D***

Problema 2: Calcular el área de la región sombreada en la figura, sabiendo que ABCD es un cuadrado inscrito en el semicírculo de centro "O" y radio "R".



A) $\dfrac{R^2(5\pi-8)}{10}$ B) $\dfrac{4R^2(8+\pi)}{5}$

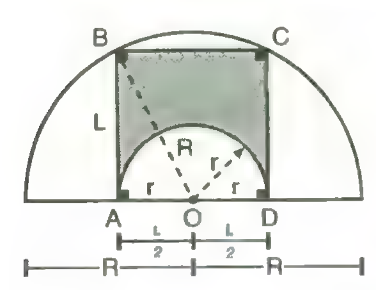
C) $\dfrac{R^2(8-\pi)}{10}$ D) $\dfrac{R^2(5\pi-1)}{10}$

E) $\dfrac{4R^2(\pi+1)}{5}$

Resolución:

- Área sombreada = Área □ ABCD - Área semicírculo menor

- Sea "L" la longitud del lado del cuadrado:



- En el ◺BAO:

$$L^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2=R^2$$

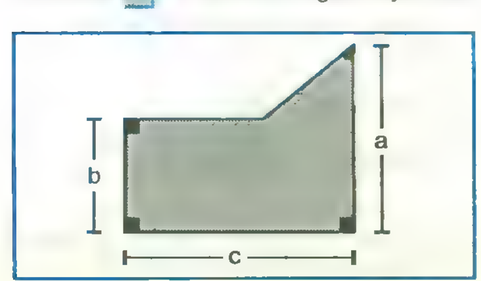
$$\Rightarrow \boxed{L=\frac{2R\sqrt{5}}{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{r=\frac{L}{2}=\frac{R\sqrt{5}}{5}}$$

- Área sombreada = $L^2-\dfrac{1}{2}\pi\cdot r^2 = \left(\dfrac{2R\sqrt{5}}{5}\right)^2-\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{R\sqrt{5}}{5}\right)^2$

$\therefore$ $\boxed{\text{Área sombreada}=\dfrac{R^2(8-\pi)}{10}}$ ***Rpta. C***

Problema 3: El área de la figura adjunta es:

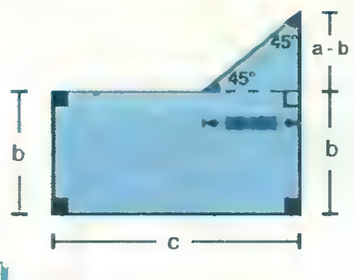


A) a^2+bc B) $ac+cb$

C) $ca+\dfrac{(a-b)^2}{2}$ D) $bc+\dfrac{(a-b)^2}{2}$

E) N.A

Resolución:



- Dividimos la región en un rectángulo y un triángulo rectángulo.

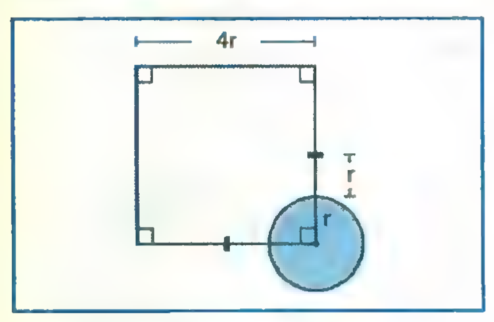
- Luego el área pedida será la suma:

Área ▭ + Área ◺ $= bc + \dfrac{(a-b)(a-b)}{2}$

∴

Rpta. D

Problema 4 : En la figura adjunta el área del círculo es 9π cm^2, luego el área del cuadrado será:



A) 8 cm^2 **B)** 16 cm^2

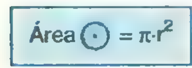
C) 64 cm^2 **D)** 72 cm^2

E) 144 cm^2

Resolución:

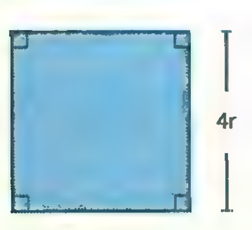
- Primero calculamos el radio del círculo.

Sabemos que:



(Fórmula)

Por dato: $9\not{\pi} = \not{\pi} \cdot r^2$ ⇒ $r = 3$ cm

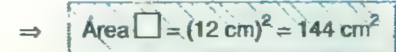


- Ahora como el lado del cuadrado es 4r, su valor será:

$L = 4r = 4(3) = 12$ cm

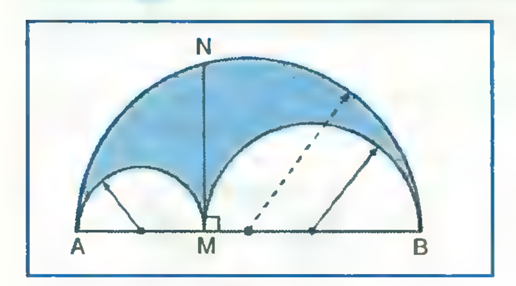
Entonces:

(Fórmula)

⇒ 

Rpta. E

Problema 5: Calcular el área de la región sombreada si $\overline{MN} \perp \overline{AB}$; $MN = 2k$

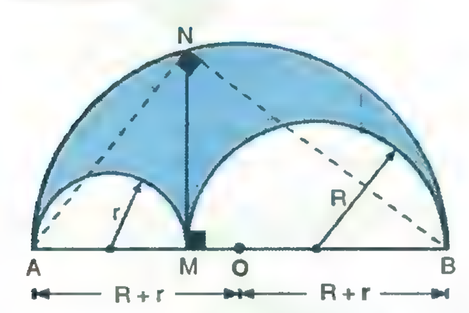


A) $2k^2$ B) $3\pi k^2$

C) $\pi k^2/4$ D) $3\pi k^2/4$

E) πk^2

Resolución:



- El área de la región sombreada es igual al área del semicírculo mayor menos la suma de las áreas de los dos semicírculos menores:

$$\text{Área sombreada} = \frac{\pi(R+r)^2}{2} - \left[\frac{\pi \cdot r^2}{2} + \frac{\pi \cdot R^2}{2}\right] = \frac{\pi}{2}\left[(R+r)^2 - r^2 - R^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Área sombreada} = \pi \cdot R \cdot r} \quad \text{.....❶}$$

- Por relaciones métricas en el ⊿ANB:

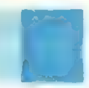
$$\boxed{MN^2 = AM \times MB} \Rightarrow (2k)^2 = (2r)\cdot(2R)$$

$$\Rightarrow \boxed{Rr = K^2} \quad \text{.....❷}$$

- Reemplazando ❶ en❷, se obtiene:

$$\boxed{\text{Área sombreada} = \pi \cdot k^2}$$ ***Rpta. E***

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES



NIVEL I

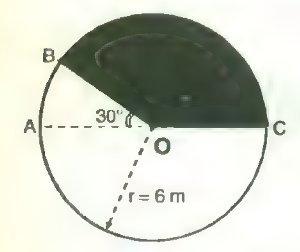
Problema (1): Calcular el área de una corona circular limitada por dos circunferencias concéntricas de radios 2 y 8 metros respectivamente.

A) 40π m^2 **B)** 50π m^2 **C)** 60π m^2
D) 70π m^2 **E)** 80π m^2

Problema (2): Hallar el área de la superficie de una moneda de diámetro 30 mm.

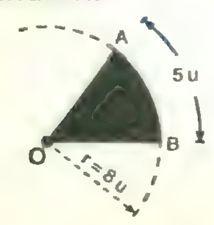
A) 225π mm^2 **B)** 150π mm^2
C) 400π mm^2 **D)** 100π mm^2
E) 125π mm^2

Problema (3): Calcular el área de la región sombreada.



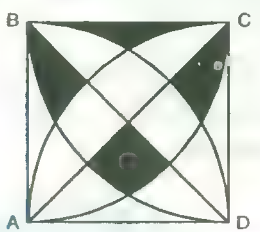
A) 10π m^2
B) 15π m^2
C) 16π m^2
D) 18π m^2
E) 20π m^2

Problema (4): El área del sector circular mostrado es:



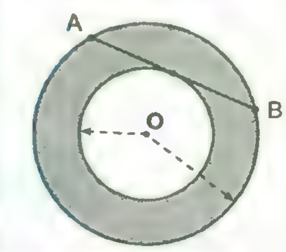
A) 40 u^2
B) 20 u^2
C) 30 u^2
D) 36 u^2
E) 20 πu^2

Problema (5): Si el área del cuadrado ABCD es "S", el área de la región sombreada será:



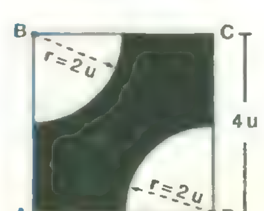
A) S/3 **B)** S/4 **C)** S/5
D) 2S/3 **E)** S/2

Problema (6): Calcular el área de la corona circular si AB = 12 m



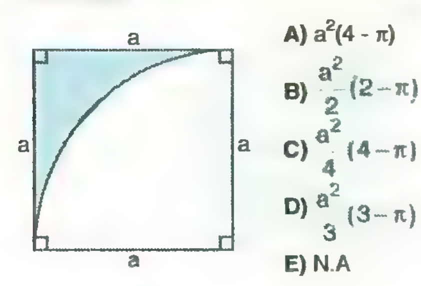
A) 144 m^2
B) 72 m^2
C) 72π m^2
D) 36 m^2
E) 36π m^2

Problema (7): Hallar el área de la parte sombreada si ABCD es un cuadrado.



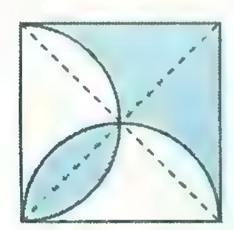
A) $2(18 - \pi)$ u^2
B) $(15 - \pi)$ u^2
C) $(12 - \pi)$ u^2
D) $2(8 - \pi)$ u^2
E) $(16 - \pi)$ u^2

Problema 8 : Hallar el área de la región sombreada.



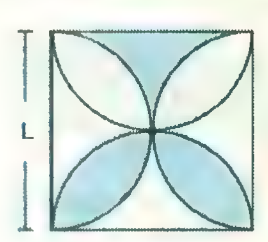
A) $a^2(4 - \pi)$
B) $\frac{a^2}{2}(2-\pi)$
C) $\frac{a^2}{4}(4-\pi)$
D) $\frac{a^2}{3}(3-\pi)$
E) N.A

Problema 9 : Si el área del cuadrado es $10\ m^2$, el área de la parte sombreada es:



A) $3\ m^2$ B) $4\ m^2$ C) $5\ m^2$
D) $6\ m^2$ E) $7{,}5\ m^2$

Problema 10 : El lado del cuadrado es "L". El área de la superficie sombreada es:



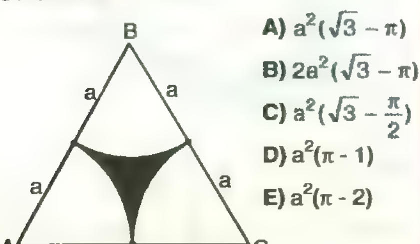
A) $\pi L^2/4$ B) $\pi L^2/2$ C) $\pi L^2/16$
D) $\pi L^2/8$ E) $\pi L^2/12$

Clave de Respuestas

1. C	2. A	3. B	4. B
5. B	6. E	7. D	8. C
9. C	10. D		

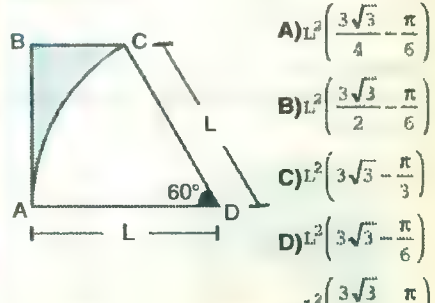
NIVEL II

Problema 1: En la figura el triángulo ABC es equilátero y sus vértices son centros de los arcos. Hallar el área sombreada si: AB = 2a.



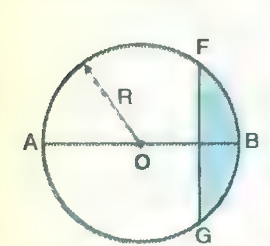
A) $a^2(\sqrt{3} - \pi)$
B) $2a^2(\sqrt{3} - \pi)$
C) $a^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$
D) $a^2(\pi - 1)$
E) $a^2(\pi - 2)$

Problema 2: En la figura adjunta, calcular el área de la región sombreada, si: CD = L.



A) $L^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$
B) $L^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$
C) $L^2\left(3\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$
D) $L^2\left(3\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)$
E) $L^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\right)$

Problema (3): En la figura O es centro del círculo de radio R. Hallar el área del segmento circular sombreado si $\overline{FG}$ es mediatriz de $\overline{OB}$.



A) $R^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

B) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

C) $R^2\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)$

D) $R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

E) $R^2(\pi-2)$

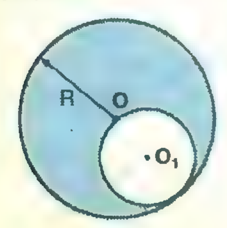
Problema (4): Hallar el área de un círculo que se encuentra inscrito en un cuadrado que tiene como lado la diagonal de un cuadrado de lado igual a $2\sqrt{2}$ m.

A) 2π m^2 B) $2\sqrt{2}\pi$ m^2 C) 3π m^2
D) $3\sqrt{2}\pi$ m^2 E) 4π m^2

Problema (5): El perímetro de un cuadrado es igual a la longitud de la circunferencia correspondiente a un círculo. Determínese la razón del área del cuadrado al área del círculo.

A) π B) $\pi/2$ C) $\pi/3$
D) $\pi/4$ E) $\pi/6$

Problema (6): calcular la razón entre el área de la región sombreada y la del círculo pequeño.



A) 2

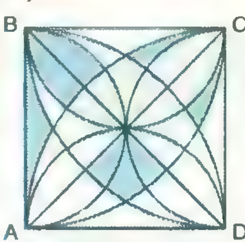
B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

Problema (7): Si: $\ell = 2/\pi$, Calcular el área de la región sombreada (ABCD es un cuadrado)



A) $1/\pi$

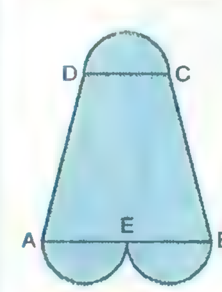
B) $2/\pi$

C) $4/\pi$

D) $1/\pi^2$

E) $2/\pi^2$

Problema (8): Calcular el área de región sombreada si: DC = 10 m ; AB = 20 m y AD = 13 m. (Los semicírculos son iguales).



A) $15(3\pi+24)$ m^2

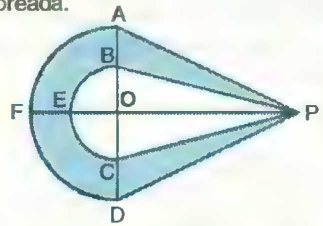
B) $\frac{15}{2}(5\pi+24)$ m^2

C) $\frac{15}{2}(3\pi+8)$ m^2

D) $\frac{15}{2}(\frac{5}{2}\pi+4)$ m^2

E) N.A.

Problema (9): En la figura mostrada: AB = BO = OC = CD = OE = EF = 3 m y OP = 8 m. Calcular el área de la región sombreada.

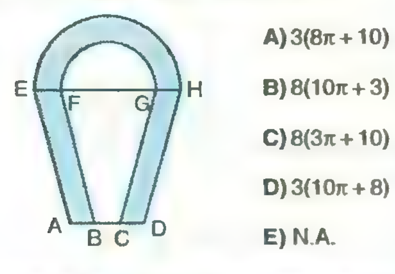


A) $\frac{2}{3}(9\pi+16)$ B) $\frac{3}{2}(9\pi+16)$

C) $3(9\pi+8)$ D) $\frac{3}{4}(3\pi+48)$

E) N.A.

Problema 10: En la figura mostrada: AB = BC = CD = EF = GH = 4 m ; EH = 16 m y la altura del trapecio BCGF es 10 m. Calcular el área de la región sombreada.



A) $3(8\pi + 10)$

B) $8(10\pi + 3)$

C) $8(3\pi + 10)$

D) $3(10\pi + 8)$

E) N.A.

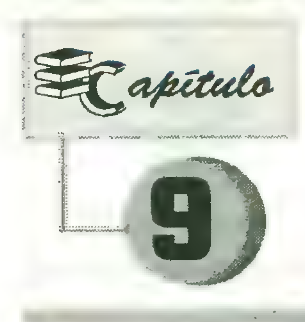
Clave de Respuestas

1. C	2. E	3. D	4. E
5. D	6. B	7. D	8. B
9. B	10. C		

¿SABÍAS QUE...

... es más facil recordar el nombre de los polígonos si se recuerda el prefijo correspondiente?

n	*prefijo*	*nombre*
3	tres	triángulo
4	cuadri	cuadrángulo
5	penta	pentágono
6	hexa	hexágono
7	hepta	heptágono
8	octo	octógono
9	enea	eneágono
10	deca	decágono
11	endeca	endecágono
12	dodeca	dodecágono
15	pentadeca	pentadecágono
20	icosa	icoságono



GEOMETRÍA DEL ESPACIO

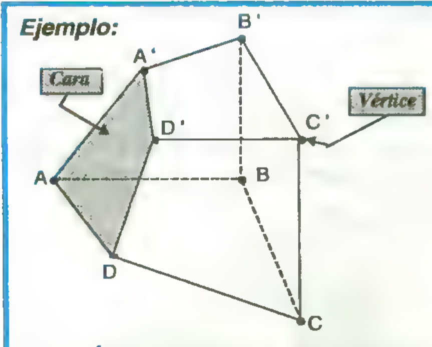
9.1 INTRODUCCIÓN

La **Geometría del Espacio** estudia a las figuras geométricas cuyos puntos que la constituyen se encuentran en diferentes planos.

9.1.1 POLIEDRO

Se llama **Poliedro** a la porción de espacio limitado completamente por regiones poligonales situados en distintos planos. Dichas regiones poligonales vienen a ser las **caras** del poliedro. Los lados de las caras con las **aristas** del poliedro. **Todo poliedro tiene por lo menos 4 caras.**

Ejemplo:



En la figura vemos a un poliedro cuyas caras son cuadriláteros.

- **Caras:** AA'D'D; A'B'C'D'; ..., etc.
  Total: 6 caras
- **Vértices:** A, B, C, D, A', B', C' y D'
  Total: 8 vértices
- **Aristas:** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$.
  Total: 12 aristas.

- **Ángulos diedros.-** Son los ángulos que forman dos caras consecutivas del poliedro. **Ejemplo**; diedro $\overline{AB}$, diedro $\overline{BC}$, etc. Como a cada arista le corresponde un ángulo diedro, entonces en este poliedro habrán 12 ángulos diedros.

9.1.2 POLIEDROS REGULARES.- Son aquellos poliedros donde todas sus caras son **polígonos regulares congruentes** entre si y la medida de todos sus ángulos diedros son congruentes. **Sólo existen 5 poliedros regulares**, que son los siguientes:

Observaciones:

- *El número de caras laterales es igual número de lados del polígono de la base*
- *Los lados de las bases se llaman **aristas básicas**.*
- *Los lados de las caras laterales se llaman **aristas laterales**. Estas son todas iguales y paralelas.*
- ***Altura** del prisma es el segmento perpendicular a las bases comprendido entre éstas.*
- ***Diagonal** de un prisma es la recta que une dos vértices no situados en la misma cara.*
- *El nombre de un prisma se da según el polígono de la base. Así si la base es un pentágono: **Prisma pentagonal**.*

9.2.1 CLASIFICACIÓN DE LOS PRISMAS

* **Prisma Recto.-** Si las aristas laterales son perpendiculares a las bases. En este caso la altura es igual a la longitud de una arista lateral.

** **Prisma Oblicuo.-** Si las aristas laterales son oblicuas a las bases.

*** **Prisma Regular.-** Es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares. Por ejemplo si la base es un cuadrado se le llama: **prisma cuadrangular regular** y si es un exágono regular el prisma se llama: **prisma exagonal regular**, etc.

9.2.2 ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN PRISMA

* **Área Lateral de un Prisma (S_L)** Es la suma de las áreas de sus caras laterales.

** **Área Total de un Prisma (S_T)** Es la suma del área lateral y las áreas de las dos bases.

9.2.3 TEOREMAS PARA CALCULAR EL ÁREA LATERAL, TOTAL Y EL VOLUMEN DE UN PRISMA

1. **Área Lateral.-** El área lateral de un prisma recto es igual al perímetro de su base multiplicado por la altura.

$$S_L = 2p_b \times h$$

S_L = área lateral del prisma

$2p_b$ = Perímetro de la base

h = altura

2. **Área Total**

$$S_T = S_L + 2S_b$$

S_T = área total

S_L = área lateral

S_b = área de una de las bases

Observaciones:

- *El número de caras laterales es igual número de lados del polígono de la base.*
- *Los lados de las bases se llaman **aristas básicas***
- *Los lados de las caras laterales se llaman **aristas laterales**. Estas son todas iguales y paralelas.*
- ***Altura** del prisma es el segmento perpendicular a las bases comprendido entre éstas.*
- ***Diagonal** de un prisma es la recta que une dos vértices no situados en la misma cara.*
- *El nombre de un prisma se da según el polígono de la base. Así si la base es un pentágono: **Prisma pentagonal**.*

9.2.1 CLASIFICACIÓN DE LOS PRISMAS

* **Prisma Recto.-** Si las aristas laterales son perpendiculares a las bases. En este caso la altura es igual a la longitud de una arista lateral.

** **Prisma Oblicuo.-** Si las aristas laterales son oblicuas a las bases.

*** **Prisma Regular.-** Es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares. Por ejemplo si la base es un cuadrado se le llama: **prisma cuadrangular regular** y si es un exágono regular el prisma se llama: **prisma exagonal regular**, etc.

9.2.2 ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN PRISMA

* **Área Lateral de un Prisma (S_L)** Es la suma de las áreas de sus caras laterales.

** **Área Total de un Prisma (S_T)** Es la suma del área lateral y las áreas de las dos bases.

9.2.3 TEOREMAS PARA CALCULAR EL ÁREA LATERAL, TOTAL Y EL VOLUMEN DE UN PRISMA

1. **Área Lateral.-** El área lateral de un prisma recto es igual al perímetro de su base multiplicado por la altura.

$$S_L = 2p_b \times h$$

S_L = área lateral del prisma

$2p_b$ = Perímetro de la base

h = altura

2. **Área Total**

$$S_T = S_L + 2S_b$$

S_T = área total

S_L = área lateral

S_b = área de una de las bases

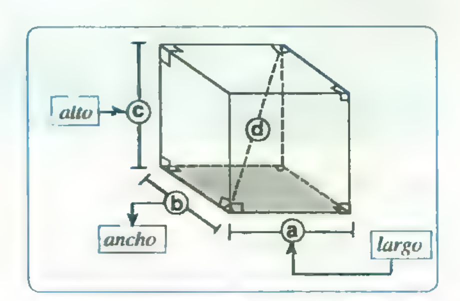
3. Volumen.- El volumen de un prisma es igual al área de la base por la altura.

$$V = S_b \times h$$

V = volumen del prisma
S_b = área de la base del prisma
h = altura

PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR

Se le llama también **ortoedro o rectoedro**. Es un prisma en donde todas sus caras son rectángulos. Para calcular el área lateral, el área total y el volumen del rectoedro, aplicamos las mismas fórmulas que en el prisma. Veamos:



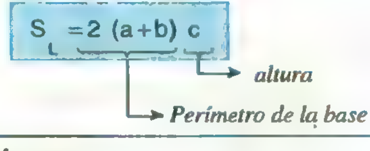
FÓRMULAS BÁSICAS EN EL PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR:

1. Diagonal (D)

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

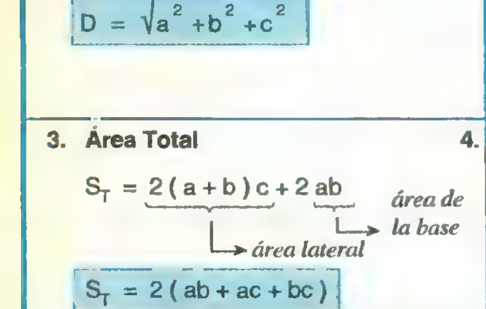
2. Área Lateral

$$S_L = 2\,(a+b)\,c$$



3. Área Total

$$S_T = 2\,(a+b)\,c + 2\,ab$$



$$S_T = 2\,(ab + ac + bc)$$

4. Volumen

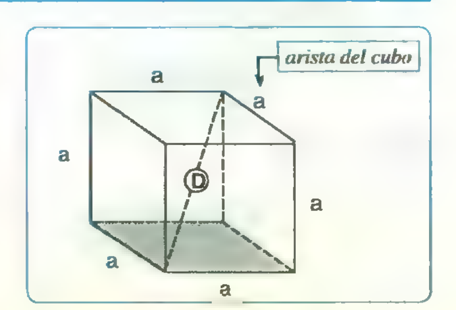
$$V = a\,b\,c$$

altura

área de la base

CASO PARTICULAR.- Cuando todas las caras de un paralelepípedo rectangular son cuadrados, éste recibe el nombre particular de: **CUBO O HEXAEDRO REGULAR.**

- **Diagonal** ➡ $D = a\sqrt{3}$
- **Área Total** ➡ $S_T = 6\,a^2$
- **Volumen** ➡ $V = a^3$

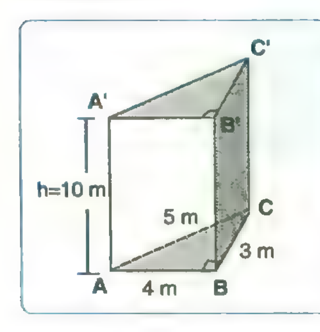


PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M. SOBRE PRISMAS

Problema 1: La base de un prisma es un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 metros respectivamente. La altura del prisma es de 10 metros. Calcular el área lateral, área total y el volumen del prisma.

A) 110 m^2, 128 m^2, 80 m^3 **B)** 120 m^2, 132 m^2, 60 m^3 **C)** 140 m^2, 150 m^2, 90 m^3
D) 108 m^2, 120 m^2, 100 m^2 **E)** 104 m^2, 118 m^2, 120 m^3

Resolución:



- Sea la base del prisma el ◺ABC, en el cual por el Teorema de Pitágoras:

$$AC = \sqrt{4^2+3^2} = 5m$$

- **Área Lateral:**

$$S_L = 2p_b \times h \quad \begin{cases} 2p_b = 3\ m + 4\ m + 5\ m = 12\ m \\ h = 10\ m \end{cases}$$

$$S_L = 12\ m \times 10\ m \Rightarrow \boxed{S_L = 120\ m^2} \ldots (1)$$

- **Área Total**

$$S_T = S_L + 2S_b$$

$$S_T = 120\ m^2 + 2\,(6\ m^2) \quad \begin{cases} S_L = 120\ m^2 \\ S_b = \dfrac{3m \times 4m}{2} = 6m^2 \end{cases}$$

$$\boxed{S_T = 132\ m^2} \ldots (2)$$

- **Volumen**

$$V = S_b \times h \quad \begin{cases} S_b = 6\ m^2; \\ h = 10\ m \end{cases}$$

$$V = 6\ m^2 \times 10\ m$$

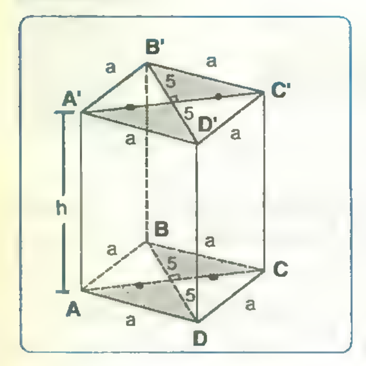
$$\boxed{V = 60\ m^3} \ldots (3)$$

- Finalmente de 1, 2 y 3: **Rpta. B**

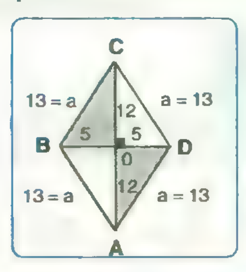
Problema 2: La base de un prisma cuadrangular es un rombo de 52 m de perímetro y cuya diagonal menor mide 10 m. Si la altura del prisma es igual a la diagonal mayor de la base, hallar el área lateral, área total y volumen del prisma.

A) 1 482 m^2, 1 844 m^2, 1 280 m^3 **B)** 1 804 m^2, 1 908 m^2, 1 480 m^3
C) 1 608 m^2, 1 804 m^2, 1 288 m^3 **D)** 1 248 m^2, 1 488 m^2, 2 880 m^3
E) 1 648 m^2, 1 408 m^2, 3 840 m^3

Resolución:



- En primer lugar trabajamos en la base del prisma:



Recuerda Que:

En el rombo los 4 lados son iguales y las diagonales se cortan perpendicularmente en su punto medio.

- Según datos: Perímetro ◊ ABCD = 52 m

  ➡ a + a + a + a = 52 m ➡ **a = 13 m**

  Luego en el ⊿BOC: CO = 12 m ➡ **AC = 24 m**

- Según datos h = diagonal mayor = AC ➡ **h = 24 m**

- **Área Lateral:**

$$S_L = 2p_b \times h \quad \begin{cases} 2p_b = 13\text{ m} + 13\text{ m} + 13\text{ m} + 13\text{m} \\ 2p_b = 52\text{ m} \end{cases}$$

$S_L = 52\text{ m} \times 24\text{ m}$ ➡ $S_L = 1\,248\text{ m}^2$

- **Área Total**

$$S_T = S_L + 2S_b \qquad S_b = \text{Área}◊ABCD = \frac{24\text{m} \times 10\text{m}}{2}$$

$$S_T = 1\,248\text{ m}^2 + 2\,(120\text{ m}^2) \qquad S_b = 120\text{ m}^2$$

$S_T = 1\,488\text{ m}^2$

- **Volumen**

$V = S_b \times h$

$V = 120\text{ m}^2 \times 24\text{ m}$

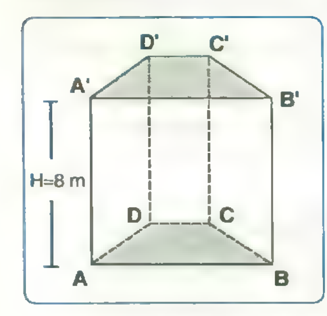
$V = 2\,880\text{ m}^3$

Rpta. D

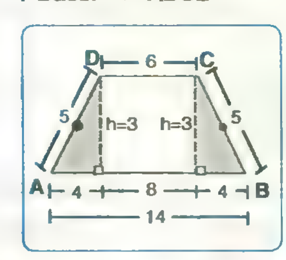
Problema 3: Calcular el área lateral de un prisma cuadrangular de 8 m de altura, sabiendo que la base es un trapecio isósceles cuyas bases miden 6 y 14 metros y cuya altura mide 3 metros.

A) 140 m² **B)** 120 m² **C)** 240 m² **D)** 280 m² **E)** 320 m²

Resolución:



♦ Base: ⏢ ABCD



- En el ◺, por Pitágoras

$$AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

- Luego:

Perím. ⏢ABCD =
14 + 6 + 5 + 5

Perím. ⏢ABCD = 30 m

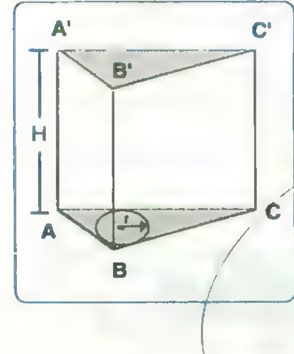
♦ Nos piden calcular el área lateral: $S_L = 2p_b \times H$, pero $2p_b$ = Perímetro ⏢ ABCD = 30 m

∴
$S_L = 30\ m \times 8\ m = 240\ m^2$ **Rpta. C**

Problema 4: El volumen y el área lateral de un prisma triangular son de 50 m³ y 200 m² respectivamente. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en la base del prisma.

A) 0,5 m **B)** 0,25 m **C)** 1 m **D)** 2 m **E)** 3 m

Resolución:



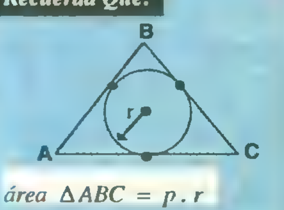
♦ Sabemos que:

* $V = S_b \times H$
$V = \text{área } \Delta ABC \times H$

$V = p \cdot r \cdot H$ ... (1)

** $S_L = 2p_b \times H$

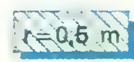
$S_L = 2p \cdot H$ ... (2)



$2p_b$ = Perímetro de la base
= Perímetro del Δ ABC
= 2p

♦ Dividimos miembro a miembro 1 y 2

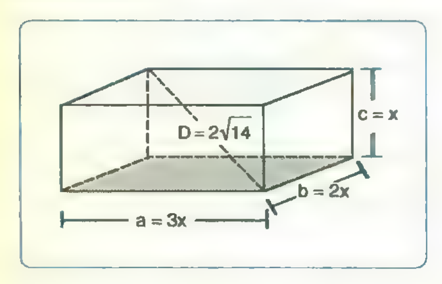
$$\frac{V}{S_L} = \frac{p \cdot r \cdot H}{2p \cdot H} = \frac{r}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{V}{S_L} = \frac{r}{2}} \ \text{... (3)}$$

♦ Reemplazamos los datos en 3: $\dfrac{50\ m^3}{200\ m^2} = \dfrac{r}{2}$ ➡ 
$r = 0{,}5\ m$ **Rpta. A**

Problema 5: El largo de un paralelepípedo rectangular es el triple de la altura y el ancho es el doble de la altura. Si la diagonal mide $2\sqrt{14}$ m, el volumen del paralelepípedo es:

A) 50 m^3 **B)** 24 m^3 **C)** 36 m^3 **D)** 64 m^3 **E)** 48 m^3

Resolución:



- Sean las dimensiones:

  a = largo; b = ancho, c = altura.

  Si: $c = x \Rightarrow a = 3x$ y $b = 2x$

- El volumen pedido es:

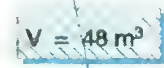
  $V = abc \Rightarrow V = (3x)(2x)x$

  $\boxed{V = 6x^3}$ **... (1)**

- Por la propiedad de la diagonal: $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\left(2\sqrt{14}\right)^2 = (3x)^2 + (2x)^2 + x^2 \Rightarrow \boxed{x = 2m} \text{ ... (2)}$$

- Reemplazando **2** en **1** $V = 6\,(2m)^3$ ➡ $\boxed{V = 48\ m^3}$ **Rpta. E**



Problema 6: Las dimensiones de una cajita de fósforos son a, b y c.
Si: $a + b + c = 12$ cm, y $a^2 + b^2 + c^2 = 56$ cm^2, calcular el área total de la cajita.

A) 88 cm^2 **B)** 72 cm^2 **C)** 60 cm^2 **D)** 90 cm^2 **E)** 108 cm^2

Resolución:

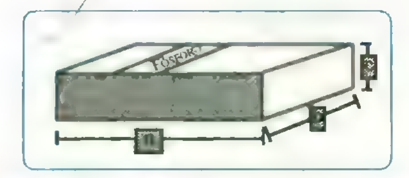
- Como la cajita de fósforos tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, podemos aplicar la siguiente fórmula:

  $\boxed{S_T = 2\,(ab + ac + bc)}$ **... (1)**

- Según datos del problema:

  $\boxed{a + b + c = 12 \text{ cm}}$ **... (2)**

  $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 56 \text{ cm}^2}$ **... (3)**



Recuerda Que:

Cuadrado de un Trinomio

$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2\,(AB + AC + BC)$

- Elevando (2) al cuadrado, miembro a miembro:

$$(a + b + c)^2 = (12\ cm)^2$$

$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{56\ cm^2} + \underbrace{2\ (ab + ac + bc)}_{S_T} = 144\ cm^2$$

$$56\ cm^2 + S_T = 144\ cm^2 \Rightarrow \boxed{S_T = 88\ cm^2}$$ **Rpta. A**

Problema 7: Todas las aristas de un cubo suman 48 cm. Calcular la diagonal, el área total y el volumen de dicho cubo.

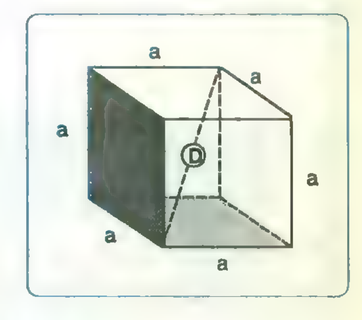
A) $2\sqrt{3}$ cm, 48 cm², 72 cm³ **B)** 5 cm, 45 cm², 125 cm³

C) $4\sqrt{3}$ cm, 96 cm², 64 cm³ **D)** $6\sqrt{2}$ cm, 56 cm², 96 cm³ **E)** N.A.

Resolución:

- El cubo tiene 12 aristas iguales. Entonces:

$$12a = 48\ cm \Rightarrow \boxed{a = 4\ cm}$$



- Cálculo de la diagonal del cubo:

$$D = a\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{D = 4\sqrt{3}\ cm}$$

- Cálculo del área total:

$$S_T = 6a^2 \Rightarrow \boxed{S_T = 6\ (4\ cm)^2 = 96\ cm^2}$$

- Volumen: $V = a^3 \Rightarrow \boxed{V = (4\ cm)^3 = 64\ cm^3}$ **Rpta. C**

TALLER DE PROBLEMAS Nº 40

Problema 1 : La base de un prisma triangular es un triángulo equilátero de 2 cm de lado. La altura del prisma es 10 cm. Calcular el área lateral, área total y el volumen del prisma.

Resolución:

Rpta. $S_L = 60\ cm^2$; $S_T = (60 + 2\sqrt{3})\ cm^2$; $V = 10\sqrt{3}\ cm^3$

Problema 2 : El largo de un paralelepípedo rentángulo es el triple de la altura y el ancho es el doble de la altura. Si una diagonal mide 42 cm, el área lateral de dicho paralelepípedo es:

Resolución:

Rpta. $1\,260\ cm^2$

Problema 3 : Calcular el volumen de un prisma exagonal regular cuyo perímetro de su base es 24 cm y su altura es 12 cm.

Resolución:

Rpta. $288\sqrt{3}\ cm^3$

Problema 4 : Si a, b y c son las dimensiones de un paralelepípedo rectangular, calcular su área total si: $a + b + c = 12$ m y $a^2 + b^2 + c^2 = 50\ m^2$

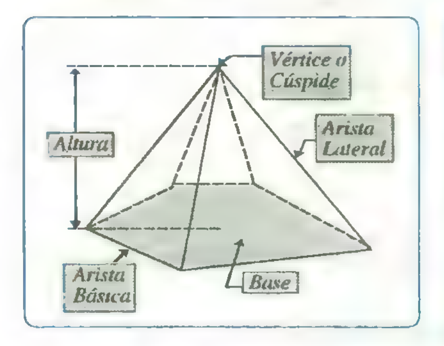
Resolución:

Rpta. $94\ m^2$

9.3 PIRÁMIDE

La Pirámide es un poliedro que tiene por base a un polígono cualquiera y las caras laterales son triángulos que tienen un vértice común.

Ejemplo: Pirámide Pentagonal



Observaciones:

- *Los lados de la **base** se llaman **aristas básicas**.*
- *El número de caras laterales es igual al número de lados de la base.*
- *El nombre de la pirámide depende del polígono de la base. Si la base es un triángulo se llama: **Pirámide triangular o tetraedro**, si es un cuadrilátero, **pirámide cuadrangular**, etc.*

9.3.1 TEOREMAS

1. Área Lateral

S_L = Suma de las áreas de las caras laterales.

2. Área Total

S_T = área lateral + área de la base

3. Volumen.- El volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura.

$$V = \frac{1}{3} S_b \times h$$

Observación : *Hemos visto que para calcular el área lateral y el área total de una pirámide cualquiera no hay una fórmula particular, sólo tenemos que aplicar la definicion según los datos del problema.*

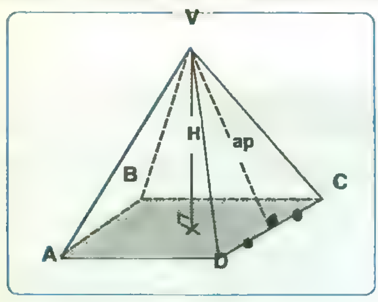
9.3.2 PIRÁMIDE REGULAR

Una pirámide es regular cuando **la base es un polígono regular** y cuando además todas **las aristas laterales son congruentes**, o sea de igual longitud.

A partir de esta definición deducimos que todas las caras de una pirámide regular son triángulos isósceles congruentes y que la altura cae en el centro de la base.

Apotema de una pirámide regular es la perpendicular que se traza de su vertice a uno de los lados de la base.

Ejemplo: Pirámide Cuadrangular Regular



Notación: Pirámide V - ABCD

Base: Cuadrado ABCD

Altura: H

apotema: ap

Teorema: En toda pirámide regular el área lateral es igual al semiperímetro de la base por el apotema.

$$S_L = p_b \times ap$$

p_b = semiperímetro de la base, o sea: (perímetro de la base)/2

ap = apotema

NOTA: *Esta fórmula sólo es válida en la pirámide regular y no en cualquier otra pirámide.*

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M. SOBRE PIRÁMIDES

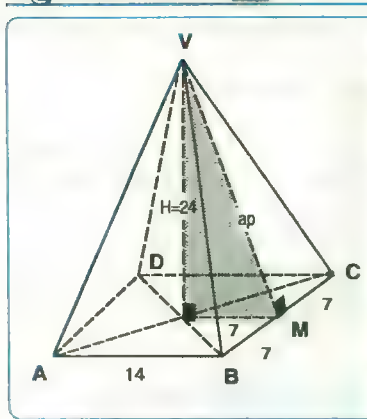
Problema 1: En una pirámide cuadrangular regular el lado de la base mide 14 cm y la altura mide 24 cm. Calcular el área lateral, el área total y el volumen de la piràmide.

A) 700 cm^2, 896 cm^2, 1568 cm^3
B) 600 cm^2, 786 cm^2, 1486 cm^3
C) 672 cm^2, 848 cm^2, 1458 cm^3
D) 450 cm^2, 644 cm^2, 1200 cm^3
E) 500 cm^2, 600 cm^2, 1400 cm^3

Resolución:

- En primer lugar calculamos el apotema **(ap)**

En el ◺VOM, por Pitágoras: $ap = \sqrt{7^2 + 24^2} \Rightarrow \boxed{ap = 25\ \text{cm}}$



- Ahora calculamos el área lateral

$$S_L = p_b \times ap \qquad \begin{cases} p_b = \dfrac{14+14+14+14}{2} \\ p_b = 28 \text{ cm} \end{cases}$$

$$S_L = 28 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$$

$$S_L = 700 \text{ cm}^2$$

Recuerda Que:

* *La base de una **pirámide regular** es un **polígono regular**.*
* *Una pirámide **cuadrangular regular** tiene como base a un **cuadrado**.*
* *En una pirámide regular la **altura** trazada desde el vértice cae en el **centro de la base**.*

- **Área Total:**

$$S_T = S_L + S_b \qquad \begin{cases} S_b = \text{área } \square \text{ ABCD} \\ S_b = 14^2 = 196 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$S_T = 700 \text{ cm}^2 + 196 \text{ cm}^2$$

$$S_T = 896 \text{ cm}^2$$

- Volumen

$$V = \frac{1}{3} S_b \times H \qquad \text{Sabemos que } \begin{cases} S_b = 196 \text{ cm}^2 \\ H = 24 \text{ cm} \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3} \times 196 \times 24$$

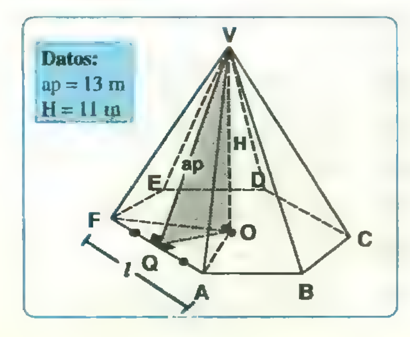
$$V = 1\,568 \text{ cm}^3$$

Rpta. A

Problema 2: El apotema y la altura de una pirámide exagonal regular mide 13 y 11 metros respectivamente. Calcular el área lateral de la pirámide.

A) 298 m^2 **B)** 324 m^2 **C)** 412 m^2 **D)** 208 m^2 **E)** 312 m^2

Resolución:



- Según datos del problema la base es un exágono regular; sea «l» su lado, entonces:

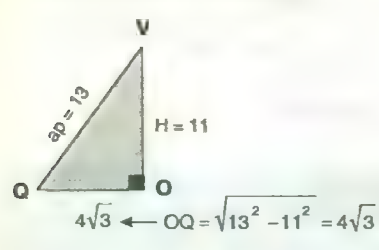
$$p_b = \text{semiperímetro} \hexagon \text{ ABCDEF} = \frac{6l}{2} = 3l$$

$$S_L = p_b \times ap \quad \Rightarrow \quad S_L = 3l \times 13$$

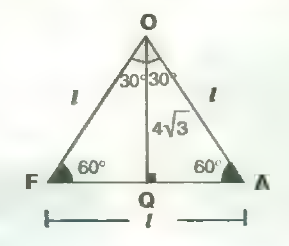
$$S_L = 39\,l \quad \text{... (1)}$$

- Vemos que para calcular la incógnita (o sea "S_L") nos falta conocer "l". Entonces:

I. En el ◺VOQ: por Pitágoras



II. En el Δ FOA, equilátero



Por el ◺ notable de: 30° y 60°

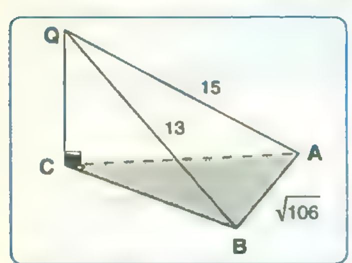
$$4\sqrt{3} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

$$\boxed{l = 8} \quad ...(2)$$

- Reemplazamos (2) en (1): $S_L = 39 \times 8$ ➡ $\boxed{S_L = 312\ m^2}$ **Rpta. E**

Problema 3 : Calcular el volumen de la pirámide Q - ABC sabiendo que:

$m\angle QCA = m\angle QCB = m\angle ACB = 90°$, además. $AQ = 15$ m, $AB = \sqrt{106}$ m, $QB = 13$m.



A) 60 m³ B) 70 m³
C) 80 m³ D) 90 m³
E) 100 m³

Resolución:

- El volumen pedido es:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S_b \cdot H} \quad \begin{cases} S_b = \text{Área } \Delta \ ABC = \dfrac{ab}{2} \\ H = \text{Altura} \end{cases}$$

Q
H
15
13
b
A
C
a
√106
B

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot H \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{6}abH} ...(1)$$

- Por el teorema de Pitágoras:

◺ ABC: $a^2 + b^2 = \sqrt{106}^{\,2}$

➡ $\boxed{a^2 + b^2 = 106}$ ... (2)

◺ QCA : $H^2 + b^2 = 15^2$

➡ $\boxed{H^2 + b^2 = 225}$ ... (3)

◺ QCB: $H^2 + a^2 = 13^2$

➡ $\boxed{H^2 + a^2 = 169}$ ... (4)

- Sumando miembro a miembro: 2, 3 y 4:

$$2(a^2 + b^2 + H^2) = 500$$

➡ $\boxed{a^2 + b^2 + H^2 = 250}$ ... (5)

- Reemplazando: 2 en 5 ➡ $106 + H^2 = 250$ ➡ $H = 12\ m$

  3 en 5 ➡ $a^2 + 225 = 250$ ➡ $a = 5\ m$

  4 en 5 ➡ $b^2 + 169 = 250$ ➡ $b = 9\ m$

- Finalmente, estos valores hallados lo reemplazamos en **1**

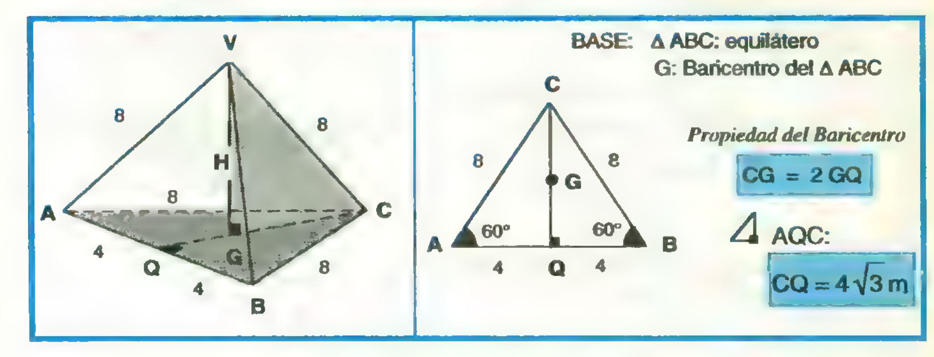
$$V = \frac{1}{6} \times 5\ m \times 9\ m \times 12\ m \Rightarrow V = 90\ m^3$$ **Rpta. D**

Problema 4: La arista de un tetraedro regular mide 8 m. Calcular la altura del tetraedro.

A) $\frac{8}{3}\sqrt{6}$ m B) $2\sqrt{3}$ m C) 9 m D) 6 m E) $2\sqrt{6}$ m.

Resolución:

- En primer lugar debemos recordar que el **tetraedro regular**, es una pirámide triangular donde todas sus aristas, que en total son seis, son iguales. Además **la altura cae en el baricentro de la base.**



- Por la propiedad del baricentro: CG = 2GQ, entonces $CG = \frac{2}{3}CQ$

$$\Rightarrow CG = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3}\ m = \frac{8}{3}\sqrt{3}\ m$$

- En el ⊿ VGC, por Pitágoras: $H^2 + CG^2 = 8^2 \Rightarrow H^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 8^2$

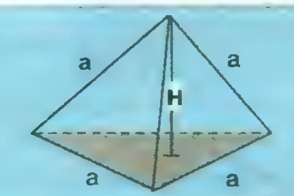
$$\Rightarrow H^2 + \frac{64}{3} = 64 \Rightarrow H^2 = \frac{128}{3} \Rightarrow H = \frac{8\sqrt{6}}{3}\ m$$ **Rpta. A**

NOTA: De la misma forma como se ha resuelto este problema, se llega ha demostrar la siguiente propiedad:

PROPIEDAD:

En todo tetraedro regular, la altura se calcula en función de la arista con la siguiente fórmula.

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



NOTA: Con esta fórmula el problema 4 se resuelve en forma inmediata.

Problema 5: Calcular el volumen de un tetraedro regular cuya arista mide 6 m.

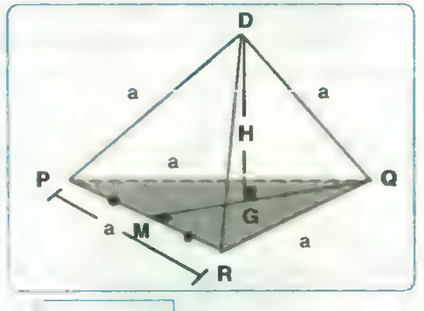
A) 18 m^3 **B)** $18\sqrt{2}\ m^3$ **C)** $12\sqrt{3}\ m^3$ **D)** 16 m^3 **E)** $24\sqrt{2}\ m^3$

Resolución:

- Sea el tetraedro regular D - PQR. Para calcular su volumen aplicamos la fórmula de la Pirámide:

$$V = \frac{1}{3} S_b \times H \quad \text{... (1)}$$

S_b = área de la base PQR
H = altura



- Por la propiedad de la altura del tetraedro regular (problema anterior)

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \text{... (2)}$$

- Calculamos el área de la base PQR: $S_b = \text{Área } \Delta \text{ PQR} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ... (3)

- Reemplazamos **2** y **3** en **1**:

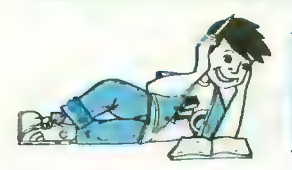
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

(fórmula para calcular el volumen de un tetraedro regular en función de su arista "a")

- Reemplazamos el dato $a = 6$ m en la fórmula obtenida:

$$V = \frac{(6m)^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = 18\sqrt{2}\ m^3$$

Rpta B



TALLER DE PROBLEMAS Nº 41

Problema 1 : En una pirámide cuadrangular regular la arista básica mide 12 cm y la altura mide 8 cm. Calcular el área lateral, el área total y el volumen de la pirámide.

Resolución:

Rpta. $S_L = 240\ cm^2$, $S_T = 384\ cm^2$, $V = 384\ cm^3$

Problema 2 : La apotema de una pirámide exagonal regular excede a la altura en 1 cm. Si la arista básica mide 6 cm, ¿cuánto mide la apotema?

Resolución:

Rpta. ap = 14 cm

Problema 3 : La altura de un tetraedro regular es de $\sqrt{6}$ metros. El volumen del tetraedro es:

Resolución:

Rpta. $V = \frac{9\sqrt{2}}{4} m^3$

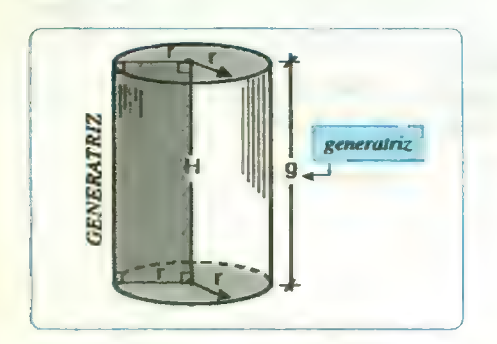
Problema 4 : En una pirámide pentagonal regular el perímetro de la base es 50 cm y la arista lateral mide 13 cm. Calcular el área lateral.

Resolución:

Rpta. $S_L = 300\ cm^2$

9.4 CILINDRO CIRCULAR RECTO

El cilindro recto o simplemente cilindro, es un sólido de revolución que se genera cuando un rectángulo gira 360° alrededor de uno de sus lados (eje). Tiene dos bases que son 2 círculos de igual radio.



ELEMENTOS:

r = radio de la base
g = generatriz
H = altura

$g = H$

9.4.1 TEOREMAS.- Son análogos que en el caso del prisma recto. Veamos:

1. Área Lateral

S_L = perímetro de la base x altura

$$S_L = 2\pi r g$$

Altura
Perímetro de la base (longitud de la circunferencia)

2. Área Total

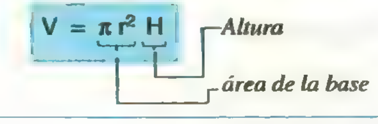
$$S_T = S_L + 2\,S_b$$

$$S_T = 2\pi rg + 2\,\pi r^2$$

$$S_T = 2\pi r\,(g + r)$$

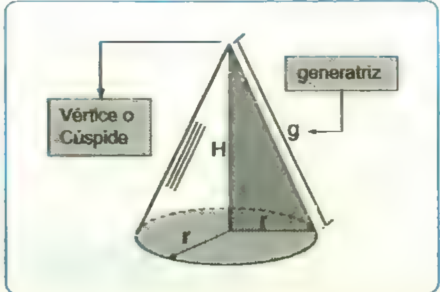
3. Volumen

V = área de la base x altura



9.5 CONO CIRCULAR RECTO

Es un sólido de revolución que se genera cuando un triángulo rectángulo gira una vuelta completa alrededor de uno de sus catetos. Tiene una sola base que es un círculo.

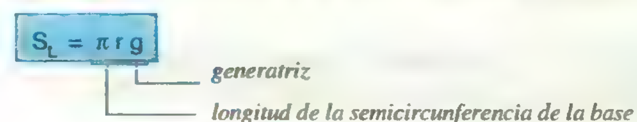


Observación:

- *En el CONO:* $H < g$
- *Por el teorema de Pitagoras:* $H^2 + r^2 = g^2$

9.5.1 TEOREMAS.- Son análogos que en el caso de la pirámide regular veamos:

1. **Área Lateral.-** Es igual a la longitud de la semicircunferencia (semiperímetro) de la base por la generatriz (apotema en el caso de la pirámide regular).



2. **Área Total**

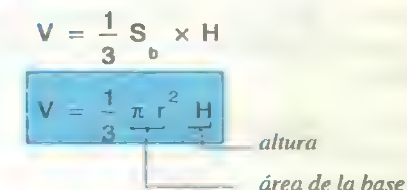
$$S_T = S_L + S_b$$

$$S_T = \pi rg + \pi r^2$$

$$S_T = \pi r\,(g + r)$$

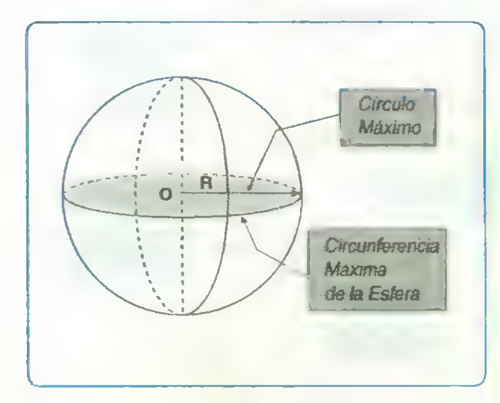
3. **Volumen**

$$V = \frac{1}{3} S_b \times H$$



9.6 ESFERA

Es un sólido de revolución que se genera cuando un semicírculo gira 360º alrededor de su diámetro.



R = radio de la esfera

O = centro de la esfera

Observaciones:

- ***Círculo máximo.*** *Es una sección de la esfera que pasa por el centro.*
- ***Circunferencia máxima.-*** *Es la circunferencia del círculo máximo.*
- ***Radio de la esfera.-*** *Es un segmento (o su longitud) que une el centro con un punto cualquiera de la superficie esférica.*

9.6.1 TEOREMAS:

1. **Área de la Superficie Esférica**.- O simplemente área de la esfera:

$$S = 4\pi R^2$$

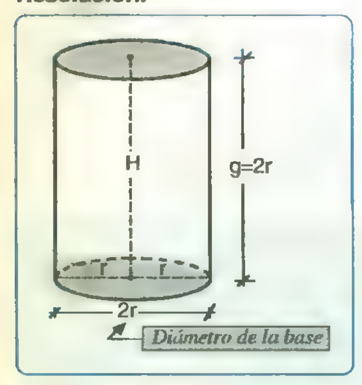
2. **Volumen de la Esfera** $V = 4/3\,\pi R^3$

PROBLEMAS RESUELTOS TIPO I.B.M.
SOBRE CILINDRO, CONO Y ESFERA

Problema 1: La circunferencia de la base de un cilindro mide 8π metros y la generatriz es igual al diámetro de la base. Calcular el área lateral, el área total y el volumen del cilindro.

A) $82\pi m^2$, $102\pi m^2$, $144\pi m^3$ **B)** $72\pi m^2$, $92\pi m^2$, $112\pi m^3$
C) $64\pi m^2$, $96\pi m^2$, $128\pi m^3$ **D)** $44\pi m^2$, $64\pi m^2$, $100\pi m^3$
E) N.A.

Resolución:



- Según datos del problema:

$$\underbrace{L_{circunferencia}}_{2\pi r} = 8\pi$$

$$2\pi r = 8\pi r \Rightarrow \boxed{r = 4m}$$

- Por dato: $g = 2r \Rightarrow \boxed{g = 8\,m}$

- Calculamos el **área lateral**

$$S_L = 2\pi rg$$

$$S_L = 2\pi \times 4\,m \times 8\,m \Rightarrow \boxed{S_L = 64\pi m^2}$$

- **Área total**

$$S_T = 2\pi r\,(g + r)$$

$$S_T = 2\pi \times 4\,m\,(8\,m + 4\,m)$$

$$S_T = 96\,\pi m^2$$

- **Volumen**

$V = \pi r^2 H$ pero: $H = g = 8\,m$

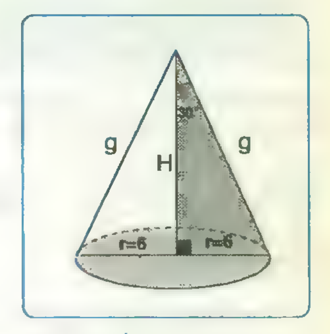
$$V = \pi \times (4\,m)^2 \times 8\,m$$

$\boxed{V = 128\,\pi m^3}$ **Rpta. C**

Problema 2: El radio de la base de un cono mide 6 cm. Calcular el área lateral del cono si la generatriz forma 30° con la altura.

A) $72\ \pi cm^2$ **B)** $80\pi cm^2$ **C)** $54\ \pi cm^2$ **D)** $90\ \pi cm^2$ **E)** $60\ cm^2$

Resolución:

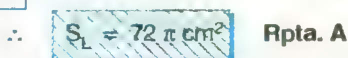


- En el ◺ sombreado que es notable de 30° y 60°:

$$\boxed{r = \frac{g}{2}} \Rightarrow 6\ cm = \frac{g}{2} \Rightarrow \boxed{g = 12\ cm}$$

- Luego, aplicamos la fórmula del área lateral del cono:

$$\boxed{S_L = \pi rg} \qquad S_L = \pi \times 6\ cm \times 12\ cm$$



$$\therefore \boxed{S_L = 72\ \pi\ cm^2} \quad \textbf{Rpta. A}$$

Problema 3: El diámetro de un balón de fútbol es 30 cm. Calcular su volumen.

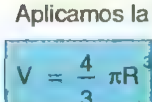
A) $1500\ \pi cm^3$ **B)** $2500\ \pi cm^3$ **C)** $4500\ \pi cm^3$ **D)** $5500\ \pi cm^3$ **E)** $3500\ \pi cm^3$

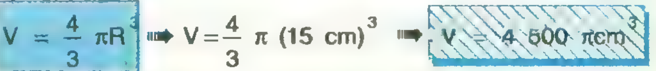
Resolución:

- Sabemos que $\boxed{\text{diámetro} = 2\ \text{radio}}$

$$30\ cm = 2R \Rightarrow \boxed{R = 15\ cm}$$

- Aplicamos la fórmula del volumen de una esfera:





$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi\ (15\ cm)^3 \Rightarrow \boxed{V = 4\ 500\ \pi cm^3} \quad \textbf{Rpta. C}$$

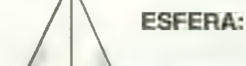
Problema 4: La altura y el diámetro de un cono de revolución son iguales al radio de una esfera de 4 cm³ de volumen. Calcular el volumen del cono.

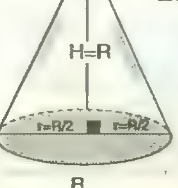
A) $1\ cm^3$ **B)** $0{,}25\ cm^3$ **C)** $1{,}5\ cm^3$ **D)** $2\ cm^3$ **E)** $4\ cm^3$

Resolución:

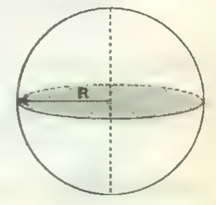
- Según datos:

CONO:





ESFERA:



$$V_{esfera} = 4\ cm^3$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\ cm^3$$

$$\boxed{\pi R^3 = 3\ cm^3} \quad ...(1)$$

- Cálculo del volumen del cono:

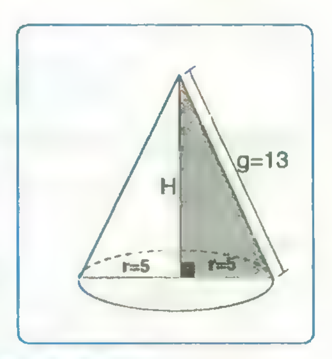
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 H \Rightarrow V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot R \Rightarrow \boxed{V_{cono} = \frac{1}{12}\pi R^3} \quad \ldots (2)$$

- Reemplazando **(1)** en **(2)**: $V_{cono} = \frac{1}{12}(3\ cm^3) \Rightarrow \boxed{V_{cono} = 0{,}25\ cm^3}$ **Rpta. B**

Problema 5 : La generatriz de un cono mide 13 cm y el radio de la base mide 5 cm. El volumen y el área total del cono son respectivamente:

A) $80\ \pi cm^3$, $70\ \pi cm^2$ **B)** $60\ \pi cm^3$, $80\ \pi cm^2$ **C)** $110\ \pi cm^3$, $120\ \pi cm^2$
D) $100\ \pi cm^3$, $90\ \pi cm^2$ **E)** $90\ \pi cm^3$, $100\ \pi cm^2$

Resolución:



- En primer lugar calculamos la altura del cono. Por el Teorema de Pitágoras:

$$H^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow H^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow \boxed{H = 12\ cm}$$

- **Volumen:**

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 \Rightarrow \boxed{V = 100\ \pi cm^3}$$

- **Área total:**

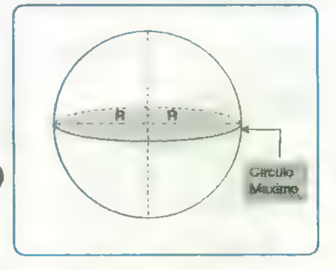
$$S_T = \pi r(g + r) \Rightarrow S_T = \pi \cdot 5(13 + 5) \Rightarrow$$

$\boxed{S_T = 90\ \pi cm^2}$ **Rpta. D**

Problema 6 : En una esfera el área del círculo máximo es "S". Hallar el área de la esfera.

A) 2S **B)** 3S **C)** 4S **D)** 5S **E)** 6S

Resolución:



- Según datos: área del círculo máximo = S

$$\boxed{\pi R^2 = S} \ldots (1)$$

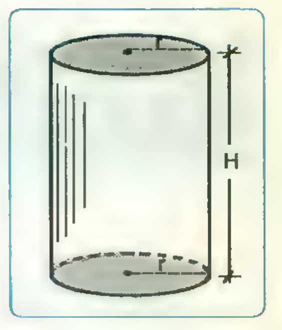
- El área pedida es: $\boxed{\text{área de la esfera} = 4\pi R^2}$ ... **(2)**

- **1** en **2**: $\boxed{\text{Área de la esfera} = 4S}$ **Rpta C**

Problema 7 : El área lateral de un cilindro es "A" y su volumen es "V". Calcular el radio de su base.

A) $\frac{A}{V}$ B) $\frac{2A}{V}$ C) $\frac{V^2}{A}$ D) $\frac{2V}{A}$ E) $\frac{V}{2A}$

Resolución:

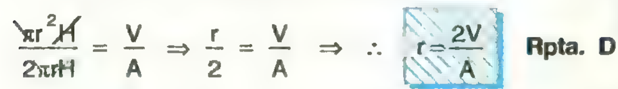


- Según datos del problema:

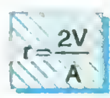
$S_L = A$ ➡ $\boxed{2\pi rH = A}$ ... (1)

Volumen = V ➡ $\boxed{\pi r^2 H = V}$ ... (2)

- Dividiendo miembro a miembro: 2 entre 1:



$$\frac{\pi r^2 H}{2\pi rH} = \frac{V}{A} \Rightarrow \frac{r}{2} = \frac{V}{A} \Rightarrow \therefore$$



$$r = \frac{2V}{A}$$

Rpta. D

Problema 8 : El volumen de una esfera es numéricamente igual a su área. Calcular su radio.

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) 27

Resolución:

- Según datos: $\boxed{V_{esfera} = \text{Área de la esfera}}$

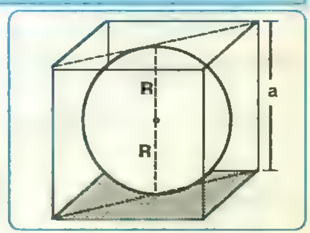
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \implies \boxed{R = 3}$$ **Rpta. B**

Problema 9 : La arista de un cubo es de 6 m. Calcular el volumen de la esfera inscrita en el cubo.

A) $9\pi m^3$ B) $24\pi m^3$ C) $81\pi m^3$ D) $27\pi m^3$ E) $36\pi m^3$

Resolución:

Recuerda Que: Una esfera está inscrita en un cubo cuando es tangente a las seis caras del cubo



- Del gráfico vemos que:

$\boxed{a = 2R}$ ➡ $6\text{ m} = 2R$ ➡ $\boxed{R = 3\text{ m}}$

- Volumen de la esfera:

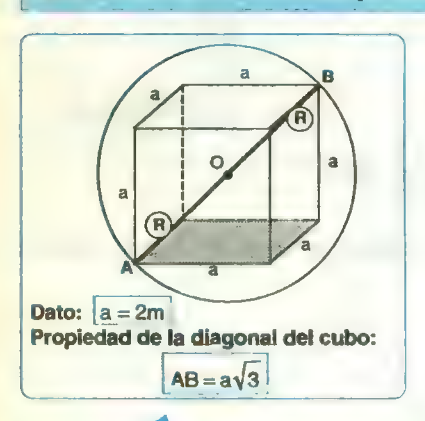
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \implies V = \frac{4}{3}\pi (3)^3 \implies \boxed{V = 36\pi m^3}$$ **Rpta E**

Problema 10: La arista de un cubo es de 2 m. Calcular el área de la esfera circunscrita al cubo.

A) $12\ \pi m^2$ B) $13\ \pi m^2$ C) $14\ \pi m^2$ D) $15\ \pi m^2$ E) $16\ \pi m^2$

Resolución:

Recuerda Que: *Una esfera está circunscrita a un cubo (o el cubo está inscrito en la esfera) cuando los ocho vértices del cubo pertenecen a la superficie esférica.*



Dato: $a = 2m$

Propiedad de la diagonal del cubo:

$AB = a\sqrt{3}$

- Del gráfico:

Diámetro de la esfera = diagonal del cubo

$$2R = a\sqrt{3}$$

$$2R = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3}\ m$$

- Área de la esfera: $S = 4\pi R^2$

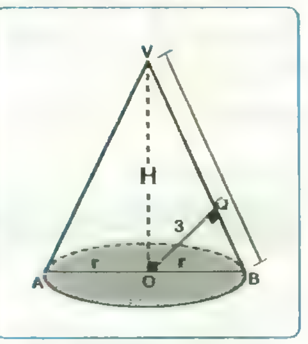
$$S = 4\pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2$$

Rpta. A $\therefore\ S = 12\ \pi m^2$

Problema 11: El volumen de un cono de revolución es $10\ m^3$ y la distancia del centro de su base a su generatriz es 3 m. Hallar el área lateral del cono.

A) $12\ m^2$ B) $15\ m^2$ C) $10\ m^2$ D) $13\ m^2$ E) $18\ m^2$

Resolución:



- Según datos: $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 H$

$$10 = \frac{1}{3}\pi r^2 H \Rightarrow \pi r^2 H = 30 \quad ...(1)$$

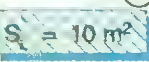
- En el ⊿ VOB, por relaciones métricas:

$$rH = 3g \quad ...(2)$$

- El área pedida es: $S_L = \pi r g = ?$ ... (3)

- De 1: $\pi r^2 H = 30 \Rightarrow \pi\, r.r\,H = 30 \Rightarrow \pi r(3g) = 30 \Rightarrow \pi r g = 10$ ... (4)

(de ②)

- Reemplazando 4 en 3:  $S_L = 10\ m^2$ **Rpta C**

TALLER DE PROBLEMAS Nº 42

Problema 1 : El área lateral de un cilindro es 20 πm^2 y el área total es 28 πm^2. El volumen del cilindro es:

Resolución:

Rpta. $V = 20\,\pi m^3$

Problema 2 : La altura y la generatriz de un cono miden 15 y 17 metros respectivamente. El área lateral del cono es:

Resolución:

Rpta. $S_L = 136\,\pi m^2$

Problema 3 : El área de una esfera es 144 πcm^2. El volumen es:

Resolución:

Rpta. $V = 288\,\pi cm^3$

Problema 4 : En un cono, la generatriz y la altura forman un ángulo de 30º. El área lateral es 20 m^2; el área total del cono es:

Resolución:

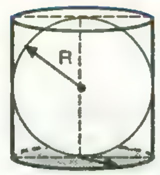
Rpta. $S_T = 30\ m^2$

Problema 5: El área total de un cono es 16 πm^2. El radio de la base y la altura están en la relación de 3 a 4. Calcular la altura.

Resolución:

Rpta. $H = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ m

Problema 6: El volumen de un cilindro es 30 m^3. El volumen de la esfera inscrita en el cilindro es:



Resolución:

Rpta. $V_{esfera} = 20\ m^3$

Problema 7: El área total de un cubo es 96 m^2. Calcular el área de la esfera inscrita en dicho cubo.

Resolución:

Rpta. 16 πm^2

Problema 8: El área lateral de un cilindro es "S" y la longitud de la circunferencia de la base es "C". Calcular el volumen del cilindro.

Resolución:

Rpta. $V = \frac{SC}{4\pi}$

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE GEOMETRÍA DEL ESPACIO

NIVEL I

Problema 1: La base de un prisma recto es un cuadrado de 4 cm de lado. La altura mide 6 cm. El área lateral del prisma es:

A) 80 cm^2 **B)** 16 cm^2 **C)** 96 cm^2
D) 48 cm^2 **E)** 45 cm^2

Problema 2: En un paralelepípedo rectangular la base es un cuadrado de 2 m de lado y la altura mide 1 m. ¿Cuánto mide la diagonal del paralelepípedo?

A) 2 m **B)** 3 m **C)** 4 m **D)** 5 m **E)** 6 m

Problema 3: Calcular el área total de un prisma triangular de 2,5 m de altura, si la base es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 metros.

A) 42 m^2 **B)** 30 m^2 **C)** 12 m^2
D) 56 m^2 **E)** 60 m^2

Problema 4: La diagonal de un cubo mide $7\sqrt{3}$ m. Hallar el área total.

A) 192 m^2 **B)** 30 m^2 **C)** 274 m^2
D) 480 m^2 **E)** 294 m^2

Problema 5: El volumen de un cubo es 216 cm^3. Calcular la diagonal de dicho cubo.

A) 6 cm **B)** 8 cm **C)** $8\sqrt{2}$ cm
D) $6\sqrt{2}$ cm **E)** $6\sqrt{3}$ cm

Problema 6: La arista básica de un prisma cuadrangular regular mide 12 cm y la altura mide igual al semiperímetro de la base. Calcular el área lateral del prisma.

A) 1152 cm^2 **B)** 978 cm^2 **C)** 866 cm^2
D) 1048 cm^2 **E)** 976 cm^2

Problema 7: En una pirámide el área de la base es 10 m^2 y la altura mide 6 m. El volumen de la pirámide es:

A) 10 m^3 **B)** 45 m^2 **C)** 30 m^3
D) 20 m^3 **E)** 60 m^3

Problema 8: La arista básica de una pirámide cuadrangular regular mide 12 cm y la altura mide 8 cm. Calcular la apotema.

A) 7 cm **B)** 8 cm **C)** 9 cm
D) 10 cm **E)** 11 cm

Problema 9: Si el centro de un cubo se une a sus ocho vértices por medio de segmentos ¿cuántas pirámides se forman?

A) 4 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 9

Problema 10: El área lateral de una pirámide regular es 180 cm^2, la apotema mide 10 cm. Calcular el perímetro de la base.

A) 72 cm **B)** 24 cm **C)** 18 cm
D) 36 cm **E)** 20 cm

Problema 11: Calcular la altura de un tetraedro regular de 12 m de arista.

A) $2\sqrt{6}$ m B) $3\sqrt{6}$ m C) $4\sqrt{6}$ m
D) 5 m E) 6 m

Problema 12: Calcular el volumen de un cono cuya base tiene 10π centímetros de circunferencia y cuya altura mide 6 cm.

A) 50 πcm^3 B) 25 πcm^3 C) 100 πcm^3
D) 150 πcm^3 E) 30 πcm^3

Problema 13 : La generatriz de un cilindro mide 6 m y el radio de la base mide 5 m. El área total del cilindro es:

A) 110 πcm^2 B) 60 πcm^2 C) 50 πcm^2
D) 100 πcm^2 E) N.A.

Problema 14: El diámetro de una esfera mide 20 centímetros. Calcular su volumen. (Dato: $\pi/3 = 1{,}047$)

A) 1 047 cm^3 B) 2 094 cm^3 C) 3 141 cm^3
D) 4 188 cm^3 E) 5 235 cm^3

Problema 15 : Uno de los círculos máximos de una esfera tiene un área de 100 πcm^2. El área de la superficie esférica es:

A) 200 πcm^2 B) 200 cm^2 C) 400 cm^2
D) 400 πcm^2 E) 300 πcm^2

Problema 16: El diámetro de la base de un cono mide 30 cm, si la generatriz mide 25 cm, ¿Cuánto mide la altura del cono?

A) 18 cm B) 20 cm C) 21 cm
D) 22 cm E) 17 cm

Problema 17 : Calcular el área lateral de una pirámide hexagonal regular cuya apotema mide 13 cm. y la arista básica 4 cm.

A) 312 cm^2 B) 156 cm^2 C) 172 cm^2
D) 144 cm^2 E) 78 cm^2

Problema 18: La generatriz de un cono mide 25 cm y la altura mide 1 centímetro menos que la generatriz. Calcular el área lateral del cono.

A) 175 πcm^2 B) 224 πcm^2 C) 168 πcm^2
D) 172 πcm^2 E) 106 πcm^2

Problema 19 : El área lateral de un cilindro es 6 πm^2, el volumen es 3 πm^3. Calcular el área total

A) 10 πm^2 B) 9 πm^2 C) 6 πm^2
D) 7 πm^2 E) 8 πm^2

Problema 20: En una pirámide de base cuadrada todas las caras laterales son triángulos equiláteros. El área de la base es 5 m^2. Hallar el área lateral.

A) 5 m^2 B) $5\sqrt{2}$ m^2 C) $5\sqrt{3}$ m^2
D) 10 m^2 E) 15 m^2

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. A	4. E
5. E	6. A	7. D	8. D
9. B	10. D	11. C	12. A
13. A	14. D	15. D	16. B
17. B	18. A	19. E	20. C

NIVEL II

Problema 1: El volumen de un hexaedro regular es igual a su diagonal al cubo dividido entre:

A) $2\sqrt{2}$ **B)** $3\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** $3\sqrt{3}$ **E)** 3

Problema 2: El radio de la base de un cono es 15 cm y la distancia del centro de la base a la generatriz es de 12 cm. Hallar el área lateral del cono.

A) $150\ \pi cm^2$ **B)** $225\ \pi cm^2$ **C)** $180\ \pi cm^2$
D) $275\ \pi cm^2$ **E)** $375\ \pi cm^2$

Problema 3: Un cono y una esfera tienen igual radio. La altura del cono es igual al diámetro de la esfera. Si el volumen del cono es $100\ m^3$, el volumen de la esfera será:

A) $100\ m^3$ **B)** $200\ m^3$ **C)** $100\ \pi m^3$
D) $200\ \pi m^3$ **E)** $50\ m^3$

Problema 4: El área lateral de un cilindro es $18\ m^2$ y su volumen es $9\ m^3$. Hallar el diámetro de su base.

A) 1 m **B)** 2 m **C)** 0,5 m
D) 1,5 m **E)** 3 m

Problema 5: Calcular la altura de un cono sabiendo que el área lateral es $16\sqrt{5}\ \pi m^2$ y el radio de la base es 4 m.

A) 6 m **B)** 8 m **C)** 10 m
D) $8\ \pi m$ **E)** $5\ \pi m$

Problema 6: El área total de un cono es $16\pi m^2$. El radio de la base y la altura están en la relación de 3 y 4. El volumen del cono es:

A) $\frac{8}{3}\pi\sqrt{6}\ m^3$ **B)** $5\ \pi\ m^3$
C) $\frac{6}{5}\pi\sqrt{6}\ m^3$ **D)** $8\pi\sqrt{6}\ m^3$
E) N.A.

Problema 7: Calcular el volumen de un cilindro de revolución cuya altura mide 8 y el desarrollo de su superficie lateral es un rectángulo cuya diagonal mide 10.

A) $3/\pi$ **B)** $9/\pi$ **C)** $18/\pi$
D) $36/\pi$ **E)** $72/\pi$

Problema 8: Calcular el área total de un cubo inscrito en una esfera de $\sqrt{3}$ m de radio.

A) $24\ m^2$ **B)** $24\ \pi m^2$ **C)** $12\ m^2$
D) $18\ m^2$ **E)** $36\ m^2$

Problema 9: El área de la superficie de una esfera es igual a 36π. Calcular su volumen.

A) $18\ \pi$ **B)** $9\ \pi$ **C)** $36\ \pi$ **D)** $72\ \pi$ **E)** N.A

Problema 10: Todas las aristas de un cubo suman 24 u. Calcular el volumen de la esfera inscrita en dicho cubo.

A) $\frac{8\pi}{5}u^3$ **B)** $4\pi u^3$ **C)** $2\ \pi u^3$
D) $\frac{4\pi}{3}u^3$ **E)** N.A.

Problema 11: Calcular el área lateral y el volumen de un prisma recto de altura igual a 12 u si su base es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8u y 6u.

A) $96\ u^2$, $380\ u^3$ **B)** $288\ u^2$; $288\ u^3$
C) $144\ u^2$; $380\ u^3$ **D)** $72\ u^2$; $1\ 440\ u^3$
E) N.A.

Problema 12 : La base de una pirámide es un rectángulo cuya diagonal mide $4\sqrt{13}$u y el ancho 8 u. Si la altura de la pirámide mide 10 u, calcular su volumen.

A) 320 u^3 B) 160 u^3 C) 480 u^3
D) 120 u^3 E) N.A.

Problema 13 : Calcular el área total de un prisma cuadrangular regular de 30 metros de altura si la diagonal de la base mide 10 $\sqrt{2}$ m.

A) 1 800 m^2 B) 1 000 m^2 C) 900 m^2
D) 1 200 m^2 E) 1 400 m^2

Problema 14 : Se tiene un cilindro lleno de agua hasta la mitad. Se suelta un cubo metálico y el nivel de agua sube 3,5 cm. Si el diámetro del cilindro es 8 cm, Calcular el volumen del cubo.

A) 56 cm^3 B) 75 πcm^3 C) 70 cm^3
D) 56 πcm^3 E) 75 cm^3

Problema 15 : El volumen de un tetraedro regular de arista "a" es:

A) $a^3\sqrt{3}/6$ B) $a^3\sqrt{2}/6$ C) $a^3\sqrt{2}/2$
D) $a^3\sqrt{2}/12$ E) $a^3/6$

Problema 16 : Una de las caras de un tetraedro regular tiene un área de 27 $\sqrt{3}$ m^2. Calcular la altura del tetraedro.

A) $3\sqrt{6}$ m B) $6\sqrt{3}$ m C) $2\sqrt{6}$ m
D) $6\sqrt{2}$ m E) 6 m

Problema 17 : Un vaso cilíndrico de 20 cm de diámetro y 40 cm de altura está lleno de agua. Si se vierte esta agua en otro vaso de 40 cm de diámetro, determinar la altura que alcanzará el agua.

A) 10 cm B) 12 cm C) 13 cm
D) 15 cm E) 20 cm

Problema 18 : Hallar el volumen de una pirámide regular de 15 m de arista lateral, si la base es un exágono inscrito en una circunferencia de 9 m de radio.

A) $486\sqrt{3}$ m^3 B) $162\sqrt{3}$ m^3
C) $148\sqrt{3}$ m^3 D) $218\sqrt{3}$ m^3
E) N.A.

Problema 19 : El perímetro y el área de una de las caras de un paralelepípedo rectángulo miden respectivamente 34 m y 60 m^2. Calcular el volumen del sólido si la suma de sus diagonales es 340 m.

A) 5 030 m^3 B) 5 040 m^3 C) 5 050 m^3
D) 5 060 m^3 E) 5 070 m^3

Problema 20 : La generatriz y la altura de un cono forman un ángulo de 16°. Si el diámetro de la base del cono es de 7 cm, calcular el área total del cono. (Considerar $\pi = 22/7$)

A) 56 cm^2 B) 168 cm^2 C) 174 cm^2
D) 156 cm^2 E) 176 cm^2

Clave de Respuestas

1. D	2. E	3. B	4. B
5. B	6. A	7. E	8. A
9. C	10. D	11. B	12. A
13. E	14. D	15. D	16. D
17. A	18. A	19. B	20. E

Introducción a la Estadística

10.1. INTRODUCCIÓN

Antes de iniciar el desarrollo teórico de los conceptos básicos de la estadística, es interesante realizar un breve repaso sobre aplicaciones de esta ciencia en la actualidad. El repaso se puede centrar a nivel individual, a nivel empresarial y a nivel nacional.

A nivel individual: La lectura de periódicos y de revistas nos presenta, con mucha frecuencia, estadísticas sobre diversos aspectos de la vida ordinaria: Nacimientos, evolución de precios y salarios, índice de costos de vida, etc.

Estas estadísticas vienen acompañados muchas veces de gráficos que facilitan su comprensión.

Las estadísticas tiene un amplio campo de acción a nivel de empresa y, entre otras aplicaciones, se pueden citar el control de calidad. El control de calidad permite a la industria obtener sus productos con las características exigidas, admitiéndose límites tolerables de producción defectuosa.

La estadística a nivel nacional sirve de soporte para la elaboración de planes y para la toma de decisiones en diferentes sectores. Por ejemplo, las estadísticas sobre el paro abrero servirán como base para tomar decisiones que estimulen el pleno empleo.

10.2. ¿QUÉ ES LA ESTADÍSTICA?

La estadística es una ciencia con procedimientos eficaces para el conocimiento y estudio de los hechos y fenómenos en su aspecto plural y colectivo, que investigando las relaciones existentes entre dichos fenómenos, llega a formular unas leyes.

La estadística es de gran utilidad, pues sirve como base para formular juicios, determinar una norma de acción, estabecer una política y, en general, la previsión del porvemir. **En cierto modo, revela el futuro apoyándose en el pasado.**

La Estadística se divide con frecuencia en:

10.2.1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Que trata de los métodos de organizar los datos numéricos para que se haga fácil su interpretación, y ;

10.2.2. ESTADÍSTICA INFERENCIAL O INDUCTIVA

Que trata sobre el proceso de llegar a conclusiones probables acerca de una gran población (como el conjunto de los habitantes de latinoamérica) por medio de la información obtenida de un subconjunto pequeño o una muestra de la población.

- **MUESTREO:** Es el método estadístico por medio del cual se definen los criterios y técnicas que orientan al proceso de recolección de la información.

- **MUESTRA:** Es un subconjunto de la población que nos interesa estudiar o investigar.

- **VARIABLE:** Símbolo que puede asumir cualquier valor de un determinado conjunto de datos o dominio.

  Las variables pueden ser:

  - **Cualitativas :** aquellas que toman valores de acuerdo a una cualidad. No pueden ser expresadas directamente en forma numérica.

  - **Cuantitativas:** aquellas que pueden expresarse en forma numérica. Pueden ser discretas o continuas.

    - **Discretas,** las que sólo tienen valores enteros, tal como el número de alumnos de tu colegio.

    - **Continuas,** son las que pueden tomar cualquier valor entre dos números reales determinados, tales como el número de toneladas de hierro producidas por una mina.

10.2.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS DATOS ESTADÍSTICOS

La información estadística se presenta con frecuencia en forma de una tabla numérica. Si la tabla es extensa, puede ser difícil alcanzar una comprensión clara de la información presentada en la tabla. Sin embargo, si se presenta la información en forma de gráfico, puede ser mucho más fácil su interpretación. Los gráficos más empleados son los siguientes:

1. Gráfico de barras	**3. Histogramas**
2. Gráfico de sectores	**4. Gráficas poligonales**

Ejemplo:

Para conocer la preferencia de los 43 alumnos de una sección de "Cuarto año", con respecto a los deportes: Fútbol, natación, vóleibol y ajedrez, se ha tomado el siguiente cuestionario.

➡ Marca con un x, en el cuadro correspondiente al deporte que más prefieres.

Fútbol	☐	**Vóleibol**	☐
Natación	☐	**Ajedrez**	☐

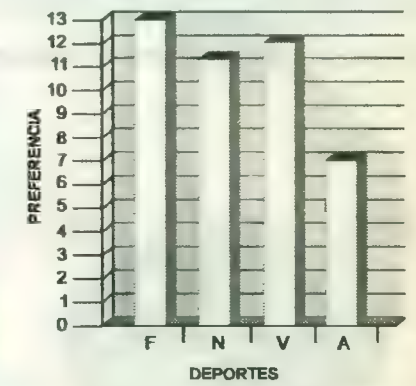
➡ Después de llenado este cuestionario, las respuestas fueron:

Deporte preferido	Número de alumnos
Fútbol (F)	13
Natación (N)	11
Vóleibol (V)	12
Ajedrez (A)	7

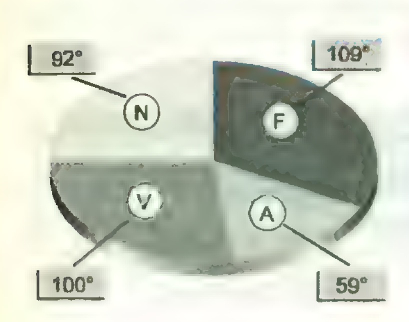
Estos datos estadísticos obtenidos pueden representarse gráficamente de una de las siguientes maneras:

1) **Gráfico de Barras:** El gráfico de barras se utiliza mucho en el campo de los negocios, y en muchas otras actividades, para comparar hechos que no están determinadamente relacionados entre si; en esta clase de gráficas se utilizan barras horizontales o verticales.

- *La anchura de cada barra es uniforme*



2) **Gráfico de sectores circulares:** Es un gráfico de forma circular, subdividido en sectores, el área de cada sector indica la proporción de cada componente respecto al todo. Ya que los sectores tienen todos el mismo radio, sus áreas son proporcionales a los ángulos centrales respectivos o bien a las longitudes de sus arcos. Lo más sencillo es por tanto, repartir los 360°, que suman todos los ángulos centrales, proporcionalmente a las cantidades que se quieran representar.



a) Para Fútbol:

de Alumnos que prefieren Fútbol

$$\frac{13 \times 360^\circ}{43} = 109^\circ \text{ (Aproximadamente)}$$

Total de Alumnos

b) Para Natación:

de Alumnos que prefieren Natación

$$\frac{11 \times 360^\circ}{43} = 92^\circ \text{ (Aproximadamente)}$$

Total de Alumnos

c) Para Vóleibol

de Alumnos que prefieren Voleibol

$$\frac{12 \times 360^\circ}{43} = 100^\circ \quad \text{(Aprox.)}$$

Total de Alumnos

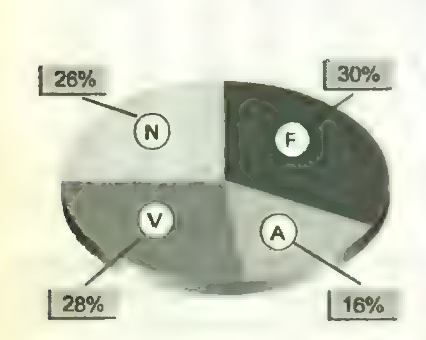
d) Para Ajedrez

de Alunos que prefieren Ajedrez

$$\frac{7 \times 360^\circ}{43} = 59^\circ \quad \text{(Aprox.)}$$

Total de Alumnos.

.Este tipo de gráfica, también se puede expresar en porcentajes, veamos:



a) Para Fútbol:

$$\frac{13}{43} \times 100\% = 30\% \quad \text{Aprox.}$$

b) Para Natación:

$$\frac{11}{43} \times 100\% = 26\% \quad \text{Aprox.}$$

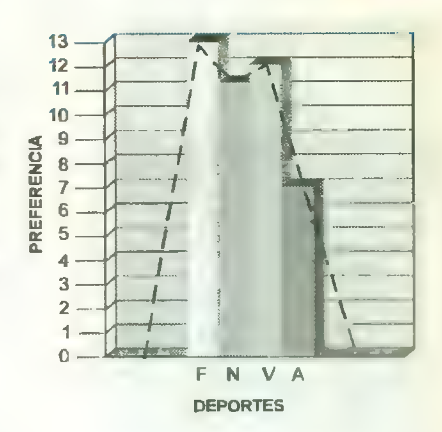
c) Para Vóleibol:

$$\frac{12}{43} \times 100\% = 28\% \quad \text{Aprox.}$$

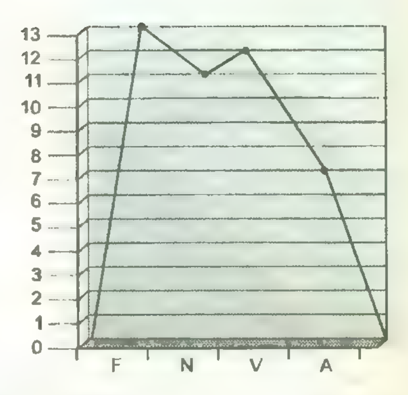
d) Para Ajedrez:

$$\frac{7}{43} \times 100\% = 16\% \quad \text{Aprox.}$$

3) **Histograma:** Un histograma es un conjunto de rectángulos cada uno con base en el eje horizontal, teniendo estas bases como puntos medios, en este caso, a los puntos que corresponden a los deportes (fútbol, natación, vóleibol y ajedrez) .



4) **Gráfica Poligonal:** Las gráficas lineales o poligonales se llaman así porque las líneas representativas de la función son quebradas o poligonales. Generalmente se acostumbra a graficar sobre papel milimetrado o cuadriculado se toman dos ejes coordenados y sobre uno de los cuales se representan los valores de una de las magnitudes y sobre el otro, los correspondientes de la otra magnitud. Se determinan los puntos y luego uniendo estos puntos se tiene la gráfica poligonal.



En esta sección se consideran algunas ideas referentes a la estadística descriptiva.

Nataly elaboró una lista de las edades de los padres de sus compañeros de clase. En la lista había 25 números. Para poder analizar este conjunto de números los colocó en orden, de mayor o menor.

42,	40,	36,	38,	51,	39,	38,
50,	34,	38,	43,	49,	42,	37,
39,	55,	40,	44,	47,	38,	41,
48,	52,	35,	45			

Persona	Edad
1	55
2	52
3	51
4	50
5	49
6	48
7	47
8	45
9	44
10	43
11	42
12	42
13	41
14	40
15	40
16	39
17	39
18	38
19	38
20	38
21	38
22	37
23	36
24	35
25	34
Total	1041 Años

La **extensión** o **amplitud** de un conjunto de números es de la diferencia entre el número mayor y el menor del conjunto.

55 - 34 = 21

La **mediana** de un conjunto ordenado de números es el número que está en el centro de la ordenación.

41 es la mediana

La **moda** de un conjunto de números es el número, si lo hay, que aparece más veces en el conjunto.

38 es la moda

La **media aritmética** o promedio es la suma de todos los números del conjunto dividido por el número de ellos.

$$\frac{1041}{25} = 41\frac{16}{25}$$

Nota: Si el promedio de edades hubiera sido par, la mediana sería entonces el promedio de los dos "números del medio". Nótese, que en el ejemplo anterior, la mediana y el promedio son valores muy cercanos; esto, sin embargo, no siempre es así. El promedio, la mediana y la moda se llaman **medidas de tendencia central.**

10.3 TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Ejemplo: Los alumnos de una sección de "Cuarto Año" tienen por alturas en centímetros:

153	154	159	162	157	156	160
161	160	163	161	164	158	158
151	161	154	164	160	156	160
158	163	158	160	161	161	
156	163	159	159	163	160	

Nos han planteado las siguientes preguntas que debemos contestar:

a) ¿Cuántos alumnos han sido medidos?
b) ¿Cuál es la altura más alta?
c) ¿Cuál es la altura más baja?
d) ¿Cuál es la diferencia entre la altura más alta y la más baja?

Resolución:

Para responder con mayor facilidad todas estas preguntas construimos la siguiente tabla, llamada **Tabla de Distribución de Frecuencias:**

Alturas (x_i)	Conteo	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Porcentual (hi)	Frec. Porcentual Acumulada	$N_i.X_i$
		(ni)	(Ni)	(hi)		
151	/	1	1	3,03	3,03	151
153	/	1	2	3,03	6,06	153
154	//	2	4	6,06	12,12	308
156	///	3	7	9,09	21,21	468
157	/	1	8	3,03	24,24	157
158	////	4	12	12,12	36,36	632
159	///	3	15	9,09	45,45	477
160	//////	6	21	18,18	63,63	960
161	/////	5	26	15,15	78,78	805
162	/	1	27	3,03	81,81	162
163	////	4	31	12,12	93,93	652
164	//	2	33	6,06	99,99	328

En esta tabla tenemos que:

1) En la columna **Alturas** (Xi), se ha colocado las alturas, partiendo del más bajo (151 cm) para terminar con el más alto (164 cm).

2) En la columna **Conteo**, se va colocando una raya en el casillero correspondiente por cada altura que se tache en los datos dados.

3) En la columna **frecuencia (ni)**, se ha colocado el número de veces que se repite la altura correspondiente. Así la altura 156 cm se repite 3 veces, la altura 161 cm se repite 5 veces. N = 33 es la suma de todas las frecuencias y nos da el número de alturas.

4) En la columna **Frecuencia Acumulada (Ni)**, se coloca la frecuencia acumulada correspondiente a cada altura; que se obtiene sumando su frecuencia a la suma de las frecuencias de todas las alturas inferiores a ella. Así la frecuencia acumulada de 153 cm es: 1 + 1 = 2 ; de 154 cm es: 2 + 2 = 4 ; de 156 cm es 4 + 3 = 7 ; 157 cm es: 7 + 1 = 8 ; etc.

5) La columna **Frecuencia Porcentual (hi)**, se construye teniendo en cuenta el tanto por ciento (%) de alturas que tienen un determinado valor así; hay 2 alturas con 154 cm cada una; su frecuencia porcentual se obtiene, haciendo la siguiente regla de tres simple:

$$\begin{array}{ccc} 33 & \rightarrow & 100\% \\ 2 & \rightarrow & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot 100\%}{33} = 6{,}06\%$$

- Hay 4 alturas con un valor de 158 cm, su frecuencia porcentual será:

$$\begin{array}{ccc} 33 & \rightarrow & 100\% \\ 4 & \rightarrow & y \end{array} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4 \cdot 100\%}{33} = 12{,}12\%$$

- Hay 6 alturas con un valor de 160 cm, su frecuencia porcentual será:

$$\begin{array}{ccc} 33 & \rightarrow & 100\% \\ 6 & \rightarrow & z \end{array} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{6 \cdot 100\%}{33} = 18{,}18\%$$

6) La columna **Frecuencia Porcentual Acumulada (Hi)**, se construye sumando la frecuencia porcentual correspondiente a la suma de las frecuencias porcentuales inferiores. Así, la frecuencia porcentual acumulada de 153 cm es: 3,03 + 3,03 = 6,06

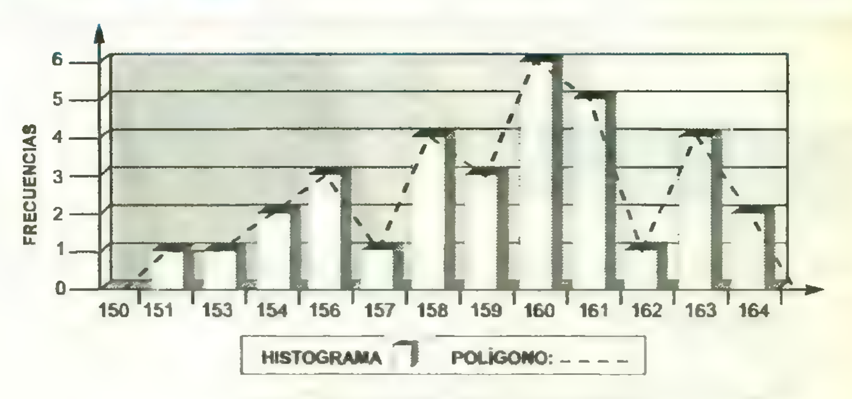
La frecuencia porcentual acumulada de 154 cm es 6,06 + 6,06 = 12,12

La frecuencia porcentual acumulada de 156 cm es: 12,12 + 9,09 = 21,21

La frecuencia porcentual acumulada de 159 cm es : 36,36 + 9,09 = 45,45, etc.

7) La columna **ni. Xi**; se obtiene multiplicando la altura por su respectiva frecuencia.

- Para ayudarnos aún más a responder las preguntas planteadas podemos representar gráficamente cada columna de esta Tabla de distribución de frecencias. Construiremos las gráficas poligonal e histograma de frecuencia.



HISTOGRAMA Y POLÍGONO DE FRECUENCIA

Contestando ahora las preguntas planteadas, tenemos:

a) Han sido medido 33 alumnos, que se obtiene contando las alturas o sumando las frecuencias: N = 33

b) La altura más alta es 164 cm.

c) La altura más baja es 151 cm.

d) La diferencia entre la altura más alta y la más baja es: 164 - 151 = 13 cm. A esta diferencia se le llama Amplitud o Rango de la muestra o conjunto de Datos o Alturas.

10.4. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

10.4.1. LA MEDIA ARITMÉTICA O MEDIA de un conjunto de N números $x_1, x_2, x_3 ......, x_n$ se representa por $\bar{x}$ y se define como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

Donde: El símbolo $\sum_{i=1}^{n} xi$ se lee: Sumatoria de las xi desde i = 1 hasta N.

Cuando se tiene en una Tabla de Distribución de frecuencias.

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ... + n_kx_k}{n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

10.4.2. LA MEDIANA de una colección de datos ordenados en orden a su magnitud es el valor o la media aritmética de los dos valores medios.

Así:

a) La mediana de: 2, 5, 8, (9) 11, 14, 15 es: 9

b) La mediana de: 4, 6, (7)(8) 10, 14 es: $\frac{7+8}{2} = 7,5$

10.4.3. LA MODA de un conjunto de datos es aquel que se presenta con más frecuencia, es decir es el más común. La moda puede no existir, incluso si existe puede no ser única.

Así

a) La moda de: 5, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 15, 17, 20 es 9

b) La moda de 6, 7, 10, 14, 14, 16, 18, 18, son: 14 y 18

c) La moda de: 10, 13, 14, 15, 18, 20 no existe

Taller de Problemas Nº 43

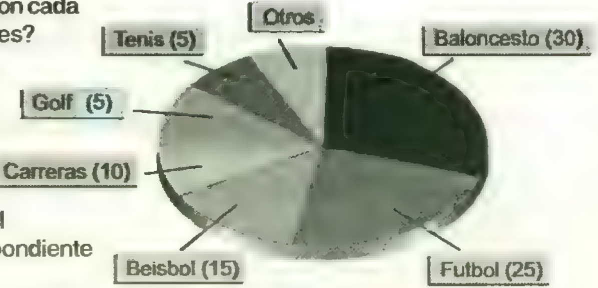
1. Manolo hizo una encuesta entre 100 alumnos de su colegio para averiguar cuáles eran sus deportes favoritos. El gráfico circular muestra el número de alumnos que escogieron un deporte determinado como favorito.

a) ¿Qué fracción de la sección circular está representada por los alumnos que escogieron cada uno de los seis deportes?

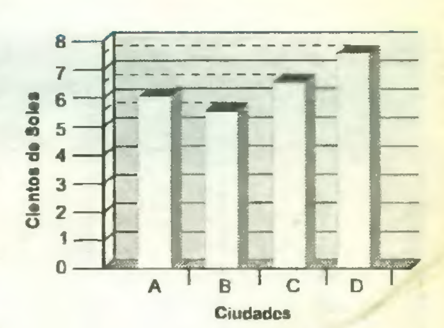
b) ¿Cuántos alumnos escogieron un deporte diferente de los mencionados?

c) ¿Qué ángulo tiene el sector circular correspondiente a Baloncesto?

d) ¿Qué ángulo tiene el sector circular correspondiente al Fútbol?



2. Consulte el gráfico de barras para contestar cada parte:



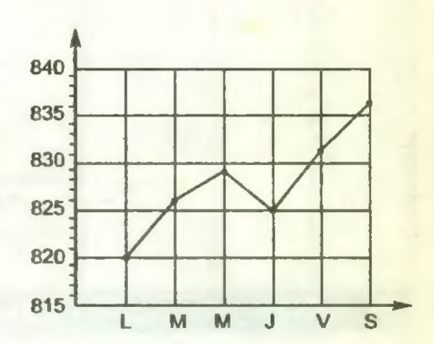
a) ¿En qué ciudad tienen los empleados públicos el salario medio más elevado?

b) ¿En qué ciudad tienen los empleados públicos el salario medio más bajo?

c) Calcular el salario medio para cada ciudad.

d) ¿Cuál es la diferencia entre el mayor salario y el menor salario?

3. La Gráfica de Segmenos a continuación presenta los promedios de cierre de una Industria. Halle el promedio de cierre de cada día, aproximando el número entero más cercano.



4. Elabore un gráfico de de segmentos con las temperaturas bajas de los siguientes días: Lunes, 12° ; Martes, 4° ; Miércoles, -3° ; Jueves, -10° ; Viernes, 0° ; Sabado, 7°; Domingo, 15° .

5. Un colegio secundario tiene 1 050 alumnos. En la tabla aparece el número de alumnos de cada grado. Haga una gráfica de barras para ilustrar esta información.

GRADO	ALUMNOS
1ro	240
2do	220
3ro	210
4to	200
5to	180

6. El número de empleados de las 40 tiendas de una cadena comercial es el siguiente:

5,	3,	9,	12,	7,	16,	9,	10,	7,	5
9,	12,	8,	15,	8,	10,	9,	12,	14,	8
7,	12,	15,	8,	5,	7,	8,	10,	12,	9
13,	9,	7,	12,	14,	13,	9,	5,	8,	10

Completar la siguiente **Tabla de Distribución de frecuecias.**

Empleados (xi)	Conteo	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Porcentual (hi)	Frec. Porcentual Acumulada	$N_i.X_i$
		(ni)	(Ni)	(hi)	(Hi)	
TOTAL						

7. Las producciones de alfalfa de 10 parcelas de igual extensión fueron de 0,8 ; 1,3 ; 1,5 ; 1,7 ; 1,8 ; 2 ; 2,1 ; 2,2 ; y 2,3 toneladas. Halla la producción media.

8. La media aritmética de tres números es 16, siendo dos de ellos 14 y 30. ¿Cuál es el otro?

9. Calcula la media aritmética de 99 ; 102 ; 97 ; 98 ; 103 ; 101.

10. El peso de 11 alumnos de 4to. Año de Secundaria es de: 64 ; 70 ; 65 ; 69 ; 68 ; 67 ; 68 ; 67; 66 ; 72 ; 61 kilogramos. Calcula la media, la mediana y la moda.

11. Halla la media, la mediana y la moda de los conjuntos de números:

a) 3 ; 5 ; 2 ; 6 ; 5 ; 9 ; 5 ; 2 ; 8 ; 6

b) 51 ; 6 ; 48 ; 7 ; 50 ; 3 ; 49 ; 5 ; 48 ; 9

c) 7 ; 4 ; 10 ; 9 ; 15 ; 12 ; 7 ; 9 ; 7

d) 8 ; 11 ; 4 ; 3 ; 2 ; 5 ; 10 ; 6 ; 4 ; 1 ; 10 ; 8 ; 12 ; 6 ; 5 ; 7

CLAVE DE RESPUESTAS: Taller Nº 43

1. **a)** Fútbol = 1/4 ; Béisbol = 3/20 ; Carreras = 1/10 ; Tenis = 1/20 ; Blaloncesto 3/10 ; Golf = 1/120
   b) 10 alumnos **c)** Balonceso = 108° **d)** Fútbol = 90°

2. **a)** En la ciudad D **b)** En la ciudad B **c)** Para la ciudad A = S/.600; para la ciudad B = S/550 ; para la ciudad C = S/.650 y para la ciudad D = S/.750
   d) Es de 200 soles

3. Lunes = 820 ; Martes = 826 ; Miércoles = 829 ; Jueves = 825 ; Viernes = 832 ; Sábado = 837

7. 1,57 **8.** 4 **9.** 100

10. Media = 67 ; mediana = 67 y la moda 67 y 68

11. **a)** 5,1 ; 5 y 5 **b)** 27,6 ; 28,5 y 48
    c) 8,89 ; 9 y 7 **d)** 6,375 ; 6 ; (5 ; 6 ; 8 y 10)

Impreso en los talleres gráficos de
EDITORIAL MONTERRICO S.A.
Los Tapiceros 280, Urb. El Artesano - ATE
Telfs.: 436-5782 - 436-5783 Fax 436-3571
LIMA - PERÚ